Løsningsforslag eksamen S1 (LK06) Høst 2022

Del 1

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
10^x + 1 &= \frac{101}{100} \\
10^x &= \frac{101}{100} - 1 \\
10^x &= \frac{101}{100} - \frac{100}{100} \\
10^x &= \frac{1}{100} \\
10^x &= \frac{1}{10^2} \\
10^x &= 10^{-2} \\
&\underline{\underline{x = -2}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 - 4x &= 0 \\
x\left(x^2 + 3x - 4\right) &= 0 \\
x\left(x+4\right)\left(x-1\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$$gir$$

$$\underline{\underline{x = -4 \vee x = 0 \vee x = 1}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lg\left(2x^2\right) - \lg x &= 1 \\
\lg\left(\frac{2x^2}{x}\right) &= 1 \\
\lg\left(2x\right) &= 1 \\
10^{\lg(2x)} &= 10^1 \\
2x &= 10 \\
&\underline{\underline{x = 5}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a)

$$2(x+y)^2-2(x^2+y^2)-y(4x+y)=2(x^2+2xy+y^2)-2x^2-2y^2-4xy-y^2$$
$$=2x^2+4xy+2y^2-2x^2-2y^2-4xy-y^2$$
$$=\underline{\underline{-y^2}}$$

b)

$$\lg(a^4b)-\lg\left(\frac{a^3}{b^2}\right)+\lg a^{-1}=\lg a^4+\lg b-(\lg a^3-\lg b^2)-\lg a$$
$$=4\lg a+\lg b-3\lg a+2\lg b-\lg a$$
$$=\underline{\underline{3\lg b}}$$

Oppgave 3

a) Summen av lengdene til de fire sidene skal være 20.
Det gir:

$$x+y+5+x+x=20$$
$$3x+y=20-5$$
$$3x+y=15$$

Vi kan dele trapeset inn i et kvadrat med sidelengder x og en rettvinklet trekant som har kateter med lengder x og y og hypotenus med lengde 5.
Pythagoras' setning gir da:

$$x^2+y^2=5^2$$
$$x^2+y^2=25$$

Opplysningene gir oss altså følgende likningssystem:

$$x^2+y^2=25$$
$$3x+y=15$$

<u>Som skulle vises.</u>

b)

$$I.\quad x^2+y^2=25$$
$$II.\quad 3x+y=15$$

Likning II kan uttrykkes slik: $y=15-3x$
Setter dette inn i likning I:

$$x^2+(15-3x)^2=25$$
$$x^2+225-90x+9x^2=25$$
$$10x^2-90x+200=0$$
$$10(x^2-9x+20)=0$$
$$x^2-9x+20=0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

gir

$x_1 = 5 \text{ og } x_2 = 4$

Kateten i den rettvinklede trekanten er 5, så da kan ikke en av katetene også ha lengde 5. Dessuten ser vi også at $x = 5$ vil gi $y = 0$.
Vi må altså bruke løsningen $x = 4$ videre, som gir $y = 15 - 3 \cdot 4 = 15 - 12 = 3$ -

Likningssystemet har løsning $\underline{\underline{x = 4 \wedge y = 3}}$.

<u>Trapeset har to sider med lengde 4, én side med lengde 7 og én side med lengde 5</u>

Oppgave 4

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4 < 2 + \frac{3}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 < 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$x^2 + 3x - 4 > 0$$

$$(x+4)(x-1) > 0$$

Grafen til $x^2 + 3x - 4$ er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"). Det betyr at uttrykket er negativt mellom nullpunktene $x = -4$ og $x = 1$.

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + 4 < 2 + \frac{3}{2}x \text{ når } x \in \langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle}}$$

Oppgave 5

a) Deler vennegjengen inn i to grupper, der den ene gruppen består av Anita og Lars, mens den andre gruppen består av de resterende seks vennene.
Da har vi en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell og kan bestemme sannsynligheten for å trekke ut både Anita og Lars til jobben med å sette opp teltene.

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{1 \cdot 6}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6}{8 \cdot 7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at både Anita og Lars blir trukket ut til å sette opp teltene er } \frac{3}{28}}}$$

b) Bestemmer sannsynligheten for at verken Anita eller Lars blir trukket ut til å sette opp teltene.

Dette er det samme som å bestemme sannsynligheten for at *begge* blir satt til å lage mat.

$$\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{5\cdot4}{8\cdot7} = \frac{20}{56} = \frac{10}{28}$$

Sannsynligheten for at Anita og Lars blir trukket ut til de samme arbeidsoppgavene er altså $\frac{3}{28}+\frac{10}{28}=\frac{13}{28}$.

Da er sannsynligheten for at de *ikke* blir trukket ut til å gjøre de samme arbeidsoppgavene $1-\frac{13}{28}=\frac{28}{28}-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$.

Sannsynligheten for at Anita og Lars ikke trekkes ut til å gjøre de samme arbeidsoppgavene er $\frac{15}{28}$

Oppgave 6

Forutsetter at lærere som yrkesgruppe utgjør et representativt utvalg av befolkningen slik at man kan anta at det er 1,5 prosent sannsynlig at en tilfeldig lærer er født som tvilling. Sannsynligheten for at en tilfeldig lærer *ikke* er født som tvilling er da 98,5 %.

Vi må også forutsette de 50 lærerne plukkes ut uavhengig av hverandre, slik at sannsynligheten for å plukke ut en lærer som er født som tvilling er den samme i hvert av de 50 delforsøkene.

At minst én lærer som plukkes ut er tvilling, er den komplementære hendelsen til hendelsen "ingen av lærerne som plukkes ut er født som tvilling".

$$P(\text{Minst én av de 50 lærerne er født som tvilling}) = 1-0{,}985^{50}$$

Oppgave 7

a) Området er avgrenset av følgende ulikheter:

$$x \geq 2$$

$$y \geq 1$$

$$y \leq -\frac{1}{2}x+5$$

$$y \leq -x+7$$

b) Linja som går gjennom punktet $(-4,1)$ må være "bratt nok" til at den går gjennom punktet $(2,4)$ (eller at den ligger over dette punktet).

Når linja går gjennom punktene $(-4,1)$ og $(2,4)$ er stigningstallet

$$k = \frac{4-1}{2-(-4)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Dersom ulikheten $y \le kx + b$ skal inkluderes, uten at området forandres, må vi ha $\underline{\underline{k \ge \frac{1}{2}}}$

Oppgave 8

$$T(x) = \frac{276}{\sqrt{x}} - 273$$

a) $T(4) = \frac{276}{\sqrt{4}} - 273 = \frac{276}{2} - 273 = 138 - 273 = -135$

<u>Temperaturen på et legeme som har avstanden 4 AE til solen er -135°C</u>

b)

$$\frac{276}{\sqrt{x}} - 273 = -204$$
$$\frac{276}{\sqrt{x}} = -204 + 273$$
$$\frac{276}{\sqrt{x}} = 69$$
$$276 = 69 \cdot \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = \frac{276}{69}$$
$$\sqrt{x} = 4$$
$$x = 16$$

<u>Avstanden fra solen til dette legemet er 16 AE.</u>

Oppgave 9

Ser av grafen at $f(0) = -3$, som gir $\frac{b}{-2} = -3$, så $b = 6$.
Ser av grafen at $f(-3) = 0$, som gir $-3a + 6 = 0$, så $a = 2$.
Nevneren i brøken er lik 0 for $x = 2$, så dette er likningen til den vertikale asymptoten.
Om vi lar x bli veldig stor, kan vi si $f(x) = \frac{ax+b}{x-2} \approx \frac{ax}{x} = a$, slik at den horisontale asymptoten har likning $y = 2$.

$\underline{\underline{a = 2 \wedge b = 6 \text{ og asymptotene er } x = 2 \text{ og } y = 2}}$

Oppgave 10

Lar høyden til brettene være *x*. Da er tverrsnittet av rennen et rektangel med grunnlinje $60-2x$ og høyde *x*.

Lar arealet av tverrsnittet være gitt ved $A(x)=\left(60-2x\right)\cdot x=-2x^2+60x$.

Grafen til *A* er en parabel som vender hul side ned ("sur munn") som er symmetrisk om ei symmetrilinje midt mellom nullpunktene. Skjæringspunktet mellom grafen til *A* og denne symmetrilinja er toppunktet på grafen til *A*.

$A(x)=-2x^2+60x=-2x\left(x-30\right)$, så nullpunktene er $x=0$ og $x=30$.

Da er grafen til *A* symmetrisk om linja $x=15$.

$A(15)=-2\cdot 15^2+60\cdot 15=-2\cdot 225+900=-450+900=450$.

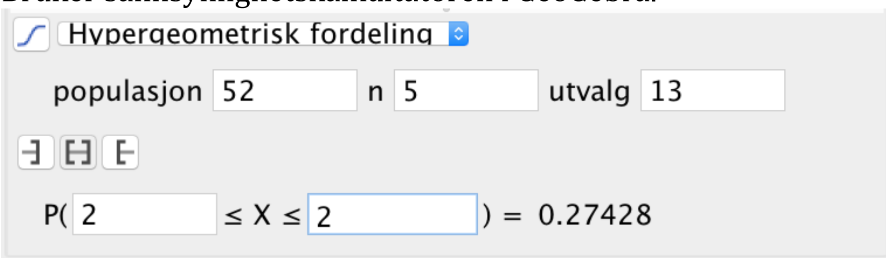
<u>Arealet av tverrsnittet blir størst om man bretter opp metallstykket 15 cm inn fra hver side. Da er arealet av tverrsnittet 450 cm^2.</u>

Del 2

Oppgave 1

a) $P\left(\text{Alle de fem kortene er hjerter}\right)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{9}{48}\approx \underline{\underline{0{,}0005=0{,}05\%}}$

b) Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Bruker sannsynlighetskalkultatoren i GeoGebra.



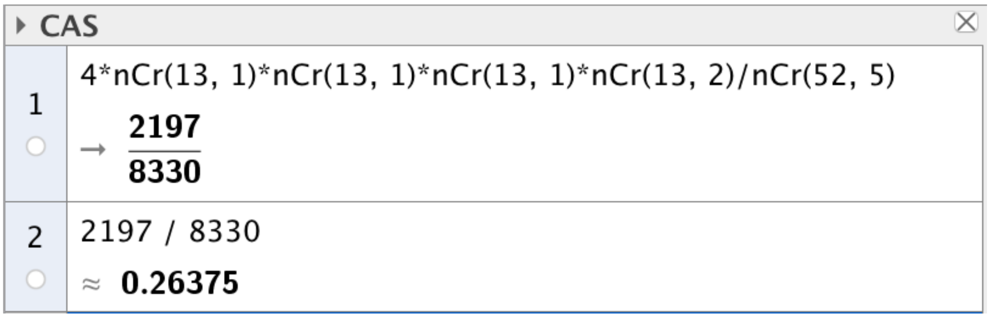
<u>Sannsynligheten for at nøyaktig to av de fem kortene er hjerter er ca. 27,4%</u>

c) Her må det trekkes ut ett kort av hver type for tre av korttypene, mens det må trekkes to kort av den siste korttypen. Dette kan skje på fire ulike måter, som alle er like sannsynlige siden det er like mange av hver korttype i kortstokken.

Vi må regne ut verdien av uttrykket

$$4\cdot\frac{\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

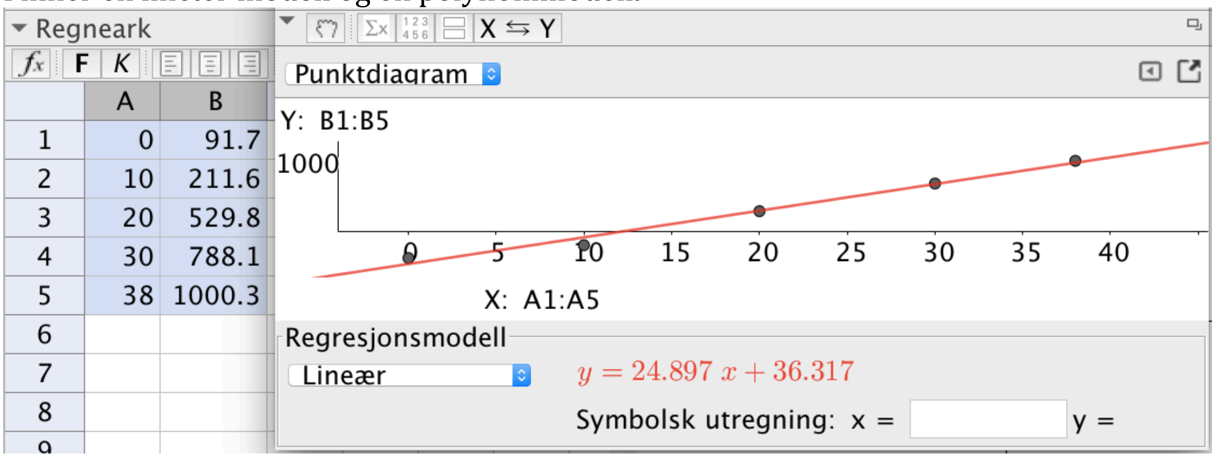
Bruker CAS:



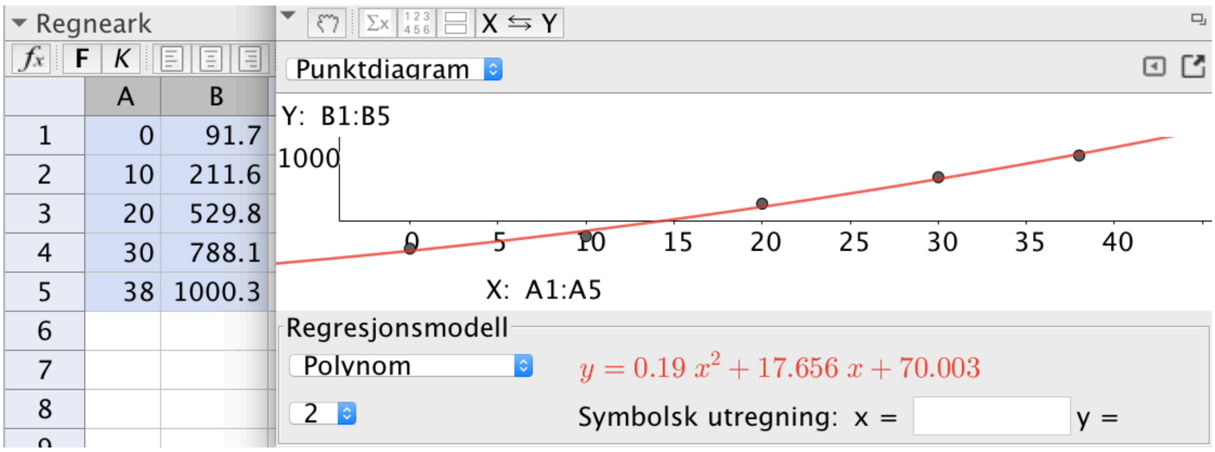
<u>Sannsynligheten for at det er minst ett kort av hver type er ca. 26,4 %.</u>

Oppgave 2

a) Lar x være antall år etter 1980.
Bruker regresjonsanalyse i GeoGebra.
Finner én lineær modell og en polynommodell.



Den lineære modellen er $f(x) = 24{,}9x + 36{,}3$.



Polynommodellen er $g(x) = 0{,}2x^2 + 17{,}7x + 70$

Vi ser at begge modellene stemmer nokså godt mot slutten av det oppgitte tidsrommet, men vi ser klart at utviklingen totalt sett ikke har vært lineær, så jeg går for polynommodellen.

b) For den lineære modellen er den gjennomsnittlige veksten per år gitt ved stigningstallet 24,9, så i følge denne modellen er den gjennomsnittlige årlige veksten i vareeksport fra 2015-2025 på <u>24,9 milliarder kroner per år</u>.

Regner ut gjennomsnittlig årlig vekst i samme periode, i følge polynommodellen.

CAS

1 g(x):=0.2x²+17.7x+70

$\approx\ g(x) := 0.2\,x^2 + 17.7\,x + 70$

2 (g(45)–g(35))/10

$\checkmark\ \dfrac{g(45) - g(35)}{10}$

3 (g(45) – g(35)) / 10

$\approx\ 33.7$

I følge polynommodellen er den gjennomsnittlige årlige veksten i vareeksport fra 2015-2025 på <u>33,7 milliarder kroner per år.</u>

c) Hvor mange år går det før den totale vekstfaktoren er 10?

CAS

1 1.057^x=10

$\checkmark\ 1.057^x = 10$

2 1.057^x = 10

Løs: $\left\{x = -\dfrac{\ln(10)}{3\ \ln(10) - \ln(1057)}\right\}$

3 {x = (–ln(10)) / (3ln(10) – ln(1057))}

$\approx\ \{x = 41.537\}$

<u>Verdien av den totale vareimporten til Norge vil være 10 ganger større enn den var i 1980 i løpet av 2021 (altså etter omtrent 41,5 år).</u>

d) Tegner grafene og finner skjæringspunktene mellom dem ved hjelp av *"skjæring mellom to objekt".*

CAS

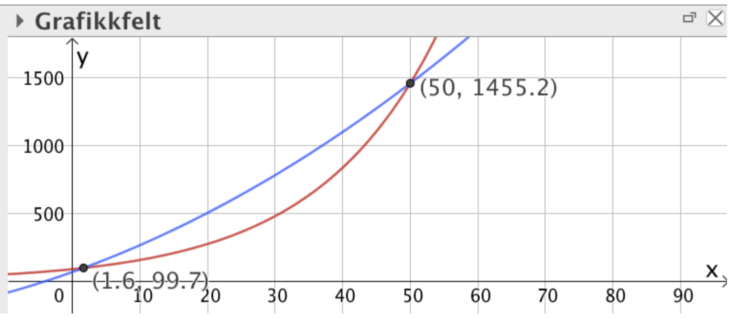
1 f(x):=91*1.057^x

$\approx\ f(x) := 91\,e^{0.1x}$

2 g(x):=0.2x^2+17.7x+70

$\approx\ g(x) := 0.2\,x^2 + 17.7\,x + 70$

3



<u>I følge modellene vil Norge ha handelsoverskudd omtrent i perioden 1981-2030</u>

Oppgave 3

a) Eierne ønsker å produsere minst 24kg av osten Kraftig, som veier 200 gram.

$$\frac{24kg}{200g} = \frac{24000g}{200g} = 120$$

Man ønsker altså å produsere minst 120 oster av typen Kraftig.
Dette gir ulikheten $x \geq 120$.
Eierne ønsker å produsere minst 28kg av osten Edel, som veier 250 gram.

$$\frac{18kg}{250g} = \frac{18000g}{250g} = 72$$

Man ønsker altså å produsere minst 72 oster av typen Kraftig.
Dette gir ulikheten $y \geq 72$.
Bedriften kan produsere inntil 60kg, altså 60000 gram, ost per dag.
Dette gir ulikheten

$$200x + 250y \leq 60000 \quad | \cdot \frac{1}{200}$$

$$x + 1{,}25y \leq 300$$

De ansatte jobber til sammen inntil 32 timer, altså 1920 minutter, per dag.
Dette gir ulikheten

$$7{,}5x + 6y \leq 1920 \quad | \cdot \frac{1}{6}$$

$$1{,}25x + y \leq 320$$

x og y må altså ligge i et område beskrevet av ulikhetene

$$x \geq 120$$

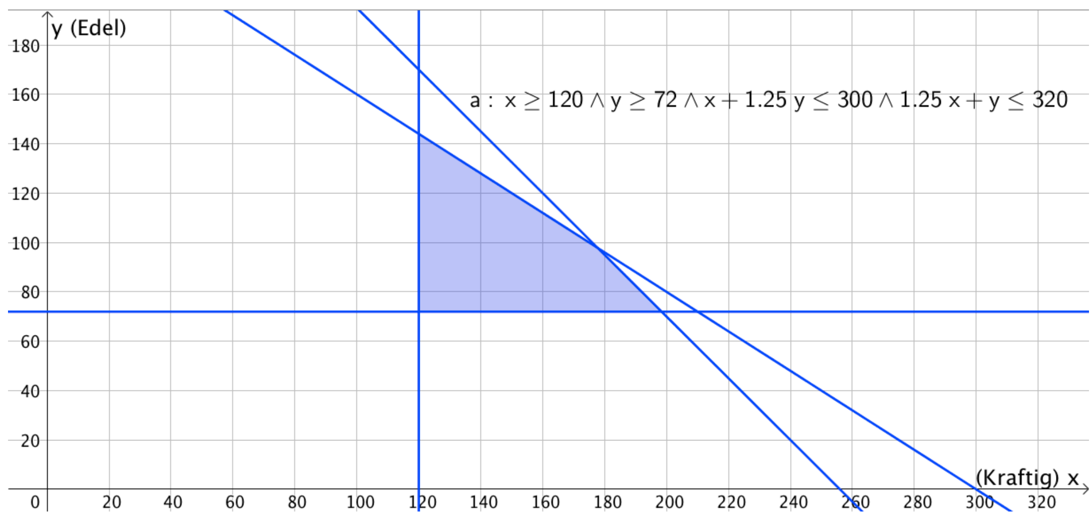
$$y \geq 72$$

$$x + 1{,}25y \leq 300$$

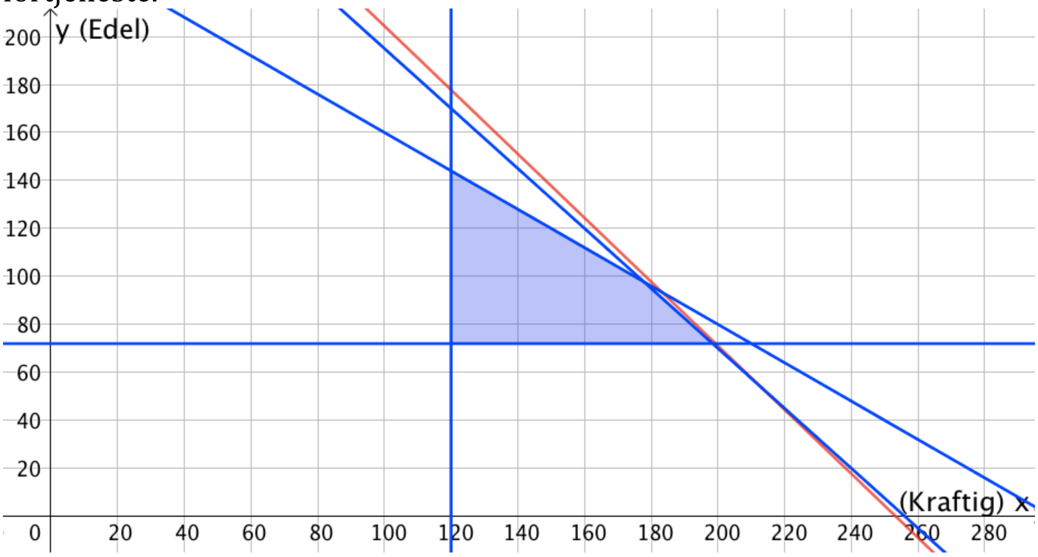
$$1{,}25x + y \leq 320$$

<u>Som skulle forklares</u>.

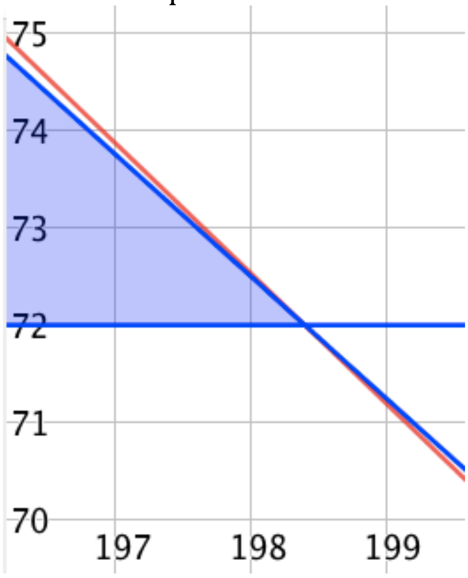
b)



c) Tegner nivålinja $16x+12y=0$ og parallellforskyver denne slik at den går gjennom hvert av hjørnene i området. Det hjørnet som gjør at nivålinja krysser y-aksen høyest oppe, gir oss den produksjonsmengden som gir høyest fortjeneste.



Ser at det er det nedre høyre hjørnet som gir den optimale produksjonsmengden. Zoomer inn på området rundt dette hjørnet:



Bedriften får størst overskudd ved å produsere 198 oster av typen Kraftig og 72 oster av typen Edel.

$$198\cdot 16kr+72\cdot 12kr=3168kr+864kr=4032kr$$

<u>Det største overskuddet bedriften kan ha per dag er 4032 kroner.</u>

Oppgave 2

a) Lar $O(x)$ være gitt ved $O(x)=ax^2+bx+c$.
Setter opp tre likninger ut fra informasjonen i oppgaveteksten, og løser disse, i CAS.

CAS

1	O(x):=a*x^2+b*x+c → $O(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	O'(450)=0 → $900\,a + b = 0$
3	O(600)=4400 → $360000\,a + 600\,b + c = 4400$
4	O(0)=-6000 → $c = -6000$
5	{$2, $3, $4} Løs: $\left\{\left\{a = -\frac{13}{225}, b = 52, c = -6000\right\}\right\}$

Definerer nå $O(x)$ på nytt, med de verdiene jeg fant for *a, b* og *c*, og bestemmer overskuddet ved produksjon av 300 oster per dag.

CAS

1	O(x):=-(13/225)x^2+52*x-6000 → $O(x) := -\frac{13}{225}x^2 + 52\,x - 6000$
2	O(300) → 4400

<u>Produksjon av 300 oster per dag gir et overskudd på 4400 kroner.</u>

b)

CAS

1	O(x):=-(13/225)x^2+52*x-6000 → $O(x) := -\frac{13}{225}x^2 + 52\,x - 6000$
2	O(150) → 500

Produksjon og salg av 150 oster gir et overskudd på 500 kroner. Når produksjonskostnaden for dette antallet er 16000 kroner, betyr det at inntektene er 16500 kroner.

$$\frac{16500}{150} = 110$$

<u>Salgsprisen er 110 kroner per ost.</u>