Løsningsforslag til eksamen i Matematikk R1 V2014

Del 1

Oppgave 1

a) Vi bruker kjerneregelen med $u = x^2 + x$ som kjerne.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' \\ &= \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \underline{\underline{\frac{2x + 1}{x^2 + x}}} \end{aligned}$$

b) Vi bruker produktregelen.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{e^x(1 + x)}} \end{aligned}$$

c) Vi bruker kjerneregelen med $u = x^2 + 3$ som kjerne.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (u^4)' \cdot u' = 4u^3 \cdot u' \\ &= 4(x^2 + 3)^3 \cdot 2x = \underline{\underline{8x(x^2 + 3)^3}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Tallene som går opp i -8 er -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4 og 8. Her ser vi relativt enkelt at

$$P(1) = (1)^3 - 7(1)^2 + 14(1) - 8 = 0$$

Dermed er $\underline{\underline{x = 1}}$ et nullpunkt for P.

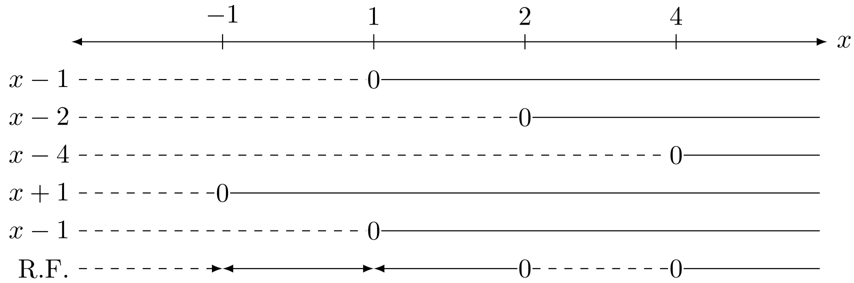
b) Siden $x = 1$ er et nullpunkt for P, vil divisjonen $P(x) : (x - 1)$ gå opp.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 1) = x^2 - 6x + 8 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \quad - 6x^2 + 14x - 8 \\ \quad \underline{- 6x^2 + 6x} \\ \qquad\qquad 8x - 8 \\ \qquad\qquad \underline{8x - 8} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x^2 - 6x + 8) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2x - 4x + (-2)(-4)) \\ &= \underline{\underline{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}} \end{aligned}$$

c) Vi tegner fortegnslinje for $\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-1)}$.



Dermed har vi at $\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-1} \geq 0$ når $\underline{\underline{x \in \langle -1, 2] \backslash \{1\} \cup [4, \rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 3

a) $-2 \cdot [-2,1] + [3,6] = [4,-2] + [3,6] = \underline{\underline{[7,4]}}$.
$[-2,1] \cdot [3,6] = (-2)(3) + (1)(6) = \underline{\underline{0}}$.

b) $\vec{b}$ er parallell med en rett linje med stigningstall $\dfrac{6}{3} = 2$. Hvis $\vec{c}$ skal være parallell med samme linje, får vi følgende likning:

$$\begin{aligned} \frac{4}{k-1} &= 2 \\ 4 &= 2(k-1) \\ 2k-2 &= 4 \\ k &= \frac{4+2}{2} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

c) $2\vec{a} = 2 \cdot [-2,1] = [-4,2]$.
At $2\vec{a}$ og $\vec{c}$ er like lange gir oss denne likningen:

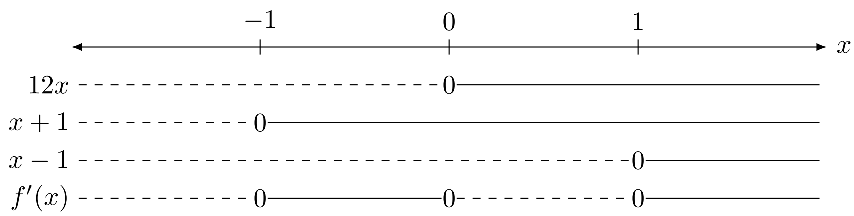
$$\begin{aligned} \sqrt{(k-1)^2+4^2} &= \sqrt{(-4)^2+2^2} \\ (k-1)^2+16 &= 16+4 \\ (k-1) &= \pm\sqrt{4} \\ k-1 = 2 \quad &\vee \quad k-1=-2 \\ \underline{\underline{k=3}} \quad &\vee \quad \underline{\underline{k=-1}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Vi finner nullpunktene ved å løse likningen $f(x) = 0$.

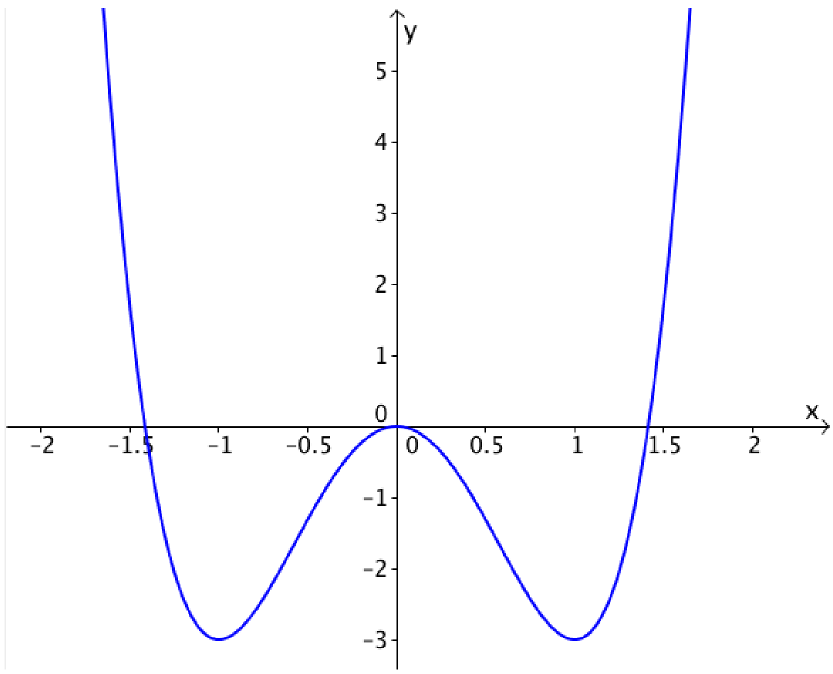
$$
\begin{aligned}
3x^4 - 6x^2 &= 0 \\
3x^2(x^2 - 2) &= 0 \\
3x^2 = 0 \quad &\vee \quad x^2 - 2 = 0 \\
\underline{\underline{x = 0}} \quad &\vee \quad \underline{\underline{x = \pm\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

b) $f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 2x = 12x^3 - 12x = \underline{\underline{12x(x+1)(x-1)}}$.



f synker frem mot $x = -1$ og stiger etterpå, så vi har et bunnpunkt i $(-1, f(-1)) = \underline{\underline{(-1, -3)}}$.
f stiger frem mot $x = 0$ og synker etterpå, så vi har et toppunkt i $(0, f(0))) = \underline{\underline{(0, 0)}}$.
f synker frem mot $x = 1$ og stiger etterpå, så vi har et bunnpunkt i $(1, f(1)) = \underline{\underline{(1, -3)}}$.

c)



Oppgave 5

ΔABS vil være en likebeint trekant, siden AS og SB begge er radier i sirkelen. Dermed vil sentralvinkelen $\angle ASB$ til buen AB være $180° - 2 \cdot 27° = 126°$. $\angle ACB$ er en periferivinkel over denne buen, og vil dermed være $\dfrac{126°}{2} = \underline{\underline{63°}}$.

Oppgave 6

a) Hvis p er et oddetall større enn 1, vil både $p-1$ og $p+1$ være partall, og gå opp i to. Dermed vil de gitte uttrykkene bli hele tall.

b)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right) - \left(\frac{p-1}{2}\right) &= \frac{p^2+2p+1}{4} - \frac{p^2-2p+1}{4} \\
&= \frac{p^2+2p+1-p^2+2p-1}{4} = \frac{4p}{4} = \underline{\underline{p}}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi at

$$151 = \left(\frac{151+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{151-1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{76^2 - 75^2}}.$$

Oppgave 7

a) Definisjonen av logaritmen gir oss at $x = e^{\ln x}$. Dermed har vi

$$h(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = \underline{\underline{e^{x \cdot \ln x}}}.$$

b) Vi bruker kjerneregelen med $u = x \cdot \ln x$ som kjerne.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot u' \\
&= e^{x \ln x}\left((x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'\right) \\
&= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{x^x(\ln x + 1)}}
\end{aligned}
$$

Del 2

Oppgave 1

a) Siden D ligger på y-aksen, vil koordinatene være $(0, y)$. Da får vi at

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= [0-4, y-4] = [-4, y-4] \text{ og} \\
\overrightarrow{BA} &= [1-5, 3-(-1)] = [-4, 4].
\end{aligned}
$$

Siden de to vektorene er parallelle finnes det et tall k slik at $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BA}$, og siden vektorene har samme førstekoordinat, må k være lik 1. Vi får dermed følgende likning fra y-koordinatene:

$$y - 4 = 1 \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 8$$

Koordinatene til D blir $\underline{\underline{(0, 8)}}$.

b) $\overrightarrow{BC} = [4 - 5, 4 - (-1)] = [-1, 5]$. Dermed får vi at

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = [5, -1] + \frac{1}{2}[-1, 5] = \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Koordinatene til M er dermed $\underline{\underline{\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)}}$.

c) $\overrightarrow{AM} = \left[\frac{9}{2} - 1, \frac{3}{2} - 3\right] = \left[\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right]$. Dermed blir

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{AM} = \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right] + 3\left[\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right] = [15, -3]$$

Koordinatene til P er $\underline{\underline{(15, -3)}}$.

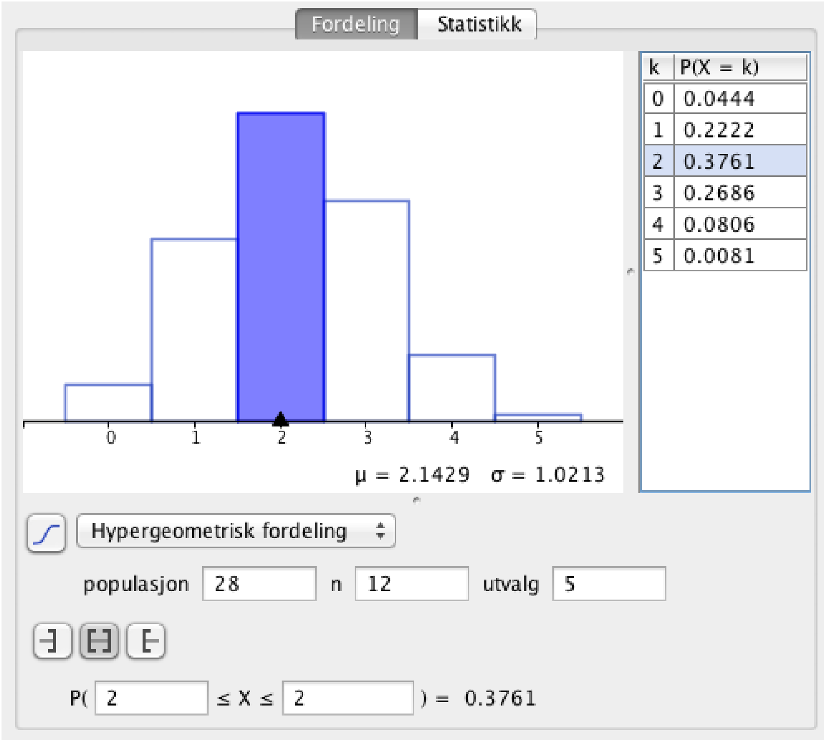
Oppgave 2

a) $\dfrac{\binom{12}{1} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{28}{5}} = \dfrac{2}{\underline{\underline{9}}}$.

b) Hvis vi lar X være antall gutter i gruppen så vil X ha en hypergeometrisk fordeling. Ved hjelp av sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra finner jeg at antallet gutter er $\underline{\underline{\text{to}}}$ for denne sannsynligheten. Se bilde på neste side.

c) $P(A \mid B)$ er sannsynligheten for at Arne blir med i gruppen hvis Betsy er med. Siden Betsy er med er det fire plasser igjen i gruppen, og 27 stykker å velge mellom. Arne kan velges på $\binom{1}{1}$ måter, de tre andre kan velges på $\binom{26}{3}$ måter, så antallet utvalg som inneholder Arne vil være $\binom{1}{1} \cdot \binom{26}{3}$. Det totale antallet utvalg er $\binom{27}{4}$. Dermed blir

$$P(A \mid B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{26}{3}}{\binom{27}{4}} = \frac{4}{\underline{\underline{27}}}.$$



Oppgave 3

a) Vi deriverer $e^{-\frac{x^2}{8}}$ med $u = -\dfrac{x^2}{8}$ som kjerne.

$$\begin{aligned}(e^u)' \cdot u' &= e^u \cdot u' \\ &= e^{-\frac{x^2}{8}} \cdot -\frac{2x}{8} = -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\end{aligned}$$

Dermed kan vi bruke produktregelen.

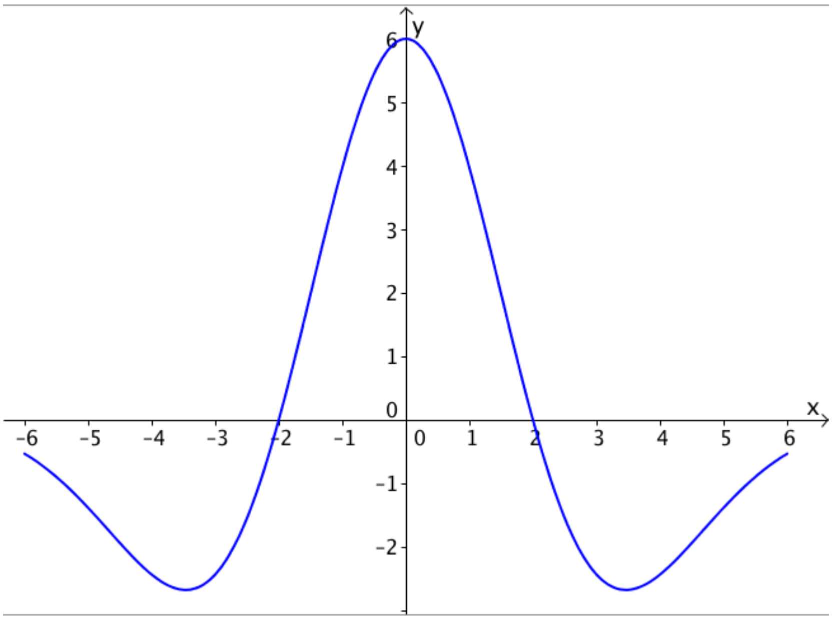
$$\begin{aligned}f'(x) &= (6x)' \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} + 6x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{8}}\right)' \\ &= 6e^{-\frac{x^2}{8}} + 6x \cdot \left(-\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\right) \\ &= \left(6 - \frac{3x^2}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{8}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}(4 - x^2)e^{-\frac{x^2}{8}}}}\end{aligned}$$

b) Se neste side.

c) Ved kommandoene Nullpunkt[f',-3,-1] og Nullpunkt[f',1,3] får vi at den deriverte har nullpunktene $x = -2$ og $x = 2$.

Siden den deriverte går fra å være negativ til positiv ved $x = -2$ har vi et bunnpunkt i $(-2, f(-2)) = \underline{\underline{(-2, -7{,}28)}}$. Ved $x = 2$ går den deriverte fra positiv til negativ, så vi har et toppunkt i $(2, f(2)) = \underline{\underline{(2, 7{,}28)}}$.

Vendepunktene til f har samme x-koordinat som ekstremalpunktene til f'. Kommandoene Ekstremalpunkt[f,-5,-2], Ekstremalpunkt[f,-1,1] og Ekstremalpunkt[f,2,5] gir oss at f' har ekstremalpunkter i $x = -3{,}46$, $x = 0$ og $x = 3{,}46$. Dermed får vi vendepunkter i $(-3{,}46, f(-3{,}46)) = \underline{\underline{(-3{,}46, -4{,}65)}}$, $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0, 0)}}$ og $(3{,}46, f(3{,}46)) = \underline{\underline{(3{,}46, 4{,}65)}}$.



Oppgave 4

a) Overflaten av karet består av grunnflaten, med areal x^2 dm^2 og fire sider, hver med areal xh dm^2. Siden overflaten er 12 dm^2 får vi

$$x^2 + 4xh = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 4xh = 12 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \underline{\underline{\frac{12 - x^2}{4x}}}$$

b) x må være positiv. I tillegg skal høyden være positiv, så x^2 må være mindre enn 12. Vi får at $\underline{\underline{0 < x < \sqrt{12}}}$.

c) Volumet til et prisme er grunnflaten ganger høyden.

$$V(x) = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{4x} = \underline{\underline{\frac{12x - x^3}{4}}}$$

d) Vi finner den deriverte til volumet V.

$$V'(x) = \frac{1}{4} \cdot (12 - 3x^2) = \frac{3}{4}(4 - x^2) = \frac{3}{4}(2 + x)(2 - x)$$

Vi ser enkelt at den deriverte har nullpunkter i $x = -2$ og $x = 2$, men kun sistnevnte ligger innenfor definisjonsområdet til funksjonen.

$V'(1) = \frac{9}{4} > 0$ og $V'(3) = -\frac{15}{4} < 0$ forteller oss at vi har et toppunkt for V i $x = 2$. Karet rommer på det meste

$$V(2) = \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{4} = 4 \text{ dm}^3 = \underline{\underline{4 \text{ liter vann}}}$$

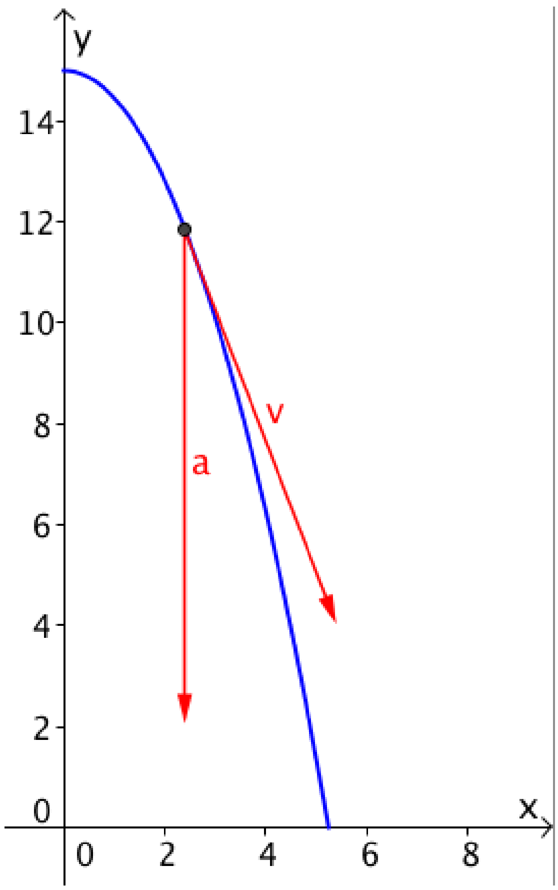
Oppgave 5

a) Ballen treffer bakken når y-koordinaten til posisjonsvektoren er null. Vi får følgende likning

$$15 - 4{,}9t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15 = 4{,}9t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{15}{4{,}9}} = \pm 1{,}75$$

Vi ser bort fra den negative løsningen, da denne tilsvarer et tidspunkt før ballen forlater taket. Ballen treffer bakken etter $\underline{\underline{\text{1.75 sekunder}}}$.

b) Vi tegner grafen i Geogebra ved hjelp av kommandoen r=Kurve[$3t$,$15 - 4{,}9t^2$,t,0,1.75].



c) Vi finner en funksjon for fartsvektoren ved å derivere $\vec{r}$.

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [3, -4{,}9 \cdot 2t] = [3, -9{,}8t]$$

Farten etter 0,8 sekunder blir $\vec{v}(0{,}8) = [3, -9{,}8 \cdot 0{,}8] = \underline{\underline{[3, -7{,}84]}}$.
Vi tegner inn fartsvektoren i Geogebra ved kommandoen
Vektor[r(0.8),r(0.8)+(3,-7.84)].

d) Akselerasjonsvektoren er den deriverte av fartsvektoren.

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \underline{\underline{[0, -9{,}8]}}$$

Vi ser at akselerasjonen er konstant. Vi tegner inn akselerasjonsvektoren i Geogebra ved kommandoen Vektor[r(0.8),r(0.8)+(0,-9.8)].

Oppgave 6

a) Ved å dele på n^n på begge sider av likningen får vi

$$\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^{n}$$

Begge sidene er like, og de vil også være positive siden $\frac{x}{n}$ er positivt. Da vil logaritmene til de to sidene også være like, og dermed får vi likningen i oppgaveteksten.

b) Vi bruker logaritmereglene for å omforme uttrykket.

$$\begin{aligned} \lg x \cdot \lg\left(\frac{x}{n}\right) &= n \cdot \lg\left(\frac{x}{n}\right) \\ \lg x \cdot (\lg x - \lg n) - n \cdot (\lg x - \lg n) &= 0 \\ (\lg x - n)(\lg x - \lg n) &= 0 \end{aligned}$$

c) Når et produkt er null er alltid en av faktorene null. Dermed har vi at

$$\lg x - n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lg x = n \quad \Rightarrow \quad x = \underline{\underline{10^n}}$$

eller at

$$\lg x - \lg n = \quad \Rightarrow \quad \lg x = \lg n \quad \Rightarrow \quad x = \underline{\underline{n}}$$