Løsningsforslag eksamen S1 høsten 2017

Del 1

Oppgave 1

a)

$$x^2+2x-8=0$$

$$gir$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=-1\pm 3$$

$$så$$

$$\underline{\underline{x=-4 \vee x=2}}$$

b)

$$\frac{5x-1}{2}+\frac{2x-5}{3}=1 \quad |\cdot 6$$

$$3(5x-1)+2(2x-5)=6$$

$$15x-3+4x-10=6$$

$$19x=6+3+10$$

$$x=\frac{19}{19}$$

$$\underline{\underline{x=1}}$$

c)

$$\lg\left(x^2\right)+2=4$$

$$\lg\left(x^2\right)=4-2$$

$$10^{\lg\left(x^2\right)}=10^2$$

$$x^2=100$$

$$x=\pm\sqrt{100}$$

$$\underline{\underline{x=-10 \vee x=10}}$$

Oppgave 2

a) $\dfrac{2a^7\left(a^{-1}b^2\right)^3}{(2ab)^2}=\dfrac{2a^7\cdot a^{-3}\cdot b^6}{2^2\cdot a^2\cdot b^2}=\dfrac{a^{7-3-2}\cdot b^{6-2}}{2}=\underline{\underline{\dfrac{a^2b^4}{2}}}$

b) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1\cdot(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x-x-1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\underline{\underline{\dfrac{1}{x+1}}}$

c) $4\lg(2x)-\lg\left(x^2\right)-2\lg\left(\dfrac{x}{2}\right)=4\lg 2+4\lg x-2\lg x-2\lg x+2\lg 2=\underline{\underline{6\lg 2}}$

Oppgave 3

$$\begin{bmatrix} x^2+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{bmatrix} \Rightarrow x^2+2(4-2x)=5$$

$$\begin{aligned} &\textit{gir}\\ x^2+8-4x&=5\\ x^2-4x+3&=0\\ (x-1)(x-3)&=0\\ &\textit{så}\\ &x=1 \vee x=3\\ &\textit{og}\\ &y=4-2\cdot 1 \vee y=4-2\cdot 3\\ &y=2 \vee y=-2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x=1 \wedge y=2 \vee x=3 \wedge y=-2}}$$

Oppgave 4

$$\begin{aligned} x^2+2x&\geq 3\\ x^2+2x-3&\geq 0\\ (x-1)(x+3)&\geq 0 \end{aligned}$$

Grafen til x^2+2x-3 er en parabel som vender den hule siden opp og har nullpunkter $x=-3$ og $x=1$. Siden grafen vender den hule siden opp, har vi $x^2+2x-3\geq 0$ når $x\leq -3$ og når $x\geq 1$.

$$\underline{\underline{x^2+2x\geq 3 \text{ når } x\in\langle\leftarrow,-3]\cup[1,\rightarrow\rangle}}$$

Oppgave 5

Hjemmelaget sine supportere har kjøpt $\frac{4}{5}$ av de 1400 solgte billettene.

$$\frac{4}{5}\cdot 1400 = 4\cdot 280 = 1120$$

<u>1120 billetter ble solgt til hjemmelagets supportere</u>

Oppgave 6

a) Vi har et *ordnet* utvalg *med* tilbakelegging.
Vi skal gjennomføre 4 valg med 10 alternativer i hvert valg.

$$10^4 = 10000$$

<u>Det finnes 10 000 ulike koder for nøkkelbokser av denne typen</u>

b) Vi har et *uordnet* utvalg *uten* tilbakelegging.

$$\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10}{2}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{7}{1} = 5\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 210$$

<u>Det finnes 210 mulige koder for nøkkelbokser av denne typen</u>

c) Binomialkoeffisienten er gitt ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vi har $n = 10$ og skal finne den k som gjør at binomialkoeffisienten blir størst mulig.

Da må nevneren i brøken $\frac{10!}{k!(10-k)!}$ være så liten som mulig.

Vi kan se at $k = 10$ og $k = 0$ gir samme nevner

$0!(10-0)! = 1\cdot 10! = 10!$ og $10!(10-10)! = 10!\cdot 0! = 10!\cdot 1 = 10!$

Vi kan se at $k = 1$ og $k = 9$ gir samme nevner

$1!(10-1!) = 1!\cdot 9! = 9!$ og $9!(10-9!) = 9!\cdot 1! = 9!$

Vi kan se at $k = 2$ og $k = 8$ gir samme nevner

$2!(10-2!) = 2!\cdot 8!$ og $8!(10-8!) = 8!\cdot 2!$

Vi ser at verdiene til nevneren er symmetriske om en k-verdi og minker når vi beveger oss inn mot midten av intervallet [0,10]. Verdien i midten er $k = 5$, så det er denne som vil gi den minste nevneren i brøken over.

$$\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10}{5}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2} = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 3 = 252$$

For at antallet mulige koder skal bli størst, må vi velge 5 tall til koden.
Da er det 252 muligheter

Her hadde det kanskje vært like enkelt å regne ut for alle mulige k-verdier, men her valgte en litt annerledes tilnærming (en slags optimering).

Oppgave 7

Vi kan sette opp disse tre ulikhetene:

$$x + y \geq 1000$$

$$x \geq 800$$

$$\frac{y}{x+y} \leq 0,40$$

Oppgave 8

a) Siden lengden, *y*, kan være inntil 90 cm, har vi ulikheten $0 < y \leq 90$
(Lengden kan ikke være lik 0, for da har vi ikke lenger noe rør)
Siden dobbel diameter tilsvarer 4 ganger radius, og at lengde + dobbeldiameter ikke kan overstige 104 cm, har vi ulikheten $4x + y \leq 104$

b) Siden vi har $y > 0$, må vi ha $4x < 104$, som gir:

$$4x < 104$$

$$x < \frac{104}{4}$$

$$x < 26$$

Som skulle begrunnes

c) Volum av sylinder er gitt ved $V = G \cdot h$, der *G* er arealet av grunnflateten og *h* er høyden (i vårt tilfelle er *h* lengden av røret).
I vår situasjon har vi $G = \pi \cdot x^2$ og $h = 104 - 4x$.
Dette gir:
$V(x) = \pi \cdot x^2 (104 - 4x) = 104\pi x^2 - 4\pi x^3$, som skulle vises

d)

$$V'(x) = 208\pi x - 12\pi x^2 = -4\pi(3x^2 - 52x)$$

og

$$V'(x) = 0$$

gir

$$x(3x - 52) = 0$$

så

$$x = 0 \vee x = \frac{52}{3}$$

Vi må ha $x > 0$, så det er kun løsningen $x = \frac{52}{3}$ som kan brukes.
Siden grafen til den deriverte er en parabel som vender den hule siden ned, vet vi at den deriverte er større enn null mellom nullpunktene. Det betyr at den skifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet $x = \frac{52}{3}$.

Da vet vi at punktet $\left(\frac{52}{3}, V\left(\frac{52}{3}\right)\right)$ er et toppunkt på grafen til *V*.

$\underline{\underline{\text{En radius på } \frac{52}{3} \approx 17{,}33 \text{ vil gi størst volum}}}$

Del 2

Oppgave 1

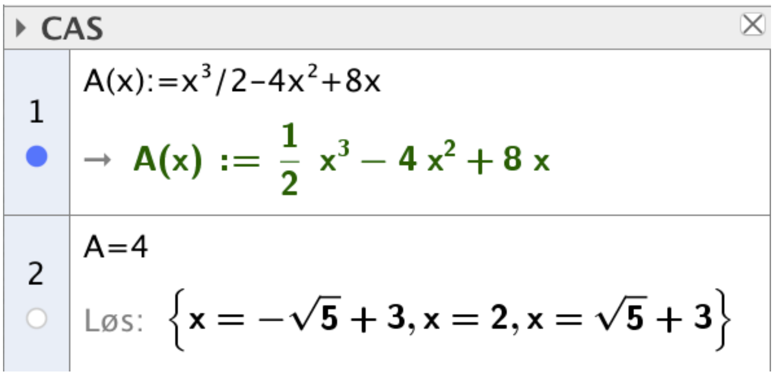
$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 \quad , 0 < x < 4$

a) Rektangelet har grunnlinje *x* og høyde $f(x)$, så

$$A(x) = x \cdot f(x) = x\left(\frac{1}{2}(x-4)^2\right) = x\left(\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16)\right) = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

$A(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \;\; , \;\; 0 < x < 4$, <u>som skulle vises</u>

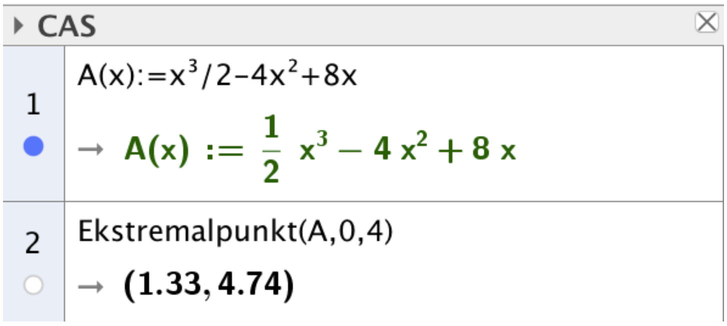
b)



$2 < \sqrt{5} < 3$, så $0 < -\sqrt{5} + 3 < 4$, mens $\sqrt{5} + 3 > 4$

$\underline{\underline{\text{Arealet av rektanglet er 4 når } x = 2 \text{ og når } x = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76}}$

c)

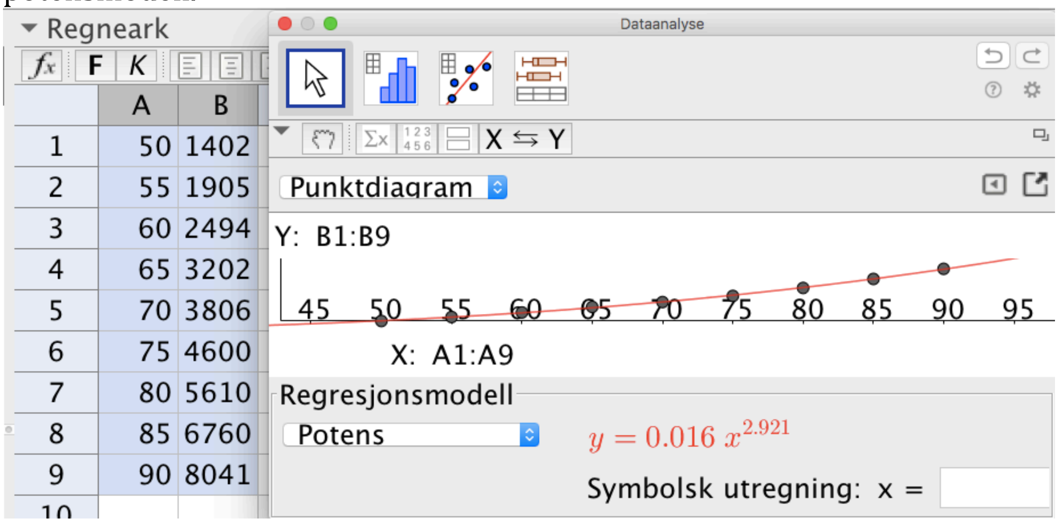


Siden $A(x) = x \cdot \frac{1}{2}(x-4)^2$, vet jeg at grafen til *A* har et dobbelt nullpunkt for $x = 4$. Da vet jeg samtidig at $(4, A(4))$ er et bunnpunkt på grafen til *A*. Da må det ekstremalpunktet jeg har funnet i CAS være et toppunkt.

$$\underline{\underline{\text{Arealet av rektanglet er størst når } x = 1{,}33. \text{ Da er arealet } 4{,}74}}$$

Oppgave 2

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra, velger regresjonsanalyse og potensmodell.



$$\underline{\underline{g(x) = 0{,}016x^{2{,}921}}}$$

b) Tegner grafen (se bilde neste side)

c) Skriver $(100, f(100))$ i inntastingsfeltet og får punktet *A* på grafen til *f* (se bilde neste side)

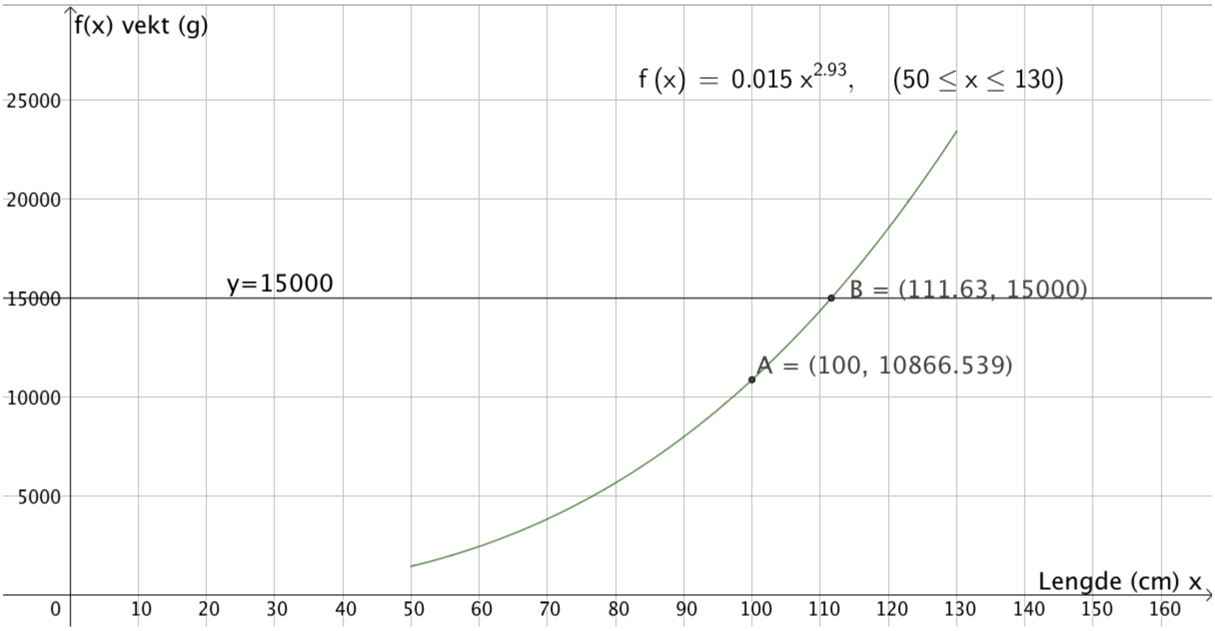
<u>En fisk på 100 cm veier 10867 gram</u>

(Vekten er oppgitt i hele gram i oppgaven, så gjør det samme i svaret mitt)

d) 15 kg er det samme som 15000 gram.
Tegner linja $y = 15000$ i samme koordinatsystem som grafen til *f*. Finner skjæringspunktet *B* ved hjelp av "skjæring mellom to objekt".
(se bilde under)

<u>En laks på 15kg er omtrent 110 cm lang</u>

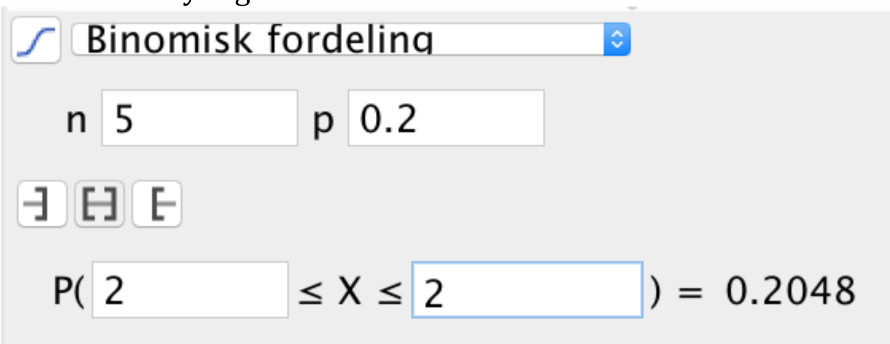
(I oppgaveteksten har man rundet av til nærmeste verdi i femgangen, så gjør det samme i svaret mitt)



Oppgave 3

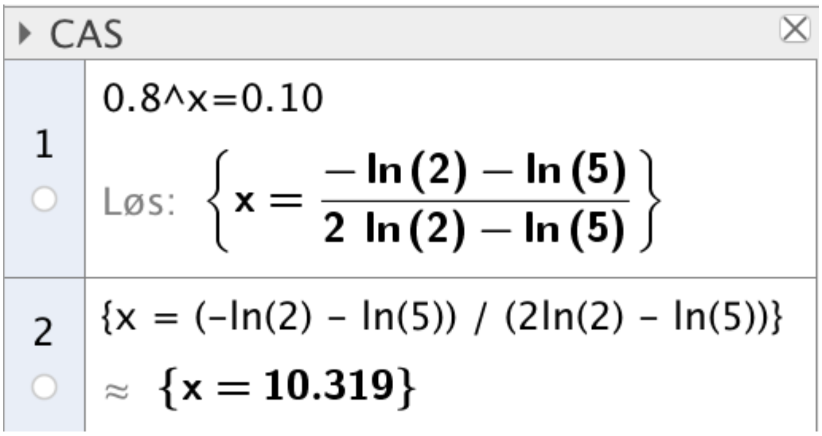
a) Siden det alltid er 20 mulige utfall, der fire er gunstige for hendelsen "neste sang er en Kygo-sang", vil vi ha $p = \dfrac{4}{20} = \dfrac{2}{10} = 0,2$, <u>som skulle forklares</u>

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



<u>Det er 20,48 % sannsynlig at de nøyaktig 2 av de 5 neste sangene er Kygo-sanger</u>

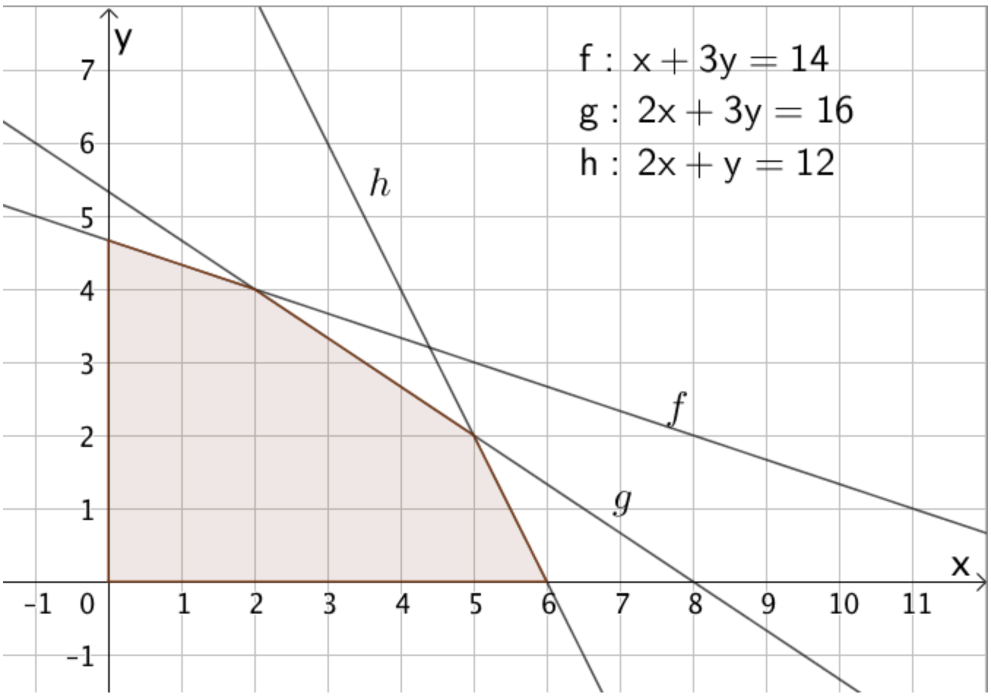
c) Hvis det skal være 90 % sannsynlig at minst én sang skal være med Kygo, må det samtidig være 10 % sannsynlig at *ingen* av sangene skal være med Kygo.
Det gir oss likningen $(1-0,2)^x = 0,1$, altså $0,8^x = 0,1$.



<u>Jacob må høre 11 avspillinger om sannsynligheten skal være 90 % for minst én sang med Kygo</u>

Oppgave 4

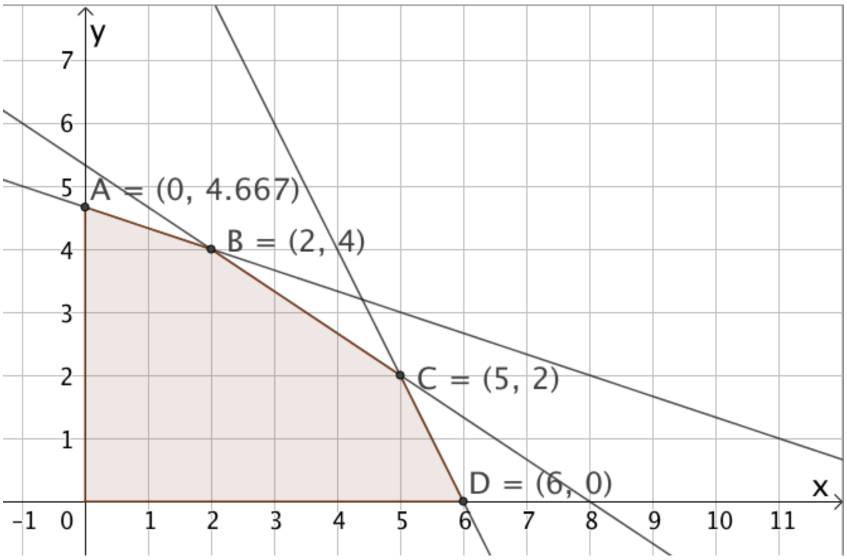
a) **Avdeling I:** Én time per x og 3 timer per y, men maksimalt 14 timer til sammen.
Gir ulikheten $x+3y \le 14$
Avdeling II: 2 timer per x og 3 timer per y, men maksimalt 16 timer til sammen.
Gir ulikheten $2x+3y \le 16$
Avdeling III: 2 timer per x og én time per y, men maksimalt 12 timer til sammen.
Gir ulikheten $2x+y \le 12$
Generelt: Det gir ikke mening å produsere et negativt antall sofaer, så vi har også ulikhetene $x \ge 0$ og $y \ge 0$



b) $F(1,1) = 4500 \cdot 1 + 6000 \cdot 1 = 10500$

<u>Fortjenesten på én sofa av type A og én sofa av type B er 10 500 kroner</u>

c)



Regner ut fortjenesten i hjørnepunktene:

Punkt A gir $F(0,4,667) = 4500 \cdot 0 + 6000 \cdot 4,667 = 28002$

Punkt B gir $F(2,4) = 4500 \cdot 2 + 6000 \cdot 4 = 9000 + 24000 = 33000$

Punkt C gir $F(5,2) = 4500 \cdot 5 + 6000 \cdot 2 = 22500 + 12000 = 34500$

Punkt D gir $F(6,0) = 4500 \cdot 6 + 6000 \cdot 0 = 27000$

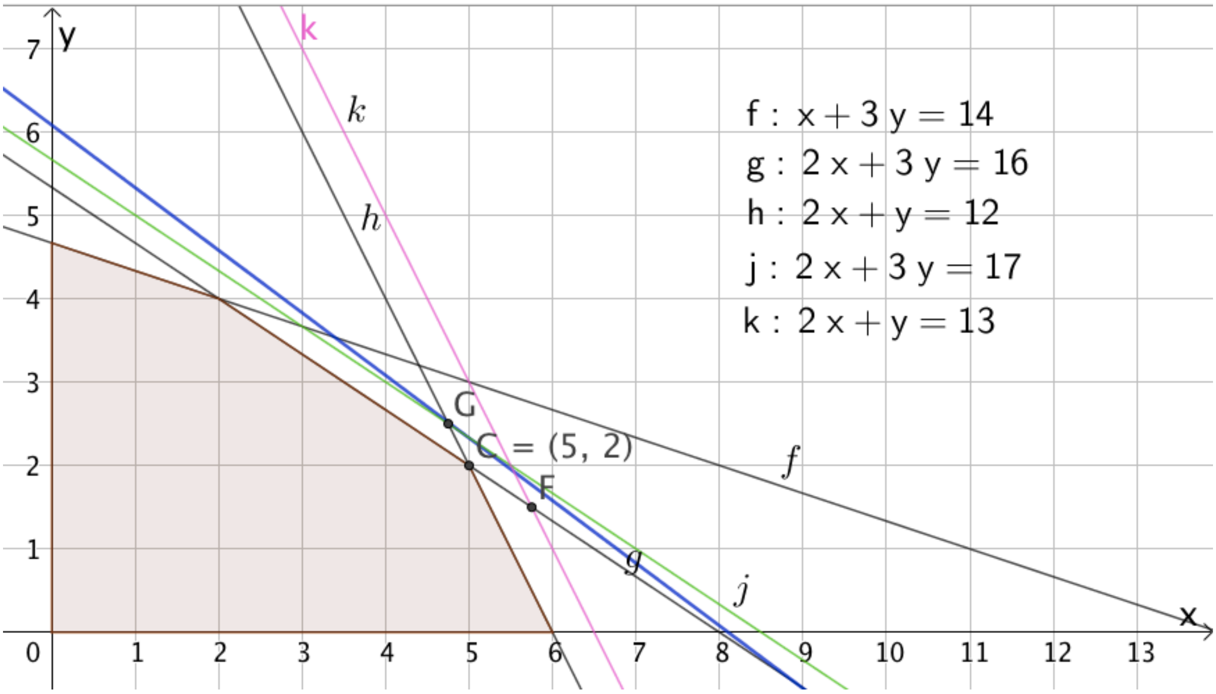
<u>Fortjenesten per dag er størst ved produksjon av 5 sofaer av type A og 2 sofaer av type B</u>

d) Avdeling II og avdeling III bruker hele sin kapasitet på å produsere den ideelle mengden, mens avdeling I har tid til overs. Det er altså ikke noe poeng i å øke kapasiteten i avdeling I.
Tegner nivålinja $4500x + 6000y = 0$. I tillegg tegner jeg to linjer, *j* og *k*, som illustrerer hva som skjer med punkt *C* når man øker kapasiteten i enten avdeling II eller avdeling III. Dersom man øker kapasiteten i avdeling II, vil *C* forskyves langs linja *k* og få plasseringen til punktet *G* på bildene under. Dersom man øker kapasiteten i avdeling III, vil *C* forskyves langs linja *j* og få plasseringen til punktet *F* på bildene under. Parallellforskyver nivålinja slik at den går gjennom henholdsvis *G* og *F*. Ser at nivålinja krysser *y*-aksen høyere oppe når den går gjennom *G* enn når den går gjennom *F.*

<u>Det vil altså lønne seg å øke kapasiteten i avdeling II</u>

(se bilder neste side)

Økning av kapasitet i avdeling II:



Økning av kapasitet i avdeling III: