Eksamen R2 Høst 2017 - Løsning

Dennis Christensen

27. november 2017

Del 1 - Uten Hjelpemidler

Oppgave 1

(a)

$$f'(x) = 2 \cdot 3\cos 3x = 6\cos 3x,$$

(b)

$$g'(x) = \frac{x\cos x - 1 \cdot \sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

(c)

$$h'(x) = 1 \cdot \cos x^2 + x\left(-2x\sin x^2\right) = \cos x^2 - 2x^2\sin x^2.$$

Oppgave 2

(a)

$$\int \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C,\ C \in \mathbb{R},$$

(b) La $u = x$, $v' = e^{2x}$. Delvis integrajon gir

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx + C = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R},$$

(c) La $u = x^2 + 1$. Da er $du = 2xdx$, så

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 3

(a)

$$2\sin(2x) - 1 = 0$$
$$2\sin(2x) = 1$$
$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{N} \text{ slik at } x \in [0, 2\pi] \text{ eller } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \text{ slik at } x \in [0, 2\pi],$$

$$x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{5\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}, x = \frac{17\pi}{12}.$$

(b)

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

ABC-formelen gir

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4},$$

så $\cos x = -2$ eller $\cos x = \frac{1}{2}$. Ettersom $\cos x \in [-1, 1]$ har $\cos x = 2$ ingen løsning. Fra enhetssirkelen har $\cos x = \frac{1}{2}$ løsningene

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

for $x \in [0, 2\pi]$, så dette er løsningene til den originale likningen.

Oppgave 4

(a) Toppunktene er nådd når

$$\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

altså når

$$\begin{aligned} \pi x - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \text{ slik at } x \in (-1, 5) \\ \pi x &= \pi + 2\pi n \\ x &= 2n + 1 \\ x &= 1, x = 3. \end{aligned}$$

Dermed er toppunktene $(1, 5)$ og $(3, 5)$.

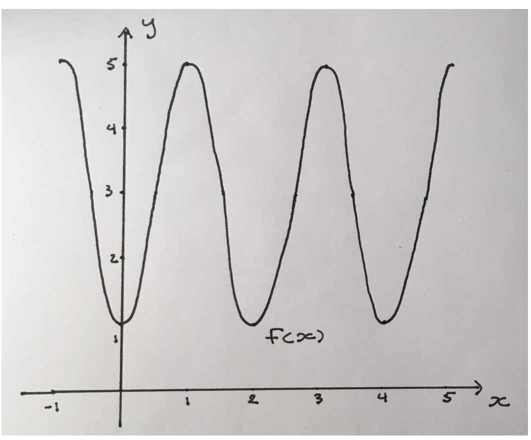
Bunnpunktene er nådd når

$$\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

altså når

$$\begin{aligned} \pi x - \frac{\pi}{2} &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N} \text{ slik at } x \in (-1, 5) \\ \pi x &= 2\pi n \\ x &= 2n \\ x &= 0, x = 2, x = 4. \end{aligned}$$

(b)



(c)

$$\begin{aligned}
\text{Areal} &= \int_0^4 \left[2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\right] dx \\
&= 2\int_0^4 \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) dx + 3(4-0) \\
&= 2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^4 + 12 \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 12 \\
&= \frac{2}{\pi}(0-0) + 12 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Oppgave 5

(a)

$$\vec{AB} = [3-1, 2-0, -1-3] = [2, 2, -4],$$

$$\vec{AC} = [0-1, 4-0, 4-3] = [-1, 4, 1],$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = [2\cdot 1 - (-4)4, (-4)(-1) - 2\cdot 1, 2\cdot 4 - 2(-1)] = [18, 2, 10].$$

(b) Ettersom

$$9\cdot 1 + 0 + 5\cdot 3 = 9 + 15 = 24,$$

$$9\cdot 3 + 2 + 5(-1) = 27 + 2 - 5 = 24,$$

$$9\cdot 0 + 4 + 5\cdot 4 = 4 + 20 = 24,$$

ligger punktene A, B, C i planet α.

(c) Ettersom $A, B, C \in \alpha$ står vektoren $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{AB} \times \vec{AC} = [9, 1, 5]$ normalt på planet α, så vi kan bruke $\vec{n}$ som retningsvektor for linja l. Ettersom l går gjennom punktet $T = (11, 7, 5)$ har vi en parameterfremstilling gitt ved

$$l : \begin{cases} x = 11 + 9t \\ y = 7 + t \\ z = 5 + 5t. \end{cases}$$

Vi substituerer dette inn i likningen for α for å løse for t:

$$9(11 + 9t) + (7 + t) + 5(5 + 5t) = 24$$

$$107t = -107$$

$$t = -1.$$

På parameterfremstillingen for l gir denne verdien for t skjæringspunktet $(2, 6, 0)$.

(d) Vi har at $\vec{AT} = [10, 7, 2]$, så

$$\begin{aligned}
\text{Volum} &= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 10 & 7 & 2 \end{vmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{6}|2(4 \cdot 2 - 1 \cdot 7) - 2\left((-1)2 - 1 \cdot 10\right) - 4\left((-1)7 - 4 \cdot 10\right)| \\
&= \frac{1}{6}|2 + 24 + 188| \\
&= \frac{1}{6} \cdot 214 \\
&= \frac{107}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6

Vi undersøker likningens karakteristiske polynom:

$$r^2 - 9r - 10 = 0$$

$$(r - 10)(r + 1) = 0,$$

så vi vet at den generelle løsningen er på formen

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{10x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Initialbetingelsene gir

$$4 = y(0) = C_1 + C_2,$$

$$7 = y'(0) = 10C_2 - C_1.$$

Vi adderer likningene for å eliminere C_1 og får da $C_2 = \frac{11}{11} = 1$. Dermed er $C_1 = 3$, så løsningen er gitt ved

$$y(x) = 3e^{-x} + e^{10x}.$$

Oppgave 7

(a) Fra formelen for summen av en aritmetisk rekke har vi at

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 3n - 2)}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2},$$

hvilket skulle vises.

(b)

Basistilfellet $n = 1$:

$$S_1 = 1 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2}\ \checkmark$$

Induksjon: Anta at formelen gjelder for $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\
&= \frac{3n^2 - n}{2} + 3(n+1) - 2 \\
&= \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{2(3n+1)}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \\
&= \frac{(3n^2 + 6n + 3) - (n+1)}{2} \\
&= \frac{3(n^2 + 2n + 1) - (n+1)}{2} \\
&= \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2},
\end{aligned}$$

så påstanden gjelder for $n+1$ og er derfor bevist å gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Del 2 - Med Hjelpemidler

Oppgave 1

La L_n være lengden (i cm) som stolpen blir slått ned i jorda under slag nummer n. Vi vet at $L_1 = 12$ og at $L_{n+1} = 0,94 L_n$. Vi lar S_n være den totale lengden (i cm) som stolpen er slått ned i jorda etter n slag, altså,

$$S_n = L_1 + \cdots + L_n = 12 + 12 \cdot 0,94 + \cdots + 12 \cdot 0,94^{n-1}.$$

Fra formelen for en endelig, geometrisk rekke har vi at

$$S_n = \frac{12(1-0,94^n)}{1-0,94} = 200(1-0,94^n).$$

(a)

$$\begin{aligned} 200(1-0,94^n) &\geq 100 \\ 1-0,94^n &\geq \frac{1}{2} \\ 0,94^n &\leq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \ln 0,94^n &\leq \ln \frac{1}{2} \\ n \ln 0,94 &\leq \ln \frac{1}{2} \\ n &\geq \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0,94} = 11,2023\ldots, \end{aligned}$$

hvor det siste ulikhetstegnet er snudd ettersom $0,94 < 1$, så $\ln 0,94 < 0$. Fra dette ser vi at det må slås minst 12 slag for å slå stolpen mer enn 1 meter ned i jorda.

(b) Ettersom

$$S_n = 200(1-0,94^n) = 200 - 200 \cdot 0,94^n < 200,$$

ser vi at stolpen ikke kan slås 2 meter ned i bakken. Især ser vi at stolpen ikke kan slås $2,2$ meter ned i bakken.

Oppgave 2

(a) Vi kan bruke

$$\frac{1}{6}\vec{BA} = \frac{1}{6}[6, 18, 24] = [1, 3, 4]$$

som retningsvektor og $A = (7, 12, 12)$ som punkt på linja. Derav parameterfremstillingen

$$l : \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 12 + 3t \\ z = 12 + 4t. \end{cases}$$

(b) Kuleflaten K er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 = 25.$$

Substituerer vi uttrykkene for x, y, z i parameterfremstillingen for l inn i kulelikninga for K får vi

$$(7+t)^2 + (12+3t)^2 + (12+4t)^2 = 25$$
$$49 + 14t + t^2 + 144 + 72t + 9t^2 + 144 + 96t + 16t^2 - 25 = 0$$
$$26t^2 + 182t + 312 = 0$$
$$t^2 + 7t + 12 = 0.$$
$$(t+3)(t+4) = 0,$$

som gir oss løsningene $t = -3$ og $t = -4$. Substituerer vi dette inn i parameterfremstillingen for l finner vi skjæringspunktene $(4, 3, 0)$ og $(3, 0, -4)$.

(c) La β, γ være planene vi ønsker å finne. Vi vet at α, β, γ er parallelle, så vi kan bruke normalvektoren $[3, -4, 0]$ for α som normalvektor for β, γ. Dermed kan både β og γ beskrives med en likning på formen

$$4x - 3y + A = 0,$$

for en passende $A \in \mathbb{R}$. Nå, at β, γ skal tangere kuleflaten K er ekvivalent med at avstand(β,origo) = avstand(γ,origo) = 5. Vi bruker formelen for avstand mellom plan og punkt for å sette avstanden mellom planet beskrevet med likningen ovenfor, og origo, lik 5:

$$5 = |\frac{4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + A}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}}|$$
$$5 = \frac{|A|}{5}$$
$$|A| = 25$$
$$A = \pm 25.$$

Dermed er planene β, γ bestemt ved likningene

$$\beta: \; 4x - 3y - 25 = 0,$$
$$\gamma: \; 4x - 3y + 25 = 0.$$

Oppgave 3

(a) Ettersom bestanden av ørret avtar med $3,0\%$ per år, har vi at

$$\begin{aligned} y'(t) &= \text{endring i ørretbestanden etter } t \text{ år etter starten av 2018} \\ &= -0,03(\text{ørretbestanden } t \text{ år etter 2018}) \\ &= -0,03y(t). \end{aligned}$$

og at

$$\begin{aligned} y(0) &= \text{ørretbestanden i vannet 0 år etter starten av 2018} \\ &= \text{ørretbestanden i vannet i starten av 2018} \\ &= 10,000, \end{aligned}$$

hvilket skulle vises.

(b)

$$y' = -0,03y$$
$$y' + 0,03y = 0$$
$$y'e^{0,03t} + 0,03ye^{0,03t} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(ye^{0,03t}\right) = 0$$
$$ye^{0,03t} = C,\ C \in \mathbb{R}$$
$$y = Ce^{-0,03t}.$$

Initialbetingelsen gir

$$10,000 = y(0) = C,$$

så

$$y(t) = 10,000e^{-0,03t}.$$

$$y(10) = 10,000e^{-0,03\cdot 10} \approx 7,408,$$

så det vil være omtrent $7,408$ ørreter i vannet i 2028.

NB! Opplysningene som ble gitt til oppgave (c) og (d) er forskjellige i bokmåls- og nynorskutgaven av oppgaveteksten. Vi løser begge versjonene separat:

Nynorsk

(c) La k være antall ørret som må settes ut hvert år for å nå målet. Endringen y' av antall ørret i vannet er da gitt ved

$$y' = -0,03y + k,$$

ettersom tilsettingen er kontinuerlig og konstant. Videre har vi initialbetingelsene

$$y(0) = 10,000,$$

ettersom utsettingen starter tidlig i 2018 (så initialbetingelsen fra (a) arves), og

$$y(10) = 15,000,$$

ettersom 2028 er 10 år frem i tid fra 2018.

(d) Vi løser differensiallikningen fra (c):

$$y' = -0,03y + k$$
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{0,03t}\right) = ke^{0,03t}$$
$$ye^{0,03t} = \frac{100}{3}ke^{0,03t} + C,\ C \in \mathbb{R}$$
$$y = Ce^{-0,03t} + \frac{100}{3}k.$$

Den første initialbetingelsen gir

$$10,000 = y(0) = C + \frac{100}{3}k,$$

så $C = 10,000 - \frac{100}{3}k$.

$$\therefore\ y = \left[10,000 - \frac{100}{3}k\right] e^{-0,03t} + \frac{100}{3}k.$$

Den andre initialbetingelsen gir

$$15,000 = y(10) = \left[10,000 - \frac{100}{3}k\right] e^{-0,03 \cdot 10} + \frac{100}{3}k$$

$$\left(1 - e^{-0,3}\right) \frac{100}{3}k = 15,000 - 10,000e^{-0,3}$$

$$k = \frac{3\left(15,000 - 10,000e^{-0,3}\right)}{100\left(1 - e^{-0,3}\right)} \approx 879,$$

så det må utsettes 879 fisk for å nå målet.

Bokmål

(c) La k være antall ørret som må settes ut hvert år for å nå målet. Endringen y' av antall ørret i vannet er da gitt ved

$$y' = -0,03y + k,$$

ettersom tilsettingen er kontinuerlig og konstant. Videre har vi initialbetingelsene

$$y(0) = 10,000,$$

ettersom utsettingen starter tidlig i 2018 (så initialbetingelsen fra (a) arves), og

$$y(9) = 15,000,$$

ettersom 2027 er 9 år frem i tid fra 2018.

(d) Vi løser differensiallikningen fra (c):

$$y' = -0,03y + k$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{0,03t}\right) = ke^{0,03t}$$

$$ye^{0,03t} = \frac{100}{3}ke^{0,03t} + C,\ \ C \in \mathbb{R}$$

$$y = Ce^{-0,03t} + \frac{100}{3}k.$$

Den første initialbetingelsen gir

$$10,000 = y(0) = C + \frac{100}{3}k,$$

så $C = 10,000 - \frac{100}{3}k$.

$$\therefore\ y = \left[10,000 - \frac{100}{3}k\right] e^{-0,03t} + \frac{100}{3}k.$$

Den andre initialbetingelsen gir

$$15,000 = y(9) = \left[10,000 - \frac{100}{3}k\right] e^{-0{,}03\cdot 9} + \frac{100}{3}k$$

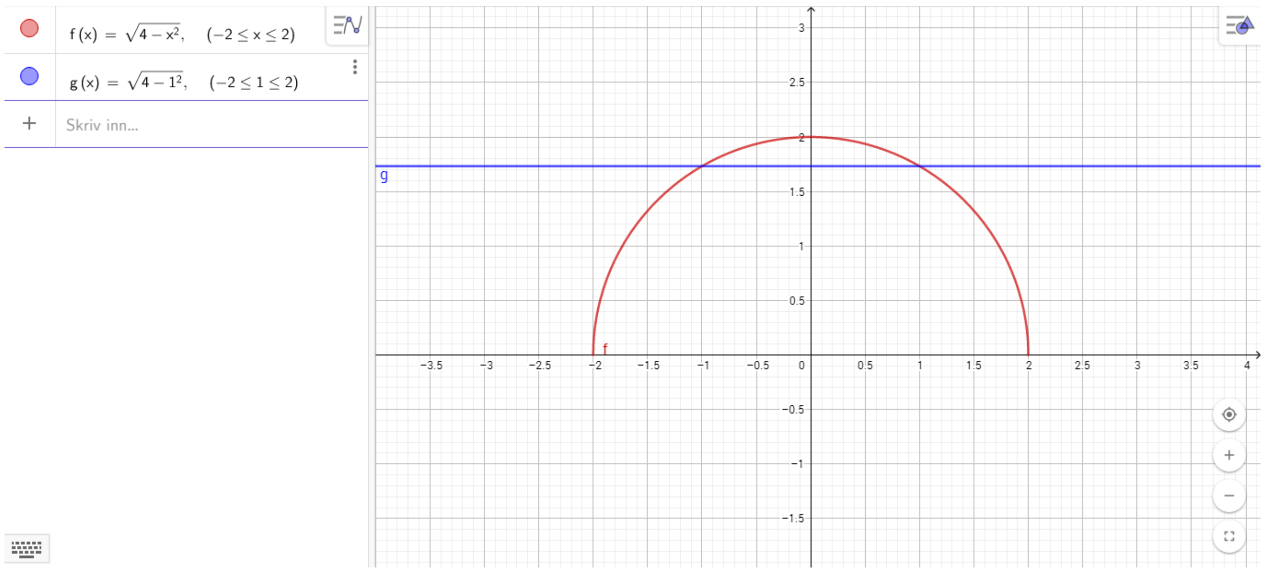
$$\left(1 - e^{-0{,}03\cdot 9}\right) \frac{100}{3}k = 15,000 - 10,000e^{-0{,}03\cdot 9}$$

$$k = \frac{3\left(15,000 - 10,000e^{-0{,}03\cdot 9}\right)}{100\left(1 - e^{-0{,}03\cdot 9}\right)} \approx 934,$$

så det må utsettes 934 fisk for å nå målet.

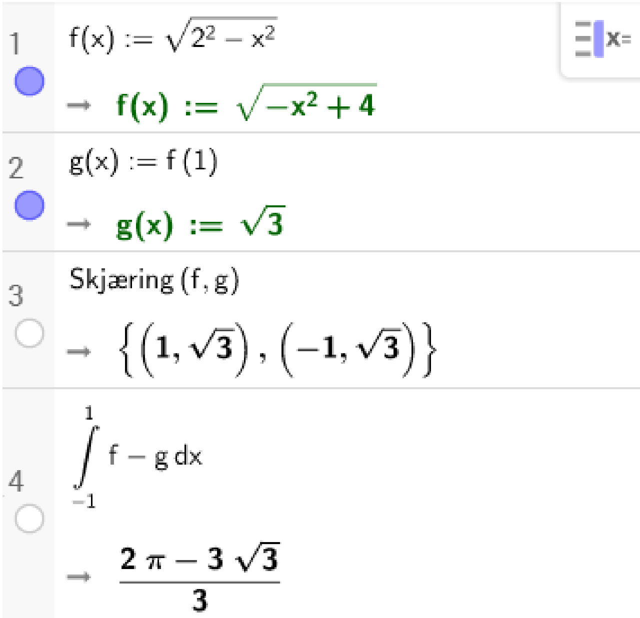
Oppgave 4

(a) For å spesifisere f sin definisjonsmengde bruker vi funksjonen Funksjon(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>). Vi skriver altså inn Funksjon($\sqrt{2^2 - x^2}$, -2, 2). Videre definerer vi g(x) = f(1) i neste linje.



(b) Vi definerer først funksjonene f(x) := $\sqrt{2^2 - x^2}$ og g(x) := f(1). Fra grafene til f og g ser vi at for å finne arealet må vi integrere $f - g$ mellom deres skjæringspunkter. Vi bruker funksjonen Skjæring(<Funksjon>,<Funksjon>) for å finne integrasjonsgrensene. Altså skriver vi inn Skjæring(f,g) og får integrasjonsgrensene $x = -1$ og $x = 1$. Vi bruker nå funksjonen Integral(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>) for å finne arealet: Vi skriver inn Integral(f-g,-1,1) og får svaret:

$$\text{Areal} = \frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{3}.$$

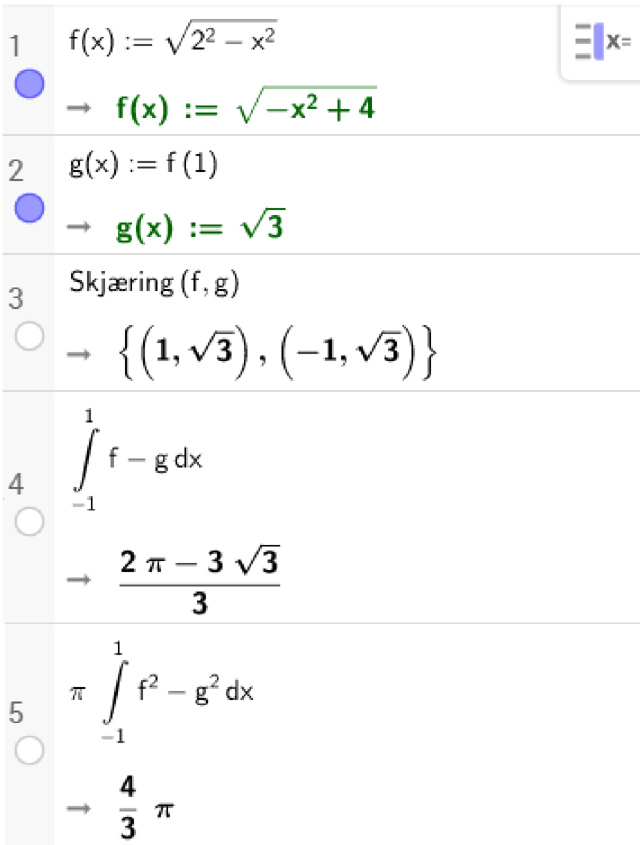


(c) Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\text{Volum} = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} g(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx,$$

så vi bruker funksjonen `Integral(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>)`. Vi skriver inn $\pi\cdot$ `Integral(f`^{2}`-g`^{2}`,-1,1)` og får svaret:

$$\text{Volum} = \frac{4}{3}\pi.$$



(d) Vi definerer først F(x):=$\sqrt{r^2 - x^2}$ og G(x) = F(1). Volumet av omdreiningslegemet er dermed gitt ved

$$\text{Volum} = \pi \int_{-1}^{1} \left(F(x)^2 - G(x)^2\right) dx.$$

Vi integrerer med hensyn på x med funksjonen
Integral(<Funksjon>,<Variabel>,<Start>,<Slutt>), så analogt til (c) skriver vi inn $\pi\cdot$ Integral(F^2 - G^2,x,-1,1) og får svaret

$$\text{Volum} = \frac{4}{3}\pi,$$

hvilket er uavhengig av r.