Matematikk 1T (MAT1013)

Løsningsforslag

Våren 2017

Del 1

Oppgave 1

$$\frac{0.72\cdot 10^8}{60\cdot 10^{-8}} = \frac{0.72\cdot 10^8}{6\cdot 10\cdot 10^{-8}} = \frac{0.72\cdot 10^8}{6\cdot 10^{-7}} = \frac{0.72}{6}\cdot 10^8\cdot 10^7 = 0.12\cdot 10^{8+7} = \underline{\underline{1.2\cdot 10^{14}}}$$

Oppgave 2

$$4^0 + 2^{-3}\cdot (2^3)^2 = 1 + 2^{6+(-3)} = 1 + 2^3 = \underline{\underline{9}}$$

Oppgave 3

$$\sqrt{20} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{\frac{160}{2}} = 3\sqrt{5} - \sqrt{2^4\cdot 5} = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \underline{\underline{-\sqrt{5}}}$$

Oppgave 4

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x + 2 = y \end{bmatrix}$$

Siden $y = x + 2$ setter vi dette inn i den øverste likningen:

$$x^2 + (x+2)^2 = 4 \implies x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4 \implies 2x^2 + 4x = 0 \implies 2x(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = -2$$

Vi får da at $y_1 = x_1 + 2 = 0 + 2 = 2 \ \vee \ y_2 = x_2 + 2 = -2 + 2 = 0$

Løsningene som tilfredstiller likningssystemet er:

$$\underline{\underline{(x_1, y_1) = (0, 2) \ \vee \ (x_2, y_2) = (-2, 0)}}$$

Oppgave 5

$$lg\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) = 0 \implies \cancel{10}^{\cancel{lg}\left(x^2+\frac{3}{4}\right)} = 10^0 \implies x^2 + \frac{3}{4} = 1 \implies x^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\implies x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Siden vi har med en logaritmefunksjon å gjøre, må vi sjekke at ingen av løsningene gir negativt argument til logaritmefunksjonen. Det vil si at vi må sjekke at verken $x = +\frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{1}{2}$ gir negativt argument. Siden argumentet består av $x^2 + \frac{3}{4}$, med da spesielt fokus på x^2-leddet, kan ikke argumentet bli negativt siden $x^2 \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

$$lg\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) = 0 \implies \underline{\underline{x = \pm\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 6

$$\frac{1}{x} + \frac{x-5}{x-1} - \frac{2x-6}{x^2-x} = \frac{1\cdot(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x(x-5)}{x(x-1)} - \frac{2x-6}{x(x-1)} = \frac{(x-1)+x(x-5)-(2x-6)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x-1+x^2-5x-2x+6}{x(x-1)} = \frac{x^2-6x+5}{x(x-1)}$$

Før vi bruker faktoriseringsformelen må vi finne nullpunktene til andregradsuttrykket i telleren. Vi vet at:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6 \tag{1}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5 \tag{2}$$

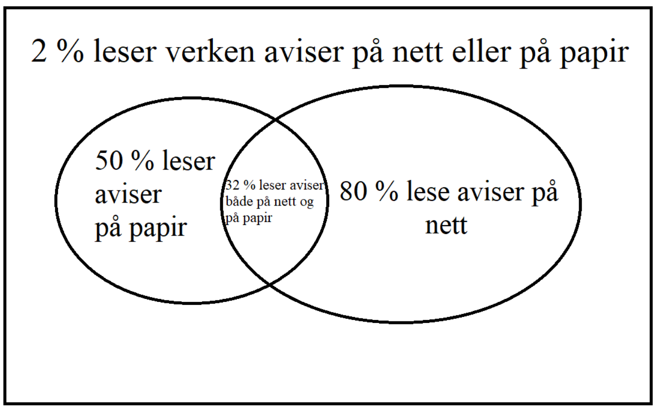
Vi skal altså matche to tall, slik at når vi legger dem sammen blir summen 6, og når vi multipliserer dem blir produktet 5. Det kommer frem av likning (1) og likning (2) at $x_1 = 1 \lor x_2 = 5$

$$\frac{1}{x} + \frac{x-5}{x-1} - \frac{2x-6}{x^2-x} = \frac{x^2-6x+5}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x-5)}{x(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{x\cancel{(x-1)}} = \underline{\underline{\frac{x-5}{x}}}$$

Oppgave 7

a)

Krysstabell	Leser på nett	Leser ikke på nett	Sum
Leser på papir	32	18	50
Leser ikke på papir	48	2	50
Sum	80	20	100



Venndiagram

b) $P(\text{nett} \cap \text{papir}) = 32\,\% = 32 \cdot \dfrac{1}{100} = \underline{\underline{0.32}}$

c) $P(\overline{\text{papir}}|\text{nett}) = \dfrac{P(\text{nett} \cap \overline{\text{papir}})}{P(\text{nett})} = \dfrac{48}{80} = \underline{\underline{0.60}}$

Oppgave 8

Siden trekanten er rettvinklet, vet vi at Pytagoras sitt teorem gjelder. Da er:

$$x^2 = 20^2 + (x-2)^2 \implies x^2 = 20^2 + x^2 - 4x + 4 \implies x^2 - x^2 + 4x = 404 \implies x = \frac{404}{4} = \underline{\underline{101}}$$

Den lengste siden i trekanten, kalt hypotenusen, er $\underline{\underline{101}}$

Oppgave 9

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

a)

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = -8 + 12 + 4 - 3 = 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

b) $f'(x) = 3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 2x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 6x - 2$

$f'(2) = 3 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 2 = 12 - 12 - 2 = \underline{\underline{-2}}$

Oppgave 10

a) $f(x) > 0$ når $\underline{\underline{x > 4}}$

b) $f'(x) > 0$ når $\underline{\underline{x < 1 \;\vee\; x > 3}}$

Oppgave 11

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x_1 + x_2 = 4 \;\wedge\; x_1 x_2 = 3 \implies f(x) = (x-1)(x-3)$ med nullpunktene $\underline{\underline{x_1 = 1 \;\vee\; x_2 = 3}}$

b) Hvordan tegne andregradsfunksjoner på formen: $ax^2 + bx + c$

1. Finn hvor grafen skjærer y-aksen, altså $f(0)$. Og eventuelle nullpunkt, $f(x) = 0$
2. Finn topp- eller bunnpunktet, altså $f'(x) = 0$. $a < 0$ gir toppunkt. $a > 0$ gir bunnpunkt.
3. Finn $f(x_e + 5)$ og $f(x_e - 5)$ som *hjelpepunkt* til å tegne grafen. x_e er x-verdien som tilfredstiller $f'(x) = 0$.

I vårt tilfelle:

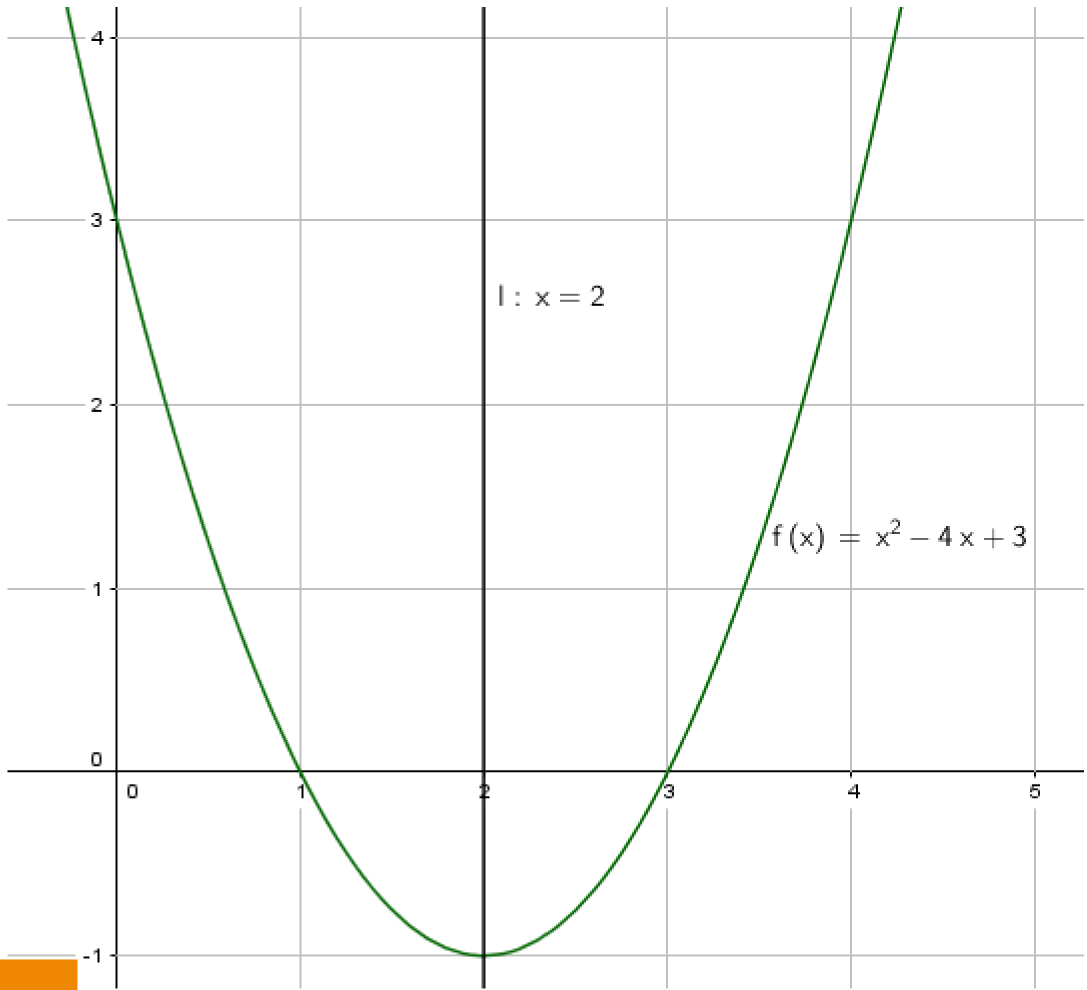
$$f(x) = (x-1)(x-3)$$

$$f(0) = (0-1)(0-3) = 3$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x_e = 2$$

$$f(x_e + 5) = f(7) = (7-1)(7-3) = 24$$

$$f(x_e - 5) = f(-3) = (-3-1)(-3-3) = -24$$



c) $f'(x) = 2x - 4 = 2 \implies x = 3$

Tangentlikning: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$\implies y - f(3) = f'(3)(x-3) \implies y - 0 = 2(x-3) \implies \underline{\underline{y = 2x - 6}}$

d) Legg linjalen i punktet P og inntil grafen til f, og tegn en rett strek.

e) Den andre tangenten går også gjennom punktet $P(2, -2)$, og tangerer punktet like langt fra linjen $l : x = 2$ bare *på andre siden*. Dette gir $x = 1$, og tangenten får likningen:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \implies \underline{\underline{y = -2x + 2}}$$

Oppgave 12

a)

$$\sin(30^\circ) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\text{hosliggemde katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

b) Her bruker vi *arealsetningen* for å finne arealet av $\triangle ABC$.

$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin(30^\circ) = \underline{\underline{2}}$

c) Her bruker vi *cosinussetningen* for å finne lengden av BC.

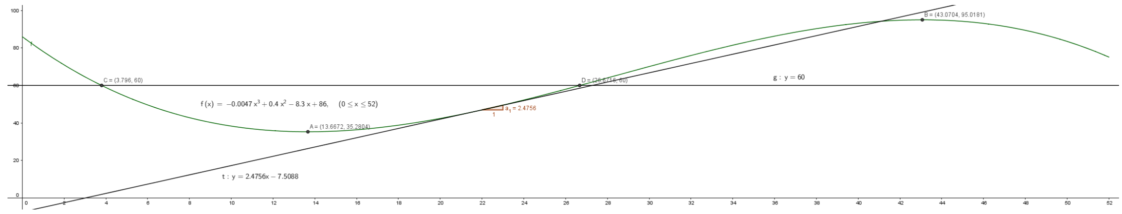
$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle A) \implies BC = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos(30^\circ} = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4(5 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{3}} = \underline{\underline{2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}}$

Del 2

Oppgave 1

Vi observerer at $0 < x \leq 1$ svarer til *første uken* kalt *uke 1*, $1 < x \leq 2$ svarer til *andre uken* kalt *uke 2*, $2 < x \leq 3$ svarer til *tredje uken* kalt *uke 3*, og så videre.

a) Se graftegningen nedenfor.



b) Antall uker fyllingsgraden var mer enn $60\,\%$ er de x-verdier slik at $f(x) > 60 \to 3.8 + (52 - 26.7) = 29.1 \approx 29$.

Fyllingsgraden var mer enn $60\,\%$ i 29 av ukene

c) Som vi ser på punkt A i oppgave a) var fyllingsgraden lavest i uke 14. Da var $35\,\%$ av vannmagasinet fylt.

d) Likningen til tangenten til grafen til f i punktet $(22, f(22))$ er: $y = 2.476x - 7.5$. Stigningstallet forteller at fyllingsgraden økte med 2.476 prosentpoeng i uke 23.

Oppgave 2

Oppgaveopplysningene gir oss følgende to likninger:

$$2v + 3b = 520$$

$$v = b + 40$$

$$\implies 2(b + 40) + 3b = 520$$

$$\implies 2b + 80 + 3b = 520$$

$$\implies b = \frac{440}{5} = 88$$

$$\implies v = 88 + 40 = 128$$

Hva enn en ønsker å si om billettprisvalget til denne kinoen, koster barnebilletten 88 kroner og voksenbilletten 128 kroner

Oppgave 3

a) Bruker *ettpunktsformelen*, og får:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \implies y - 30 = \frac{14 - 30}{17 - 0}(x - 0) \implies \underline{\underline{y = -\frac{16}{17}x + 30}}$$

b) $y = -\frac{16}{17}x + 30 = 5 \implies x = (5 - 30) \cdot \frac{-17}{16} = \frac{425}{16} \approx \underline{\underline{27}}$

Andelen dagligrøykere vil, ifølge modellen, være 5 % i 2027.

Oppgave 4

a) $P(\text{ikke tett kork}) = \dfrac{200 \cdot \frac{2}{5} + 100 \cdot \frac{1}{4}}{300} = \dfrac{105}{300} = \underline{\underline{\dfrac{7}{20} = 0.35}}$

b) $P(\text{lettmelk}|\text{ikke tett kork}) = \dfrac{P(\text{lettmelk} \cap \text{ikke tett kork})}{P(\text{ikke tett kork})} = \dfrac{\frac{\frac{2}{5} \cdot 200}{300}}{\frac{7}{20}} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot 200}{300} \cdot \dfrac{20}{7}$

$= \dfrac{80}{300} \cdot \dfrac{20}{7} = \underline{\underline{\dfrac{16}{21} \approx 0.76}}$

Oppgave 5

CAS

1 Løs[(7s)^2 = (5s)^2 + (3s^2)^2 - 2*(3s^2)*(5s)*cos(60°), s]

$\rightarrow \left\{ s = -1, s = 0, s = \frac{8}{3} \right\}$

Vi forkaster den negative løsningen og den trivielle nullløsningen, slik at: $\underline{\underline{s = \frac{8}{3} \approx 2.67}}$

Oppgave 6

CAS

1	f(x):=x^3-2a*x^2+a^2*x ✓ $f(x) := x^3 - 2\,a\,x^2 + a^2\,x$
2	f'(x) → $a^2 + 3\,x^2 - 4\,a\,x$
3	f(a) → 0
4	f'(a) → $a^2 + 3\,a^2 - 4\,a\,a$
5	Løs[f'(x)=0] → $\left\{x = a, x = \frac{1}{3}\,a\right\}$
6	f(1/3*a) → $\frac{4}{27}\,a^3$

- Grafen til f har et *nullpunkt* i $P(a, 0)$ siden $f(a) = 0$
- Grafen til f har et *stasjonært punkt*, det vil si at $f'(x) = 0$, i $P(a, 0)$ siden $f'(a) = 0$
- Vi observerer at grafen til f har to stasjonære punkt, et i $x = a$ og et i $x = \dfrac{1}{3}a$. Siden $f(\frac{1}{3}a) > 0$ når $a > 0$ vil punktet $P(a, 0) : f(a) = 0$ være et *bunnpunkt*

Oppgave 7

a)

$$(r+R)^2 = R^2 + (x+r)^2, \quad x = 2R - 2r$$

$$(r+R)^2 = R^2 + (2R-r)^2$$

$$r^2 + 2rR + R^2 = R^2 + 4R^2 - 4rR + r^2$$

$$r^2 + 2rR + 4rR - r^2 = R^2 + 4R^2 - R^2$$

$$6rR = 4R^2$$

$$r = \frac{4R^2}{6R}$$

$$r = \frac{2}{3}R$$

b) Arealet av det blå området er: Arealet av kvartsirkelen minus arealet av den lille (hvite) sirkelen minus arealet av den store (hvite) sirkelen: $A_{\text{blå}} = \frac{\pi(2R)^2}{4} - \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{18}R}}$