Løsningsforslag eksamen 1T høsten 2017

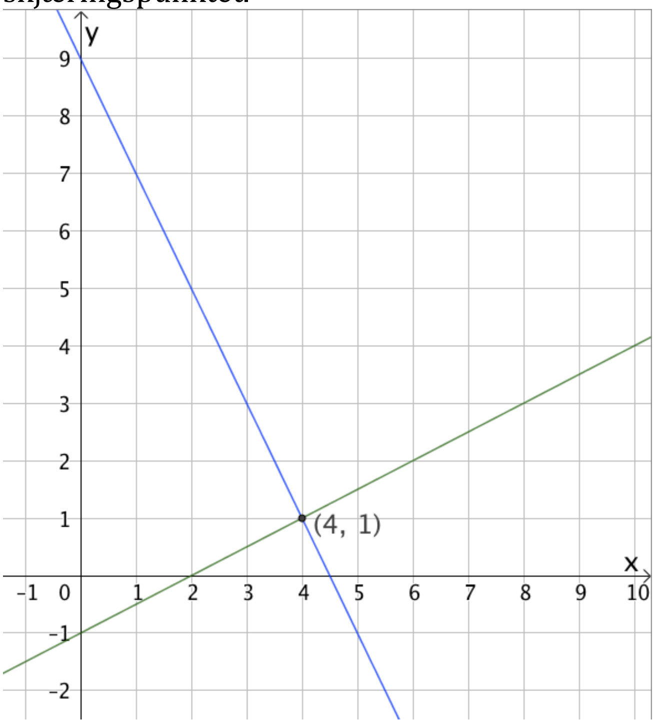
Del 1

Oppgave 1

$$\frac{120\cdot 25000}{0,15}=\frac{12\cdot 10\cdot 2,5\cdot 10^4}{15\cdot 10^{-2}}=\frac{12\cdot 2,5}{15}\cdot 10^{1+4-(-2)}=\underline{\underline{2,0\cdot 10^7}}$$

Oppgave 2

Tegner linjene $y=\frac{1}{2}x-1$ og $y=9-2x$ i samme koordinatsystem og finner skjæringspunktet.



Likningen har løsningen $\underline{\underline{x=4}}$

Oppgave 3

$$x^2-x-12=0$$

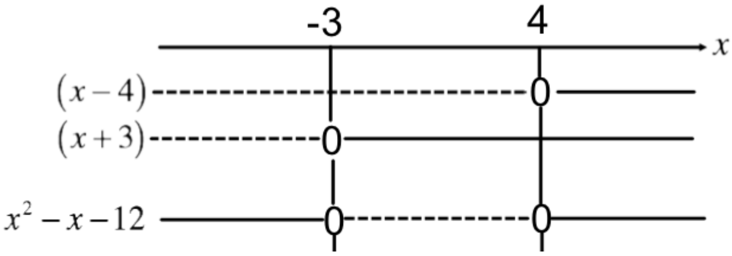
gir

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}\Rightarrow x_1=4\wedge x_2=-3$$

så

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3)$$

Tegner fortegnslinjer



$$\underline{\underline{x^2 - x - 12 \le 0 \text{ når } -3 \le x \le 4}}$$

Oppgave 4

$0 < \sin 73° < 1 \qquad \tan 45° = 1 \qquad \lg 1 = 0 \qquad \lg\left(10^{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{4}$

I stigende rekkefølge:

$$\underline{\underline{\lg\left(10^{-\frac{1}{4}}\right) \qquad \lg 1 \qquad \sin 73° \qquad \tan 45°}}$$

Oppgave 5

$$\lg\left(x + \frac{1}{25}\right) = -2$$

$$10^{\lg\left(x+\frac{1}{25}\right)} = 10^{-2}$$

$$x + \frac{1}{25} = \frac{1}{100}$$

$$x = \frac{1}{100} - \frac{4}{100}$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{3}{100} = -0{,}03}}$$

Oppgave 6

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^3} = \frac{3}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$$

Oppgave 7

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{30}} \cdot 5^{-1} \cdot 10^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{25}}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{10} + \sqrt[3]{8} = \frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{5}{5} + 2 = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 8

Siden *f* er en lineær funksjon, vil stigningstallet være likt i alle punkter på grafen.
Når vi da får vite at $f'(2)=3$, vet vi at stigningstallet er 3.
Vi vet også at punktet (2,4) ligger på grafen til *f*.
Vi kan finne konstantleddet ved å løse følgende likning:

$$3\cdot 2+b=4$$
$$b=4-6$$
$$b=-2$$

$$\underline{\underline{f(x)=3x-2}}$$

Oppgave 9

a) $3x^2-9x=\underline{\underline{3x(x-3)}}$

b)

$$\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{x-3}-\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{x-3}-\frac{2x}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{x(x-3)}{(x-3)(x-2)}+\frac{2x(x-2)}{(x-3)(x-2)}-\frac{2x}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-3x+2x^2-4x-2x}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{3x^2-9x}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{3x(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\underline{\underline{\frac{3x}{x-2}}}$$

Oppgave 10

Definerer hendelsene

A : Eleven går i A-klassen , $\overline{A}$: Eleven går i B-klassen
B : Eleven har valgt biologi , $\overline{B}$: Eleven har ikke valgt biologi

a) $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=75\%$

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt VG2-elev har valgt biologi, er 75 %</u>

NB! Siden vi får vite at det er like mange elever i de to klassene, ville det her vært tilstrekkelig å regne ut $P(B\mid A)+P(B\mid \overline{A})$

b) Informasjonen i oppgaveteksten forteller oss at $\frac{2}{3}$ av elevene i biologiklassen kommer fra A-kassen, mens $\frac{1}{3}$ av elevene i biologiklassen kommer fra B-klassen.

$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at en tilfeldig biologielev i VG2 går i A-klassen er } \frac{2}{3} \approx 66,7\%}}$

Oppgave 11

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$

a)

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1^4 - 2\cdot 1^3 + 2 - \left((-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 + 2\right)}{2} = \frac{1-2+2-1-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

<u>Den gjennomsnittlige vekstfarten til *f* i intervallet [-1 ,1] er -2</u>

b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$,

så den deriverte har nullpunkter $x = 0$ og $x = \frac{3}{2}$

$f'(-1) = 4(-1)^3 - 6(-1)^2 = -4 - 6 = -10$

og

$f(1) = 4\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 = 4 - 6 = -2$

Vi ser at den deriverte ikke skifter fortegn i nullpunktet $x = 0$, så $\left(0, f(0)\right)$ må være et terrassepunkt på grafen til *f*.
Konstantleddet til funksjonsuttrykket til *f* forteller at $f(0) = 2$.

Punktet (0,2) er et terrassepunkt på grafen til *f*, <u>som skulle vises</u>

Oppgave 12

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

a) $f'(x) = \underline{\underline{3x^2 - 12x + 12}}$

b)

$f(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 12\cdot 1 - 8 = 1 - 6 + 12 - 8 = -1$

og

$f'(1) = 3\cdot 1^1 - 12\cdot 1 + 12 = 3$

Nå vet jeg at tangeringspunktet er (1,-1) og at stigningstallet til tangenten er 3. Tangenten har likning $y = ax + b$ og jeg har $a = 3$ og bruker punktet (1, -1) til å finne *b*.

$$3 \cdot 1 + b = -1$$
$$b = -1 - 3$$
$$b = -4$$

Likningen for tangenten til *f* i punktet $\left(1, f(1)\right)$ er $\underline{\underline{y = 3x - 4}}$

Kunne også brukt ettpunktsformelen her

c) For å finne alle mulige tangenter til *f* med stigningstall 3, altså som er parallelle med tangenten fra forrige deloppgave, løser jeg likningen $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = 3$$
$$3x^2 - 12x + 12 = 3$$
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$$
$$3(x-3)(x-1) = 0$$

Likningen $f'(x) = 3$ har altså to løsninger, $x = 1 \vee x = 3$, så
<u>grafen til *f* har én tangent som er parallell med tangenten fra forrige deloppgave</u>

Oppgave 13

Informasjonen i oppgaveteksten forteller meg at ΔABC og ΔDEF er formlike og at forholdet mellom lengdene i ΔABC og ΔDEF er 2:1.

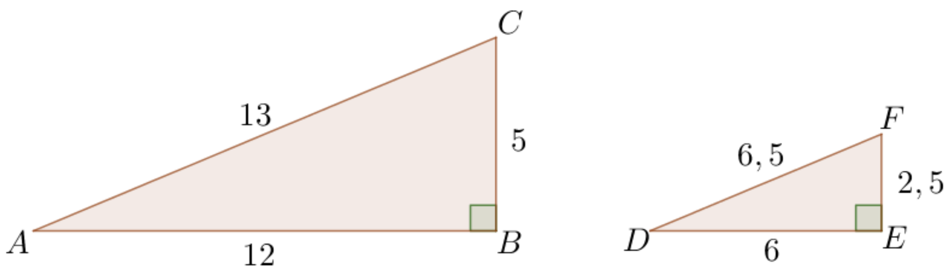
Starter med å tegne en rettvinklet ΔABC med $AB = 12$, $BC = 5$ og $\angle B = 90°$.

Da vet jeg at $\tan A = \dfrac{5}{12}$.

Pythagoras' setning gir $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Tegner så ΔDEF slik at alle sidelengdene er halvparten av de samsvarende sidelengdene i ΔABC og $\angle E = 90°$.

De to trekantene oppgaveteksten beskriver, kan se slik ut:



Oppgave 14

a) Omkretsen av det blå området tilsvarer den samlede omkretsen av to sirkler med radius a.
Omkretsen er da $2\cdot 2\pi a = \underline{\underline{4\pi a}}$

b) Har 6 like kvartsirkler med radius a. Arealet til resten av det blå området er differansen mellom arealet til et rektangel med sidelengder $2a$ og a og en halvsirkel med radius a. Til sammen kan vi da regne ut at arealet er:

$$\frac{6}{4}\cdot \pi a^2 + 2a\cdot a - \frac{1}{2}\cdot \pi a^2 = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} + 2a^2 = \underline{\underline{\pi a^2 + 2a^2 = a^2(\pi + 2)}}$$

Del 2

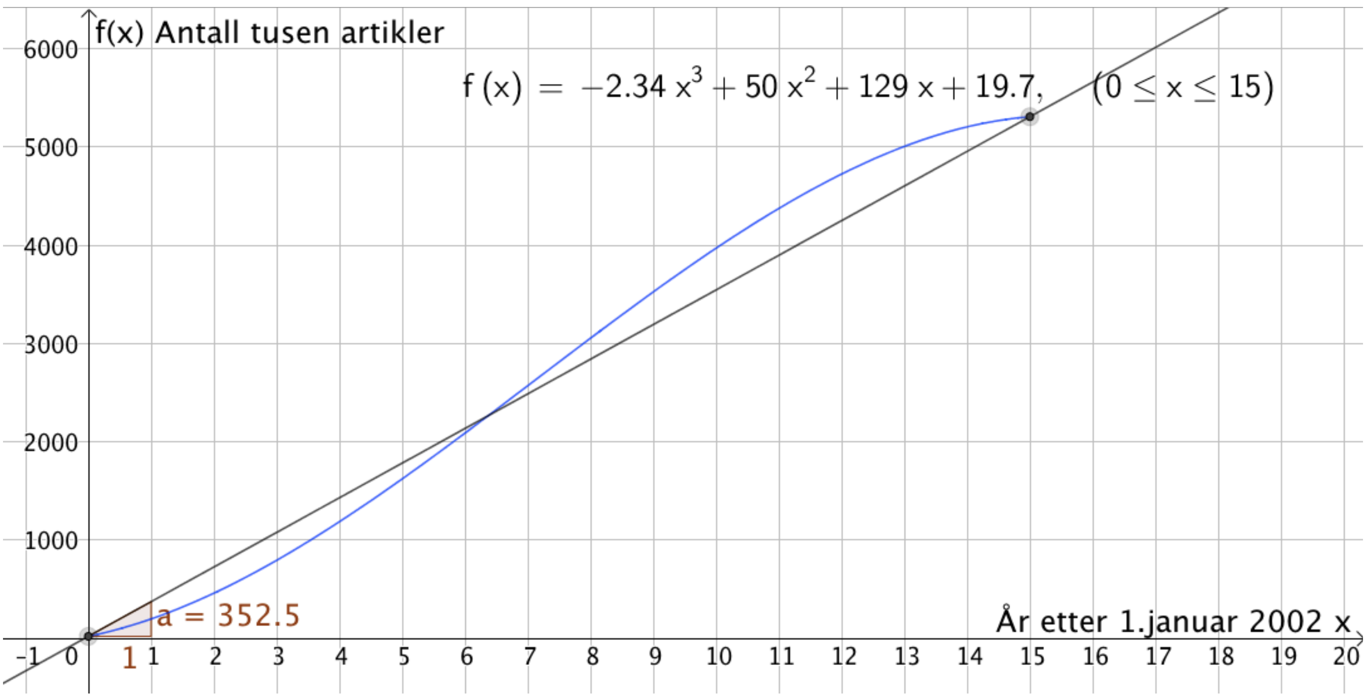
Oppgave 1

$$f(x) = -2{,}34x^3 + 50x^2 + 129x + 19{,}7 \quad , \quad x \in [0,15]$$

a) Bruker kommandoen *" Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og tegner grafen til *f* (se bilde under)

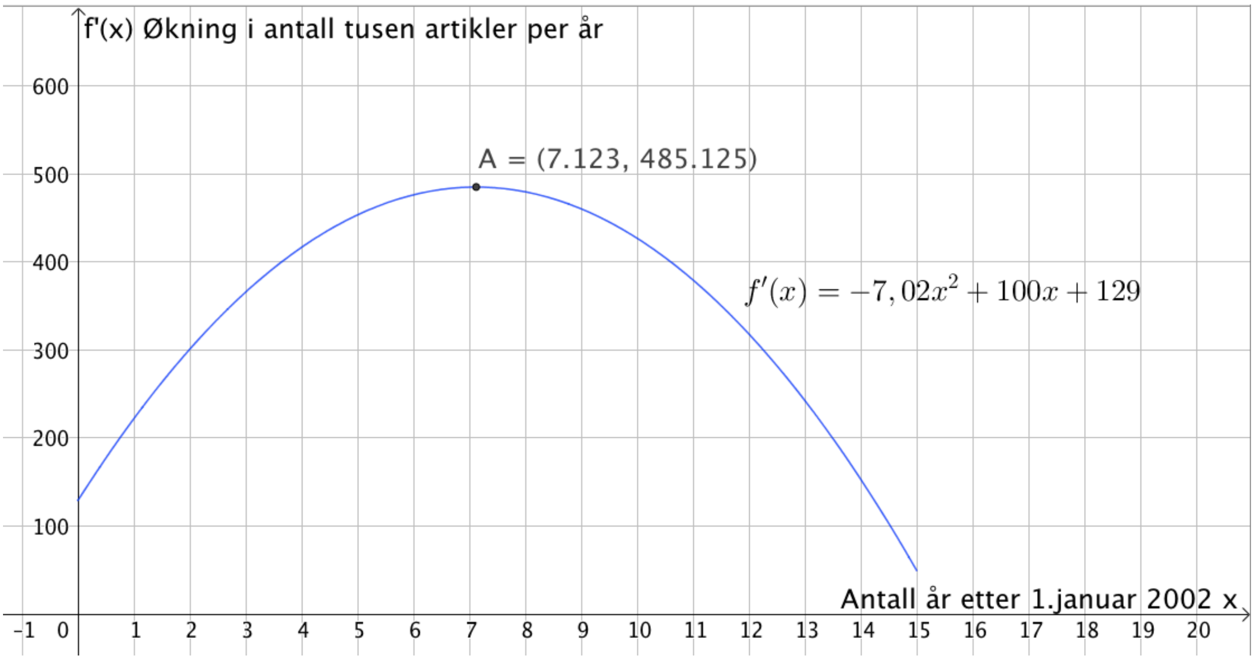
b) Markerer punktene $(0, f(0))$ og $(15, f(15))$ på grafen, tegner linje gjennom disse og finner stigningstallet til linja ved hjelp av knappen "stigning". (se bilde under)

<u>Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet [0,15] er 352 500 artikler per år</u>



c) $f'(x) = -7{,}02x^2 + 100x + 129$
Bruker kommandoen *" Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og tegner grafen til den deriverte innenfor det oppgitte intervallet. (se bilde under)

d) Bruker kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og finner toppunktet A på grafen til den deriverte. (se bilde under)



<u>Grafen til den deriverte har toppunkt (7,12 ,485,13)</u>

Grafen til den deriverte forteller oss at økningen i antallet artikler i den engelske utgaven av Wikipedia vokste fra 2002 til et stykke inn i 2009, før økningen avtok igjen. Toppunktet på grafen forteller at økningen i antall artikler var størst i starten av 2009 (midt i februar). Da var økningen på 485 130 artikler per år.

Oppgave 2

a) Det ligger totalt 12 kuler i esken. Siden 5 av disse er ødelagt, er det 7 kuler som ikke er ødelagt.

$$P(\text{Trekke to kuler som ikke er ødelagt}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \underline{\underline{\frac{7}{22} \approx 31{,}8\%}}$$

b) $P(\text{Trekke minst én ødelagt kule}) = 1 - \frac{7}{22} = \underline{\underline{\frac{15}{22} \approx 68{,}2\%}}$

Oppgave 3

Setter opp et likningssett, som jeg løser i CAS

CAS

1	tan(50°)=h/(100+x) $\rightarrow \tan\left(\frac{5}{18}\pi\right) = \frac{h}{x+100}$
2	tan(36°)=h/(140+100+x) $\rightarrow \sqrt{-2\sqrt{5}+5} = \frac{h}{x+240}$
3	{$1, $2},{h=1,x=1} NLøs: $\{h = 260.571, x = 118.645\}$

<u>Fjellet er 261 meter høyt</u>

(Avstandene i oppgaveteksten er oppgitt i hele meter, så gjør det samme i svaret mitt)

Oppgave 4

a)

CAS

1	Finner lengden av linjestykket BD
2	(BD)²=12²+(8*sqrt(3))²−2*12*8*sqrt(3)*cos(30°) Løs: $\left\{BD = -4\sqrt{3}, BD = 4\sqrt{3}\right\}$
3	BD:=HøyreSide($2,2) $\rightarrow BD := 4\sqrt{3}$
4	Videre finner jeg lengden av AD
5	(BD)²=8²+(AD)²−2*8*AD*cos(60°) Løs: $\{AD = 4\}$
6	Legger sammen lengdene av de fire sidene i firkant ABCD
7	8+12+8*sqrt(3)+4 $\rightarrow \sqrt{3}\cdot 8 + 24$

$$\underline{\underline{\text{Den eksakte omkretsen av firkant ABCD er } 24+8\sqrt{3}}}$$

b)

CAS

1	Bruker arealsetningen
2	(4*8*sin(60°))/2+(12*8*sqrt(3)*sin(30°))/2 ✓ $\frac{4\cdot 8\ \sin(60°)}{2} + \frac{12\cdot 8\sqrt{3}\ \sin(30°)}{2}$
3	(4 (8) sin(60°)) / 2 + (12 (8) sqrt(3) sin(30°)) / 2 $\rightarrow \sqrt{3}\cdot 32$

$$\underline{\underline{\text{Det eksakte arealet av firkant ABCD er } 32\sqrt{3}}}$$

Oppgave 5

$f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

a) Funksjonen *f* er en andregradsfunksjon med positiv andregradskoeffisient. Da vet vi at grafen til *f* er en parabel som vender den hule siden opp. Dette betyr at grafen til *f* har et bunnpunkt, som skulle forklares.

Finner bunnpunktet ved hjelp av CAS:

CAS	
1	f(x):=2x²-7x+3 $\rightarrow\ f(x) := 2x^2 - 7x + 3$
2	Ekstremalpunkt(f) $\rightarrow\ \left\{\left(\frac{7}{4}, -\frac{25}{8}\right)\right\}$

Bunnpunktet på grafen til f har koordinatene $\left(\frac{7}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

b)

CAS	
1	g(x):=a*x²+b*x+c $\rightarrow\ g(x) := a x^2 + b x + c$
2	Finner x-koordinaten til bunnpunktet
3	Løs(g'(x)=0) $\rightarrow\ \left\{x = -\frac{b}{2a}\right\}$
4	Setter inn i funksjonsuttrykket til g
5	g(HøyreSide($3)) $\rightarrow\ \left\{\frac{4ac - b^2}{4a}\right\}$

Bunnpunktet på grafen til *g* har koordinater $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$, som skulle vises c)

CAS	
1	g(x):=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ \mathbf{g(x)\ :=\ a\,x^2 + b\,x + c}$
2	S:=(s,g(s)) $\rightarrow\ \mathbf{S\ :=\ \left(s, a\,s^2 + b\,s + c\right)}$
3	T:=(t,g(t)) $\rightarrow\ \mathbf{T\ :=\ \left(t, a\,t^2 + b\,t + c\right)}$
4	Tangent(S, g) $\rightarrow\ \mathbf{y = -a\,s^2 + 2\,a\,s\,x + b\,x + c}$
5	Tangent(T, g) $\rightarrow\ \mathbf{y = -a\,t^2 + 2\,a\,t\,x + b\,x + c}$
6	Løs(HøyreSide($4) = HøyreSide($5)) $\rightarrow\ \left\{\mathbf{x = \frac{1}{2}\,s + \frac{1}{2}\,t}\right\}$

For ordens skyld kan jeg vise at denne *x*-koordinaten ligger midt mellom *s* og *t*

7	HøyreSide($6) $\rightarrow\ \left\{\mathbf{\frac{1}{2}\,s + \frac{1}{2}\,t}\right\}$
8	{1 / 2 s + 1 / 2 t} Faktoriser: $\left\{\mathbf{\frac{s+t}{2}}\right\}$

x-koordinaten til punktet *P* ligger midt mellom *s* og *t*, <u>som skulle vises</u>