Eksamen R2 vår 2017, løsning

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a)

$$f'(x) = \underline{\underline{3 \cdot \cos x - \sin x}}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x^2]' \cdot \cos 2x + x^2 \cdot [\cos 2x]' = 2x \cdot \cos 2x + x^2 \cdot (-2\sin 2x) \\ &= \underline{\underline{2x(\cos 2x - x \sin 2x)}} \end{aligned}$$

c)

$$h'(x) = \frac{[2\cos x]' \cdot (1 + \sin x) - 2\cos x \cdot [1 + \sin x]'}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-2\sin x\,(1 + \sin x) - 2\cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-2(\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-2(\sin x + 1)}{(1 + \sin x)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{1 + \sin x}}}$$

Oppgave 2

a) Integrerer direkte:

$$\int \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 2 \cdot \ln|x| + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 - 2\ln|x| + C}}$$

b) Substitusjon, $u = 2x^2$ gir $\frac{du}{dx} = 4x$ gir $dx = \frac{du}{4x}$

$$\int x \cos(2x^2)\, dx \int x \cos u \frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}\sin u + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sin 2x^2 + C}}$$

Oppgave 3

a)

Den største verdien til sinus er 1, så toppunktene er der $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Alle toppunktene har $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	Den minste verdien til sinus er -1, så bunnpunktene er der $\sin 2x = -1$, $2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. Alle toppunktene har $y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$

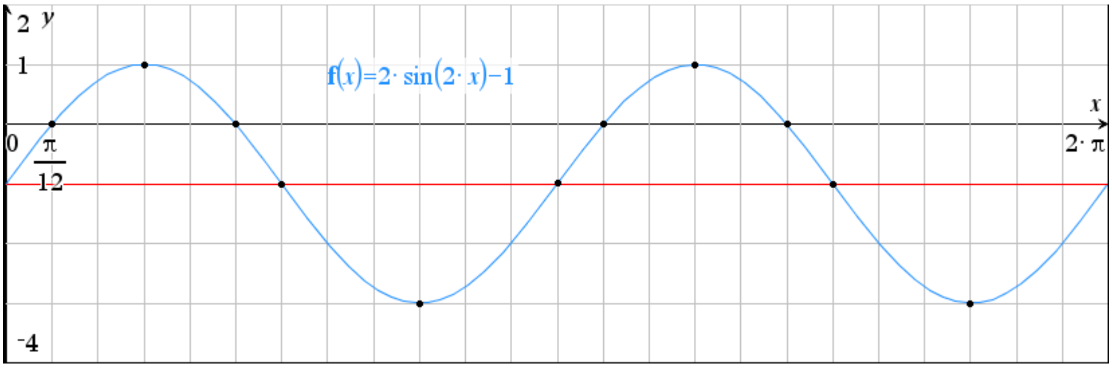
Svar: For $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ er toppunktene $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)}}$ og bunnpunktene $\underline{\underline{\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{7\pi}{4}, -3\right)}}$.

b) Løser $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2\sin 2x - 1 &= 0 \\ \sin 2x &= \frac{1}{2} \\ 2x &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \\ x &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{12} + \pi n \\ \dfrac{5\pi}{12} + \pi n \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: Innenfor $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ er nullpunktene $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{13\pi}{12}, 0\right)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{17\pi}{12}, 0\right)}}$

c) Markerer alle ekstremalpunktene fra a) og alle nullpunktene fra c), og utnytter i tillegg at vendepunktene skjærer likevektslinja i $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ i x-verdier som ligger midt mellom topp- og bunnpunktene:



Oppgave 4

a) Denne kan løses på (minst) to måter:

Som separabel differensiallikning:	Med integrerende faktor, $e^{\int(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
$$\begin{aligned} y' &= x \cdot y \quad \left| \cdot \frac{1}{y} \right. \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= x \\ \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx &= \int x dx \\ \ln\lvert y\rvert &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ \lvert y\rvert &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} \\ \lvert y\rvert &= e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\ y &= \pm e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}} \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} y' &= x \cdot y \\ y' - x \cdot y &= 0 \quad \left| \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \right. \\ y' \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + y \cdot \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) &= 0 \\ y' \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + y \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]' &= 0 \\ \left[y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]' &= 0 \\ \int \left[y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]' dx &= \int 0 dx \\ y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} &= C \quad \left| \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \right. \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}} \end{aligned}$$

b) $y(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = C \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2^2} = C \cdot e^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{e^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{e^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = 5e^{\frac{1}{2}x^2 - 2}$

Svar: Når $y(2) = 5$ er $\underline{\underline{y(x) = 5e^{\frac{1}{2}x^2 - 2}}}$

Oppgave 5

Linja starter i $(0,3)$ så $b = 3$ og $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ så ligninga for linja er $l: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Løst med integral over volumformelen:

$$V = \pi \int_0^4 l^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9\right) dx = \pi \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x\right]_0^4$$
$$= \pi\left(\frac{1}{12} \cdot 4^3 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 0\right) = \pi\left(\frac{16}{3} + 24 + 36\right) = \pi \frac{16 + 24 \cdot 3 + 36 \cdot 3}{3}$$
$$= \underline{\underline{\frac{196\pi}{3}}}$$

Løst med volumformelen for kjegler, $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$:

Linja skjærer y aksen der $\frac{1}{2}x + 3 = 0$ altså i $x = -6$, vi har altså ei kjegle med radius 5 og høyde 10 som har fått kuttet av toppen med radius 3 og høyde 6:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = \frac{(250 - 54)\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{196\pi}{3}}}$$

Oppgave 6

a) Radius av kula er lik lengden av en vektor fra sentrum til overflata:

$$r = |\overrightarrow{SP}| = |[3, -4, 0]| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Med radius r og sentrum $S(x_0, y_0, z_0) = S(1, 3, 5)$ er ligninga:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$
$$\underline{\underline{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 25}}$$

b) Radius står 90° på tangentplanet, normalvektoren kan være alle $\vec{n} \parallel \overrightarrow{SP}$, jeg velger

$$\vec{n} = \overrightarrow{SP} = [3, -4, 0]$$

Vet at $\vec{n} \perp \overrightarrow{PA}$, der $A(x, y, z)$ er et vilkårlig punkt i planet, dvs. at $\overrightarrow{PA} = [x - 4, y + 1, z - 5]$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$$
$$[3, -4, 0] \cdot [x - 4, y + 1, z - 5] = 0$$
$$3(x - 4) - 4(y + 1) + 0(z - 5) = 0$$
$$3x - 12 - 4y - 4 + 0 = 0$$
$$\alpha: \quad \underline{\underline{3x - 4y = 16}}$$

QED

c) Hvis planet α tangerer kula med sentrum i $Q(2, 0, 7)$ må avstanden fra Q til α være radius i kuleligninga. Bruker avstandsformelen fra et punkt (x_0, y_0, z_0) til et plan med $\vec{n} = [a, b, c]$ og planligning $ax + by + cz + d = 0$:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|} = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 0 \cdot 7 - 16|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Kuleligninga blir:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 7)^2 = 2^2$$
$$\underline{\underline{(x - 2)^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 4}}$$

Oppgave 7

Dette er ei uendelig geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = \ln x$

a) Rekka konvergerer når $-1 < k < x \quad \Rightarrow \quad -1 < \ln x < 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{e^{-1} < x < e^1}}$

b) Antar at rekka konvergerer, da er den uendelige summen:

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \underline{\underline{\frac{1}{1-\ln x}}}$$

c) Skal ha $S(x) = 3$, da er:

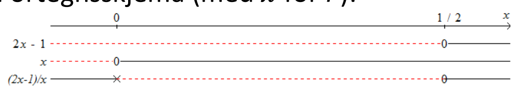
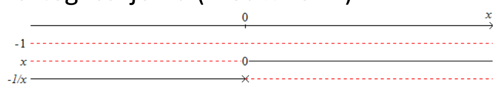
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\ln x} &= 3 \quad | \cdot (1-\ln x) \\ 1 &= 3 - 3\ln x \\ 3\ln x &= 3-1 \\ \ln x &= \frac{2}{3} \\ e^{\ln x} &= e^{\frac{2}{3}} \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= e^{\frac{2}{3}}}} \end{aligned}$$

Dette er innenfor konvergensområdet, så det er et gyldig svar.

d) For at $S(x) = r$ skal ha en løsning må r være slik at x er innenfor konvergensområdet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-k} &= r \quad | \cdot (1-k) \\ 1 &= r - rk \\ rk &= r-1 \\ k &= \frac{r-1}{r} \end{aligned}$$

Dette gir ulikheten $-1 < \frac{r-1}{r} < 1$, og siden det er en brøkulikhet må det løses som to separate ulikheter, som begge må være oppfylt for at vi skal være innenfor konvergensområdet:

$-1 < \frac{r-1}{r}$ $0 < \frac{r-1}{r} + \frac{r}{r}$ $0 < \frac{2r-1}{r}$ Fortegnsskjema (med x for r):  Denne er oppfylt for $r \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$	$\frac{r-1}{r} < 1$ $\frac{r-1}{r} - \frac{r}{r} < 0$ $-\frac{1}{r} < 0$ Fortegnsskjema (med x for r):  Denne er oppfylt for $r \in \langle 0, \rightarrow \rangle$

Begge ulikhetene er oppfylt slik at $\underline{S(x) = r \text{ har en løsning for }} \underline{\underline{r \in \langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle}}$

(Kunne også argumentert med at $r = \frac{1}{1-k}$ vil gå mot $\frac{1}{2}$ når k går mot -1 ovenfra, som er den laveste verdien k kan ha, og når k stiger mot 0 blir r større, og når k passerer 0 og blir enda større blir r enda større, og når $k \to 1$ vil $1 - k \to 0$, så da vil $\lim\limits_{k \to 1} \frac{1}{1-k} \to \infty$)

Oppgave 8

$$P(n):\quad \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}\qquad,\quad n\in\{2,3,4,5,\dots\}$$

Sjekker først om formelen stemmer for ett ledd ($n=2$):

Venstre side: $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$ og høyre side: $\frac{2!-1}{2!}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$, de er like, da er $P(2)$ sann.

Så antar jeg at testen stemmer for n, og undersøker om den stemmer for $n+1$ også:

Venstre side: Legger til ett ledd til etter samme formel, og antar at formelen stemmer så jeg kan erstatte leddene fra 2 til n med formelen jeg skal bevise:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{n!\cdot(n+1)}=\frac{(n!-1)(n+1)+n}{n!\,(n+1)}$$
$$=\frac{n!\cdot(n+1)-n-1+n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

Høyre side: Erstatter n med $n+1$ i summeformelen:

$$\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

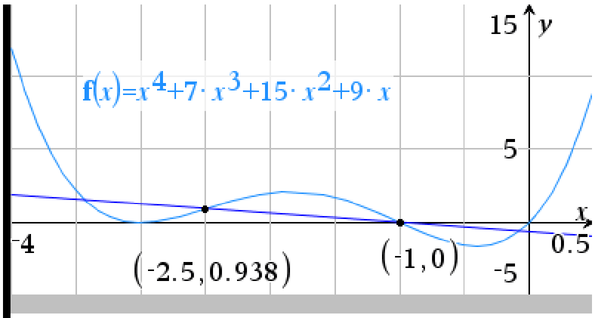
Ser at de to sidene er like for $n+1$ hvis jeg antar at $P(n)$ stemmer, det betyr at siden $P(2)$ stemmer så stemmer $P(2+1)=P(3)$, da stemmer $P(3+1)=P(4)$, osv. for alle $n\in\{2,3,4,5,\dots\}$, så beviset er fullført.

Del 2, løst i TI-nspire (med minimal forklaring):

Oppgave 1

a)

Se til høyre, f(x) defineres samtidig.



b)

$\mathbf{df}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Ferdig*

$\mathbf{ddf}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{df}(x))$ ▸ *Ferdig*

Vendepunkter: $\text{solve}(\mathbf{ddf}(x)=0,x)$ ▸ $x=\frac{-5}{2}$ or $x=-1$

Stigningstall: $\mathbf{a}:=\dfrac{\mathbf{f}(-1)-\mathbf{f}\left(\frac{-5}{2}\right)}{-1-\frac{-5}{2}}$ ▸ $\frac{-5}{8}$

Lager ligninga med ettpunktsformelen:

$\mathbf{g}(x):=\mathbf{a}\cdot x+\mathbf{f}(-1)-\mathbf{a}\cdot -1$ ▸ *Ferdig* $\mathbf{g}(x)$ ▸ $\frac{-5\cdot x}{8}-\frac{5}{8}$

(Linja og vendepunktene vises også i grafen, for å sjekke at det er riktig)

c)

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),x)$

▸ $x=\frac{-(3\cdot\sqrt{5}+7)}{4}$ or $x=\frac{-5}{2}$ or $x=-1$ or $x=\frac{3\cdot\sqrt{5}-7}{4}$

$$\int_{\frac{-(3\cdot\sqrt{5}+7)}{4}}^{\frac{3\cdot\sqrt{5}-7}{4}}(\mathbf{f}(x)-\mathbf{g}(x))\,dx \;▸\; 0$$

Dvs. at arealet av de to områdene der g(x)>f(x) til sammen er like stort som arealet av området der g(x)<f(x).

Oppgave 2

a)

Definerer punktene og vektorene AB og AC:

$\mathbf{a}(t):=[3\;\;2\;\;t]$ ▸ *Ferdig* $\mathbf{b}(t):=[4\;\;-3\;\;3]$ ▸ *Ferdig* $\mathbf{c}(t):=[8\;\;3\;\;5]$ ▸ *Ferdig*

$\mathbf{ab}(t):=\mathbf{b}(t)-\mathbf{a}(t)$ ▸ *Ferdig* $\mathbf{ac}(t):=\mathbf{c}(t)-\mathbf{a}(t)$ ▸ *Ferdig*

Arealet er halvparten av lengden av vektorproduktet:

$\mathbf{f}(t):=\frac{1}{2}\cdot\text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{ab}(t),\mathbf{ac}(t)))$ ▸ *Ferdig* $\mathbf{f}(t)$ ▸ $\sqrt{13\cdot(t^2-8\cdot t+30)}$, **QED**

b)

Finner t−verdien for det laveste arealet: $\text{fMin}(\mathbf{f}(t),t)$ ▸ $t=4$

Finner arealet til den t−verdien: $\mathbf{f}(4)$ ▸ $\sqrt{182}$

Svar: **Det minste arealet til ΔABC er $\sqrt{182}$**

Oppgave 3

$\mathbf{f}(x):=2\cdot \sin\left(\pi\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)+d$ ▸ *Ferdig*

Setter opp volumintegralet og løser for å finne d:

$\text{solve}\left(\pi\cdot \int_{1}^{2}(\mathbf{f}(x))^2\, dx=6\cdot \pi,d\right)$ ▸ $d=-2$ or $d=2$

Svar: **Hvis volumet skal være 6π kan vi ha d=−2 eller d=2**

Oppgave 4

a)

S er ei geometrisk rekke med a1=a og k=k, summen blir: $\mathbf{s}(a,k):=\frac{a}{1-k}$ ▸ *Ferdig*

T er ei geometrisk rekke med a1=a og k=2k, summen blir: $\mathbf{t}(a,k):=\frac{a}{1-2\cdot k}$ ▸ *Ferdig*

Løser ligningssett for summene: $\text{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{s}(a,k)=6\\ \mathbf{t}(a,k)=12\end{cases},\{a,k\}\right)$ ▸ $a=4$ and $k=\frac{1}{3}$

Svar: **Hvis $\mathbf{S}=6$ og $\mathbf{T}=12$ er $a=4$ og $k=\frac{1}{3}$**

b)

$\text{solve}(\mathbf{s}(a,k)=-2\cdot \mathbf{t}(a,k),a,k)$ ▸ $a=\mathbf{c2}$ and $k=\frac{3}{4}$ or $a=0$ and $k=\mathbf{c1}$ and $\mathbf{c1}\neq\frac{1}{2}$ and $\mathbf{c1}\neq 1$

ut fra dette er det slik at hvis $k=\frac{3}{4}$ er $\mathbf{S}=-2\mathbf{T}$ for alle verdier av a≠0.

Men hvis $k=\frac{3}{4}$ så er $2k=\frac{6}{4}>1$, så det er utenfor konvergensområdet til T

Svar: **NEI, det finnes ingen k slik at S=−2T.**

Oppgave 5

a)

Endring er y', den er lik et reduserende ledd som er 30% av mengden y, dvs −0,30y, pluss et økende ledd som er konstant lik 3,0 dvs. +3,0, altså er differensialligninga **y'=−0,30y+3,0**.

Startverdien er 0, dvs. at **y(0)=0.**

b)

Omgjør −0.3 til en brøk for å få en eksakt eksponential:

$\text{deSolve}\left(y'=\frac{-3}{10}\cdot y+3 \text{ and } y(0)=0,t,y\right) ▸ y=10-10\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{10}}$

Svar: **Løsninga på differensialligninga er $y(t):=10-10\cdot e^{-0.3\cdot t}$ ▸ *Ferdig***

c)

$\lim_{t\to\infty}(y(t)) ▸ 10.$

Svar: **Etter at behandlingen har pågått lang tid har pasienten 10mg medisin i kroppen.**

(eventuelt bare se at når t blir stor går $e^{-0.3t}$ mot 0)

(Eventuelt bruk at når mengden stabiliserer seg er $y'=0$, da er $0=-0{,}30y+3{,}0$, løs og finn $y=10$)

d)

Samme ligning som over, men nå er y(6)=9.17:

$\text{deSolve}\left(y'=\frac{-3}{10}\cdot y+3 \text{ and } y(6)=9.17,t,y\right) ▸ y=10.-5.02121\cdot (0.740818)^{t}$

Setter så inn t=0 for å finne startverdien: $10.-5.02121\cdot (0.740818)^{0} ▸ 4.97879$

Svar: **Hun hadde 5,0mg medisin i kroppen ved starten**

(må runde av til 2 siffer fordi det var 2 siffer i 3,0mg),