Bevisteknikker

Simen Keiland Fondevik

February 25, 2014

1 Delelighet

1.1 Delelig med 3 - faktorisering

Vis at $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle $n \in Z$.

Faktotiser ut n slik at vi får $n(n^2 - 1)$. Den siste faktoren gjenkjenner vi som $(n+1)(n-1)$. Vi har altså $n^3 - n = (n-1)(n)(n+1)$. Dette er et produkt av tre påfølgende tall. Altså er en av faktorene delelig med 3, og dermed er også hele tallet delelig med 3.

1.2 Delelig med 3 - faktorisering (variabel eksponent)

Vis at $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle $n \in Z$.

$4^n - 1 = (2^2)^n - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1$. La $2^n = u$ slik at vi får $u^2 - 1$, hvilket faktoriseres til $(u+1)(u-1)$. Substituerer tilbake, og får $(2^n-1)(2^n+1)$. $2^n - 1$, 2^n og $2^n + 1$ er tre påfølgende tall. Dermed er ett av dem delelig med 3. 2^n er et produkt av bare totall, altså ikke delelig med 3. Følgelig er enten $2^n - 1$ eller $2^n + 1$ delelig med 3. Ergo er $4^n - 1$ delelig med 3.

1.3 Delelig med 3 - skuffeprinsippet

Vis at det blant fire vilkårlige tall, alltid finnes to tall med en differanse som er delelig med 3.

Når et tall deles på 3, får vi en rest på 0, 1 eller 2. Vi har flere tall enn mulige rester. Skuffeprinsippet gir da at minst to tall har samme rest. Vi kan da skrive disse tallene som $n_1 = 3k_1 + r$ og $n_2 = 3k_2 + r$, der k er et heltall og r er resten etter divisjonen. Det gir $n_1 - n_2 = (3k_1 + r) - (3k_2 + r) = 3(k_1 - k_2)$. Dett er er åpenbart delelig med 3.

1.4 Delelig med 3 - induksjon

Vis at $n^3 + 2n$ er delelig med 3 for alle $n \in Z$.

Vi lar $n = 0$ og får $0^3 - 2 \cdot 0 = 0$, hvilket er delelig med 3. Så undersøker vi når $n + 1$:

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2) = (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)$$

Det første leddet har vi allerede vist er delelig med 3, så vi kan erstatte dette med $3m$ der m er et heltall. Samtidig kan vi faktorisere ut 3 i det andre leddet. Vi får altså $3(m+(n^2+n+3))$, hvilket også er delelig med 3. Ettersom n^3+2n er delelig med både $n=0$ og $n+1$ gir matematisk induksjon at uttrykket er delelig for alle n.

2 Partall/Oddetall

I kommende eksempler bruker vi at partall kan skrives på formen $2n$ og oddetall på formen $2n+1$, der n er et heltall.

2.1 Kvadrat av partall

Vis at kvadratet av et partall også er et partall.

$(2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$. Den siste faktoren i produktet er et heltall. Vi har da $2 \cdot m$, der m er et heltall. Dette er formen til partall, altså er kvadratet av et partall også et partall.

2.2 Kvadrat av oddetall

Vis at kvadratet av et oddetall også er et oddetall.

$(2n+1)^2 = 4n^2+2n+1 = 2(2n^2+n)+1$. $2n^2+n$ blir et nytt heltall, så vi kan erstatte dette med et heltall m. Vi får $2m+1$, hvilket er formen til et oddetall. Vi har vist at kvadratet av et oddetall også er et oddetall.

2.3 Ekvivalens - kontrapositivt bevis

Vis at n^2 er et oddetall hvis og bare hvis n er et oddetall.

Her må vise to ting: (1) At n^2 er oddetall medfører at n er oddetall, OG (2) at n er oddetall medfører at n^2 er oddetall. (2) har vi bevist over. (1) er det samme som å vise at hvis n ikke er oddetall, da er n^2 ikke oddetall (kontrapositiv bevisføring). Altså, hvis n er partall, er også n^2 partall. Dette har vi også bevist over. Beviset er ferdig.

2.4 $\sqrt{2}$ er irrasjonalt - selvmotsigelse

Anta det motsatte, at $\sqrt{2}$ er et rasjonlt tall. Da kan vi skrive $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ der a og b er heltall slik at brøken er maksimalt forkortet (alle rasjonale tall kan skrives som en slik brøk). Da får vi når vi kvadrerer begge sidene

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

b^2 er et heltall, hvilket betyr at a^2 er et partall. Kontrapositiv bevisføring gir at a da er et partall. Vi kan derfor substituere a med $2n$ der n er et heltall. Det gir

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2$$

Vi ser at b^2 er et partall og dermed er også b er partall (kontrapositiv bevisføring, sagt på en annen måte; kvadratet av et oddetall er aldri et partall, følgelig er ikke tallet et oddetall).

Vi har nå at både a og b er partall. Men da har de jo felles faktor 2. Vi kan altså forkorte brøken $\frac{a}{b}$ ytterligere. Men i antagelsen vår la vi til grunn at brøken var maksimalt forkortet. Vi har en selvmotsigelse - altså er påstanden vår gal. $\sqrt{2}$ er altså ikke et rasjonelt tall. Ergo må det være irrasjonalt.