Eksamen i matematikk 1T våren 2016

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

$$\frac{1{,}8 \cdot 10^{12}}{0{,}0005} = \frac{18 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{18}{5} \cdot 10^{11-(-4)} = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^{15}}}$$

Oppgave 2

1) $4^{-1} = \frac{1}{4}$, så $\underline{\underline{\text{1) er } F}}$
2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4 \cdot 1 = 4$, så $\underline{\underline{\text{2) er } L}}$
3) $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3$, så $\underline{\underline{\text{3) er } B}}$
4) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, som ligger mellom $\sqrt{4} = 2$ og $\sqrt{9} = 3$, det er enten I eller J.
   Ser at $I \approx 2{,}25$, regner ut $2{,}25^2$ det blir ca. 5
   Ser at $J \approx 2{,}5$, regner ut $2{,}5^2$, det blir over 6, så jeg konkluderer med at $\underline{\underline{\text{4) er } I.}}$
5) $\tan 45° = \frac{motstående}{hosliggende}$ i en likebeint trekant, de er like lange så $\tan 45° = 1$, så $\underline{\underline{\text{5) er } G}}$
6) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$, så $\underline{\underline{\text{6) er } K}}$

Oppgave 3

Får fra den andre ligninga at $y = x + 1$, setter det inn i den første ligninga:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 2x + 3 \\ x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x &= 3 \\ 2x^2 &= 3 - 1 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

$$y_1 = x_1 + 1 = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$y_2 = x_2 + 1 = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Svar: $\underline{\text{De to mulige løsningene er } x_1 = -1 \ \wedge y_1 = 0 \text{ og } x_2 = 1 \ \wedge y_2 = 2}$

Prøve på svaret for $x_1 = -1$ og $y_1 = 0$: Venstre side: $(-1)^2 + 0^2 = 1$ Høyre side $2 \cdot (-1) + 3 = 1$, stemmer	Prøve på svaret for $x_2 = 1$ og $y_2 = 2$: Venstre side: $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ Høyre side $2 \cdot 1 + 3 = 5$, stemmer

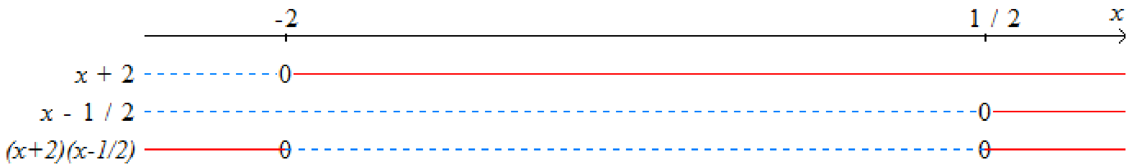
Oppgave 4

$$2x^2 + 3x > 2$$
$$2x^2 + 3x - 2 > 0$$

Finner nullpunktene med $\quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

De to nullpunktene er ved $x_1 = \frac{-8}{2} = -2$ og $x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, faktoriserer og tegner fortegnsskjema:

$$2(x - (-2)) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$$



Svar: Ulikheten er oppfylt for $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \rightarrow\rangle}}$

Oppgave 5

a) Konjugatsetningen, $(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3}) = \sqrt{6}^2 - \sqrt{3}^2 = 6 - 3 = \underline{\underline{3}}$

b) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2^3} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

Oppgave 6

Faktoriserer telleren med 1. kvadratsetning og nevner med konjugatsetningen:

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x^2 - 50} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2}{2(x^2 - 5^2)} = \frac{(x+5)^2}{2(x-5)(x+5)} = \underline{\underline{\frac{x+5}{2(x-5)}}}$$

Oppgave 7

$$2 \lg x + 8 = 2 - \lg x$$
$$2 \lg x + \lg x = 2 - 8$$
$$3 \lg x = -6$$
$$\lg x = -2$$
$$10^{\lg x} = 10^{-2}$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}01}}$$

Oppgave 8

Faktoriserer nevnere $4x + 8 = 4(x + 2)$ og $6x + 12 = 6(x + 2)$, minste felles nevner er $12(x + 2)$:

$$\frac{3 \cdot x}{3 \cdot 4(x+2)} + \frac{1 \cdot (x+2)}{12 \cdot (x+2)} - \frac{2 \cdot (4x+5)}{2 \cdot 6(x+2)} = \frac{3x + x + 2 - 8x - 10}{12(x+2)} = \frac{-4x - 8}{12(x+2)} = \frac{-4(x+2)}{12(x+2)} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 9

a) Først er det 6 av 10 blå ballonger, hvis den første er blå er det igjen 5 av 9 blå, og til slutt er det 4 av 8 blå ballonger, bruker multiplikasjonsprinsippet:

$$P(3\ blå) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3} \cdot 3} \cdot \frac{\cancel{2 \cdot 2}}{\cancel{2 \cdot 2} \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

b) Bruker her at 3 blå ballonger er det samme som ingen rosa ballonger.

$$P(minst\ 1\ rosa) = 1 - P(ingen\ rosa) = 1 - \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

c) Dette kan skje på tre ulike måter: Bare den første ballongen er rosa, eller bare den andre er rosa, eller bare den tredje er rosa.
Hvis bare den første er rosa er det først 4 av 10 rosa, så 6 av 9 blå, så 5 av 8 blå, og

$$P(RBB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

På samme måte finner jeg $P(BRB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$ og $P(BBR) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$

Finner til slutt den totale sannsynligheten ved addisjon:

$$P(1R\ og\ 2B) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 10

Undersøker antall nullpunkter for hver funksjon ved å se på $\sqrt{b^2 - 4ac}$ i abc-formelen:

$f(x)$ har $\sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9} = \sqrt{-32}$, det er umulig så $f(x)$ har ingen nullpunkter, $\underline{\underline{f(x) \text{ er graf } B.}}$

$g(x)$ har $\sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9} = \sqrt{64}$, det tilsvarer to nullpunkter så $\underline{\underline{g(x) \text{ er graf } C.}}$

$h(x)$ har $\sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9} = \sqrt{0}$, det tilsvarer ett nullpunkt, så $\underline{\underline{h(x) \text{ er graf } A.}}$

Oppgave 11

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$$

a) Momentan vekst finnes med den deriverte, $f'(x) = 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 10x + 3$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 3 = 12 - 20 + 3 = \underline{\underline{-5}}$$

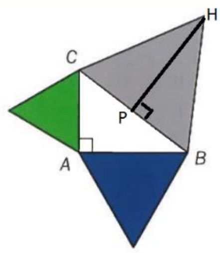
Svar: $\underline{\underline{\text{Den momentane vekstfarten til } f \text{ når } x = 2 \text{ er } f'(2) = -5.}}$

b) $f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 3$ og $f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 4 = 27 - 45 + 9 + 4 = -5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-5 - 3}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = \underline{\underline{-4}}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Den gjennomsnittlige veksten til } f \text{ i intervallet } [1, 3] \text{ er } -4}}$

Oppgave 12



a) Plasserer et punkt H i det tredje hjørnet av den grå trekanten og et annet punkt P på BC slik at PH står vinkelrett på BC. Da kan jeg bruke BC som grunnlinje og PH som høyde og regne arealet av trekanten.
Fordi ΔBHC er likebeint vet jeg at $CP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$, og at $CH = 10$.

Bruker Pytagoras: $h_{grå} = PH = \sqrt{CH^2 - CP^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

Finner arealet, $T_{grå} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = \underline{\underline{25\sqrt{3}}}$

b) Bruker Pytagoras for å finne $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$

På samme måte som for den grå trekanten finner jeg høyde og areal i de andre to trekantene:

Blå:	$h_{blå} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$	$T_{blå} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$
Grønn:	$h_{grønn} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$	$T_{grønn} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$$T_{blå} + T_{grønn} = 16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 25\sqrt{3} = T_{grå} \quad , \quad QED$$

Oppgave 13

Sinus er y-koordinaten til skjæringa mellom linja og enhetssirkelen, $\underline{\underline{\sin 53° \approx 0{,}8}}$

Cosinus er x-koordinaten til skjæringa mellom linja og enhetssirkelen, $\underline{\underline{\cos 53° \approx 0{,}6}}$

Tangens er forholdet mellom y og x (fordi y blir motstående katet hvis man tegner opp trekanten), $\tan 53° \approx \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx \underline{\underline{1{,}3}}$

Oppgave 14

a) Den deriverte er positiv fram til $x = 0$ som betyr at selve funksjonen stiger, så er den deriverte negativ til $x = 4$ som betyr at selve grafen synker, og så er den deriverte positiv etter det igjen.

Svar: <u>f har et toppunkt i $x = 0$ og et bunnpunkt i $x = 4$.</u>

b) Punktet $(2, -3)$ betyr at $x_0 = 2$ og $y_0 = -3$.
Finner fra grafen til den deriverte $a = f'(2) = -2$.
Bruker ettpunktsformelen og finner ligninga til tangenten:

$$y = ax + y_0 - ax_0 = -2x + (-3) - (-2) \cdot 2 = \underline{\underline{-2x + 1}}$$

Del 2, alle hjelpemidler, gjort i TI-nspire

Oppgave 1

Oppgave 1

a)

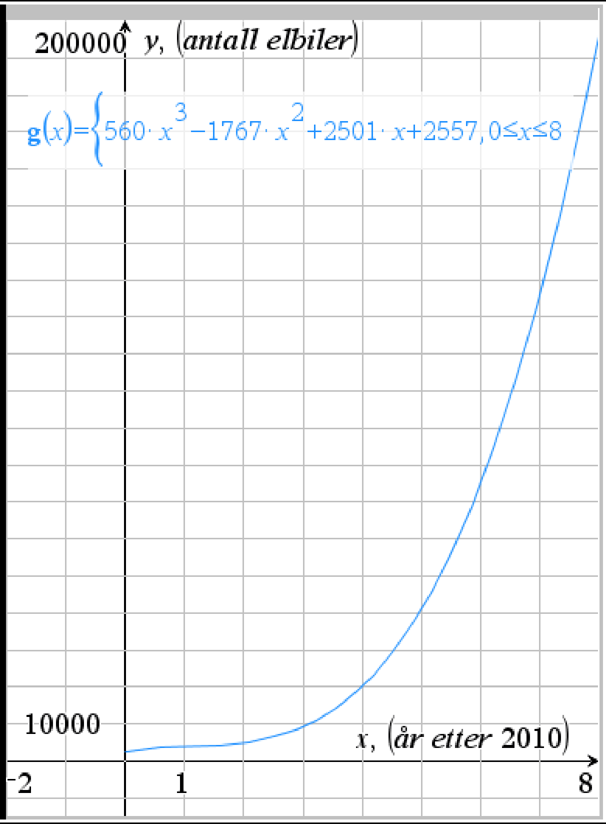
Tegner grafen i vinduet til høyre, den defineres samtidig med navn $\mathbf{g}(x)$

b)

$\mathbf{g}(4) \blacktriangleright 20129$

g'(x) = $\frac{d}{dx}(\mathbf{g}(x))|x=4 \blacktriangleright 15245$

Svar: g(4)=20129 forteller at det var litt over 20 tusen elbiler i norge i år 2014, mens g'(4)=15245 forteller at antallet økte med litt over 15 tusen fra 2014 til 2015.



Oppgave 2

Oppgave 2

a)

Lager et regneark med datapunktene til høyre, setter opp et datavindu under det og utfører en lineær regresjon.

Svar: <u>En lineær funksjon som viser utviklingen er y=−1,3x+28,9</u>

b)

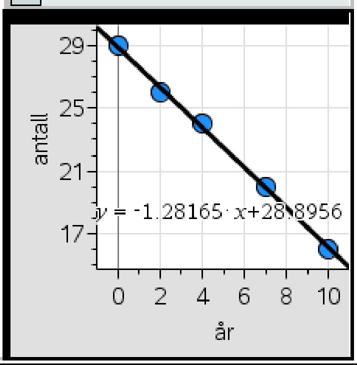
I år 2025 er $x=23$, da er $y=^-1.3\cdot 23+28.9 \blacktriangleright y=^-1.$

Det ble et negativt antall røykere, som er umulig.

Svar: <u>Nei, modellen kan ikke brukes fram mot år 2025</u>

	A år	B antall	C
=			
1	0	29	
2	2	26	
3	4	24	
4	7	20	
5	10	16	

A1 0



Oppgave 3

a) Jeg velger å lage en krysstabell. De sorte tallene er fra oppgaven, de røde er regnet som følger:
20 av 26 elever har R1, da har 6 ikke R1.
16 av 26 har fysikk, da har 10 ikke fysikk.
Av 6 som ikke tar R1 har 6 ikke fysikk, altså er det 0 som har fysikk men ikke R1.
Av de 16 som har fysikk 1 er det 0 som ikke har R1, altså har 16 både fysikk og R1.
Av de 20 som har R1 er det 16 som har fysikk, altså er det 4 som har R1 men ikke fysikk.

	R1	Ikke R1	Sum
Fysikk 1	16	0	16
Ikke fys1	4	6	10
Sum	20	6	26

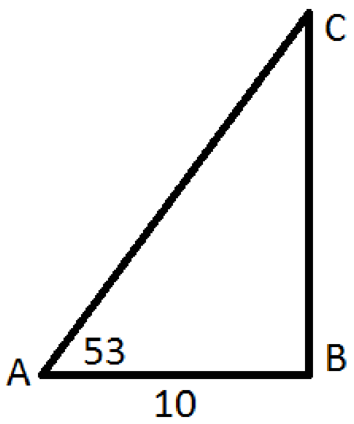
b) Ser i krysstabellen at 4 av de 26 har R1 men ikke fysikk, $P(R1 \cap \overline{F1}) = \frac{4}{26} = \underline{\underline{\frac{2}{13}}}$

c) Av de 16 som har fysikk 1 har alle 16 også R1, $P(R1|F1) = \frac{16}{16} = \underline{\underline{1}}$

Oppgave 4

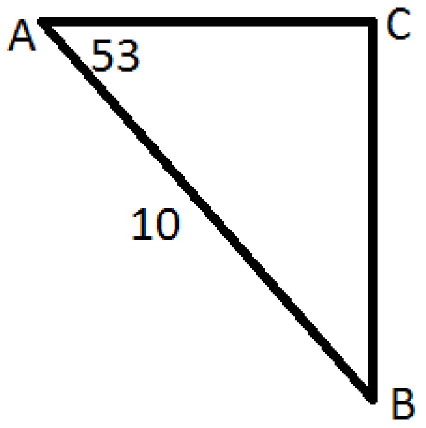
a) $\angle A = 53°$ er gitt, så trekanten kan ha enten $\angle B = 90°$ og $\angle C = 37°$ eller omvendt.

b) Ser på de to muligheten:



Her er $\angle B = 90°$ som betyr at AB er hosliggende katet mens BC er motstående katet, altså er $\frac{BC}{AB} = \tan \angle A$

$$BC = 10 \tan 53° \approx \underline{\underline{13}}$$



Her er $\angle C = 90°$ som betyr at AB er hypotenus mens BC er motstående katet, altså er $\frac{BC}{AB} = \cos 53°$

$$BC = 10 \cos 53° \approx \underline{\underline{6}}$$

Oppgave 5

Oppgave 5

Definerer $f(x):=x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ ▸ *Ferdig* og den deriverte $df(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Ferdig*

Bunnpunkt i $(3, -5)$ betyr $f(3)=-5$ og at $f'(3)=0$, (altså at $df(3)=0$)
Nullpunkt i $x=4$ betyr at $f(4)=0$

Nå har jeg tre ligninger som jeg løser i TI:

$$\text{solve}\left(\begin{cases}f(3)=-5\\ df(3)=0\\ f(4)=0\end{cases},\{b,c,d\}\right) \blacktriangleright b=-5 \text{ and } c=3 \text{ and } d=4$$

Svar: $\underline{b=-5 \text{ og } c=3 \text{ og } d=4}$

Oppgave 6

Oppgave 6
Omkretsen i det ene kvadratet er 4x, mens det andre har omkrets 4y.
Omkretsene er til sammen 16, altså 4x+4y=16
Løser for å finne y uttrykt ved x: $\text{solve}(4\cdot x+4\cdot y=16,y)$ ▸ $y=4-x$

Arealet av den ene figuren er x^2, mens den andre har areal $y^2=(4-x)^2$
Det totale arealet blir $a(x):=x^2+(4-x)^2$ ▸ *Ferdig*

Finner verdien av x som gjør at arealfunksjonen blir minst mulig:
$\text{fMin}(a(x),x)$ ▸ $x=2$
$y=4-2$ ▸ $y=2$

Svar: <u>Det samlede arealet av figuren er minst når $x=y=2$</u> (altså når kvadratene er like)

Oppgave 7

Oppgave 7

Bruker cosinussetningen for å finne lengde AD

$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot \cos(A)$

$\text{solve}\left(\left(5\cdot \sqrt{2}\right)^2=\left(2\cdot \sqrt{5}\right)^2+ad^2-2\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot ad\cdot \cos(45),ad\right) ▸ ad=-\sqrt{10} \text{ or } ad=3\cdot \sqrt{10}$

Ser bort fra den negative løsningen, så AD = $3\sqrt{10}$

Bruker arealsetningen på de to trekantene:

$T = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot \sin(A)+\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CD\cdot \sin(CDB) =$

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot 3\cdot \sqrt{10}\cdot \sin(45)+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \sqrt{2}\cdot 3\cdot \sin(45) ▸ \frac{45}{2}$

Svar: Arealet av firkanten er $\frac{45}{2}$