Løsningsforslag eksamen 2P våren 2023

Del 1

Oppgave 1

a) Siden utgangspunktet her er basisåret 2015, vil endring i indekspoeng tilsvare endring i prosent. Prisindeksen på brød steg med 13,3 poeng fra 2015 til 2021.

<u>Prisen for brød steg med 13,3 % fra 2015 til 2021.</u>

b) Hvor mange prosent steg prisen på brødet?

$$\frac{42-40}{40}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=\frac{5}{100}=5\%$$

Hvor mange prosent steg prisindeksen for brød?

$$\frac{109,2-104,5}{104,4}=\frac{4,7}{104,5}$$

5 er større enn 4,7 og 100 er mindre 104,5.

Da må verdien av brøken $\frac{5}{100}$ være større enn verdien av brøken $\frac{4,7}{104,5}$.

<u>Prisen for brødet steg mer enn prisindeksen for brød mellom 2017 og 2019.</u>

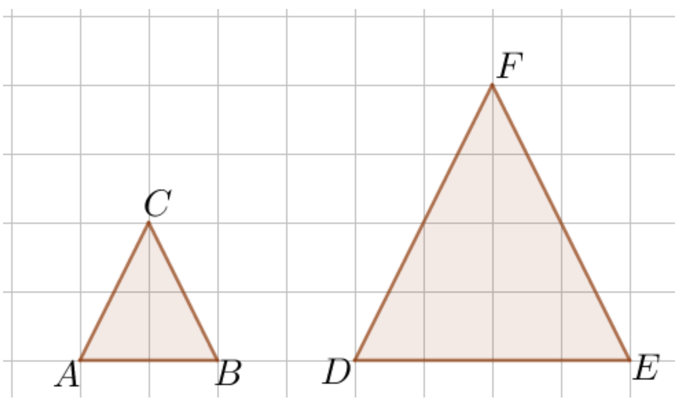
Oppgave 2

Dersom ΔABC har grunnlinje g og høyde h, har vi $A_{\Delta ABC}=\frac{g\cdot h}{2}$.

Siden ΔDEF er formlik med ΔABC kan ΔDEF ha grunnlinje $2g$ og høyde $2h$.

Da har vi $A_{\Delta DEF}=\frac{2g\cdot 2h}{2}=\frac{4\cdot g\cdot h}{2}=4\cdot\frac{g\cdot h}{2}=4\cdot A_{\Delta ABC}$.

Vi kan da lage følgende skisse:



Oppgave 3

Dersom man går opp i lønn, vil man ha anledning til å bruke mer penger. Det betyr ikke nødvendigvis at man kan kjøpe flere varer eller tjenester enn tidligere. Dersom prisen på varer og tjenester stiger mer enn lønnen vår, vil vi ha råd til færre ting enn før, selv om vi har mer penger å bruke. Vi sier da at vi har fått dårligere *kjøpekraft*. Dersom kjøpekraften går ned, altså at vi kan kjøpe færre varer og tjenester for lønnen vår, sier vi at *reallønnen* har gått ned. Reallønn er altså et mål på kjøpekraft.
Etter hvert som prisen på varer og tjenester endres, endes *konsumprisindeksen* (KPI). Konsumprisindeksen kan altså fortelle oss hvor mye dyrere (eller billigere) det har blitt å leve etter hvert som tiden går.
Dersom prisen på de varene og tjenestene Truls benytter seg av i hverdagen har økt med mer enn 16 % i løpet av de siste seks årene, har Truls dårligere råd nå enn for seks år siden, selv om lønnen hans har økt med 16 % i samme periode.
De færreste av oss, inkludert Truls, vil vel være særlig fornøyd med å få dårligere råd. Det er derfor nærliggende å tro at Truls sin lønn bør øke mer enn konsumprisindeksen før han vil være fornøyd med hvor mye lønnen har økt.

Oppgave 4

a) Den rette linja som er synkende fra venstre mot høyre er grafen til den lineære funksjonen *h*, gitt ved $h(x) = -x + 5$.

Vi kan se at denne linja skjærer parabelen, som er grafen til funksjonen *g*, gitt ved $g(x) = x^2 - 4x + 5$, i to punkter.

Vi kan da sette opp følgende likning som har to løsninger:

$\underline{\underline{x^2 - 4x + 5 = -x + 5}}$

Skjæringspunktene mellom grafene til *g* og *h* er $(0,5)$ og $(3,2)$.

Likningen har altså løsningene $\underline{\underline{x = 0 \vee x = 3}}$

b) De to rette linjene skjærer hverandre i punktet $(2,3)$.

Den ene linja er grafen til *h*, mens den andre er grafen til den lineære funksjonen *f*, gitt ved $f(x) = x + 1$.
Vi ser at grafen til *f* ligger over grafen til *h* for alle *x*-verdier større enn 2.
Vi kan derfor sette opp følgende ulikhet som bare har positive løsninger:

$\underline{\underline{x + 1 > -x + 5}}$.

Ulikheten har løsning $\underline{\underline{x > 2}}$

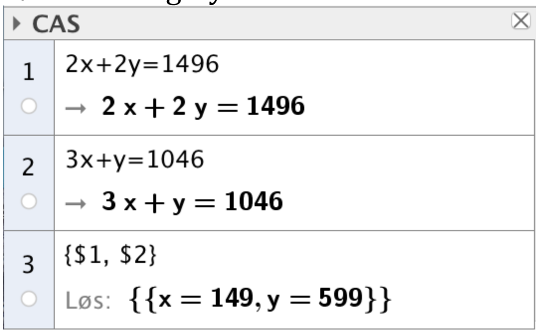
Del 2

Oppgave 1

Lar x være prisen for en T-skjorte og lar y være prisen for en bukse.
Da kan jeg sette opp følgende likningssystem:

$$\begin{bmatrix} 2x+2y=1496 \\ 3x+y=1046 \end{bmatrix}$$

Løser likningssystemet i CAS:



<u>Prisen for en T-skjorte er 149 kroner og prisen for en bukse er 599 kroner.</u>

Oppgave 2

Hvis gjennomsnittet skal være 4 kopper kaffe, må summen av antall kaffekopper kollegaene til Tore drakk dagen før være $4 \cdot 12 = 48$.

Summen av de 11 synlige svarene er $4+5+0+4+2+6+5+7+5+5+3=46$.
Svaret som skjules av kaffeflekken må altså være 2 dersom gjennomsnittet skal være 4.

Vi kan se at flesteparten av svarene er større enn 2, så Tore har et godt grunnlag for å anta at kollegaene sitt gjennomsnittlige kaffeinntak dagen før var mer en fire kopper.

Oppgave 3

Vekstfaktor ved 7 % økning: $100\% + 7\% = 107\% = 1,07$

$1,07^3 = 1,225$, så dersom prisen på en vare øker med 7 % per måned, vil varen være 22,5 % dyrere etter tre måneder.

Vekstfaktor ved 7 % nedgang: $100\% - 7\% = 93\% = 0,93$

$0,93^3 = 0,804$, som er er vekstfaktor ved 19,6 % nedgang.
Når vi går tilbake i tid, må vi dele på vekstfaktor istedenfor å gange med vekstfaktor.

$\dfrac{1}{0,804} = 1,243$, så dersom prisen på en vare avtar med 7 % per måned, vil varen ha vært 24,3 % dyrere for tre måneder siden.

Vi ser at vare B kostet mer for tre måneder siden enn det vare A vil koste om tre måneder. <u>Malin sin påstand stemmer ikke</u>.

Oppgave 4

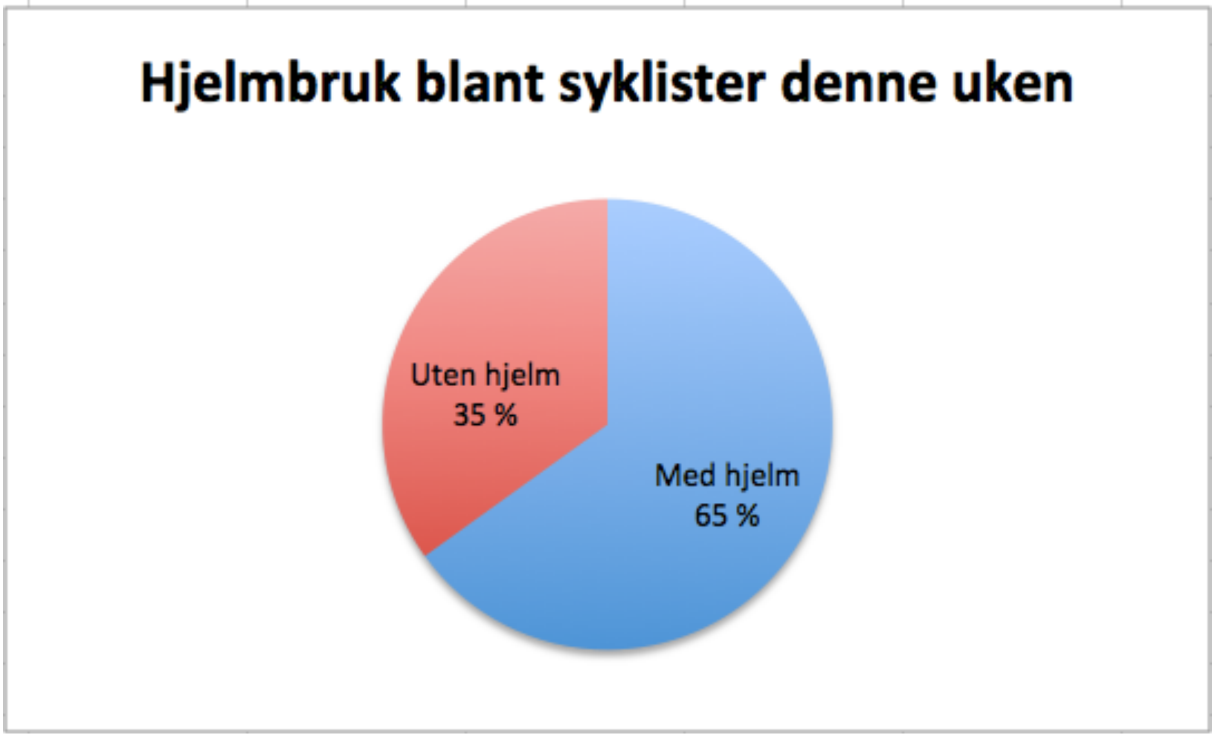
Starter med å lage et sektordiagram som illustrerer hjelmbruk hos syklistene samlet sett gjennom uken.
Starter med å lage en tabell, som jeg så bruker som utgangspunkt for sektor diagrammet:

	A	B	C	D
1	Ukedag	Syklister	Med hjelm	Uten hjelm
2	Mandag	10	7	3
3	Tirsdag	15	9	6
4	Onsdag	11	6	5
5	Torsdag	12	7	5
6	Fredag	15	12	3
7	Sum	63	41	22
8				

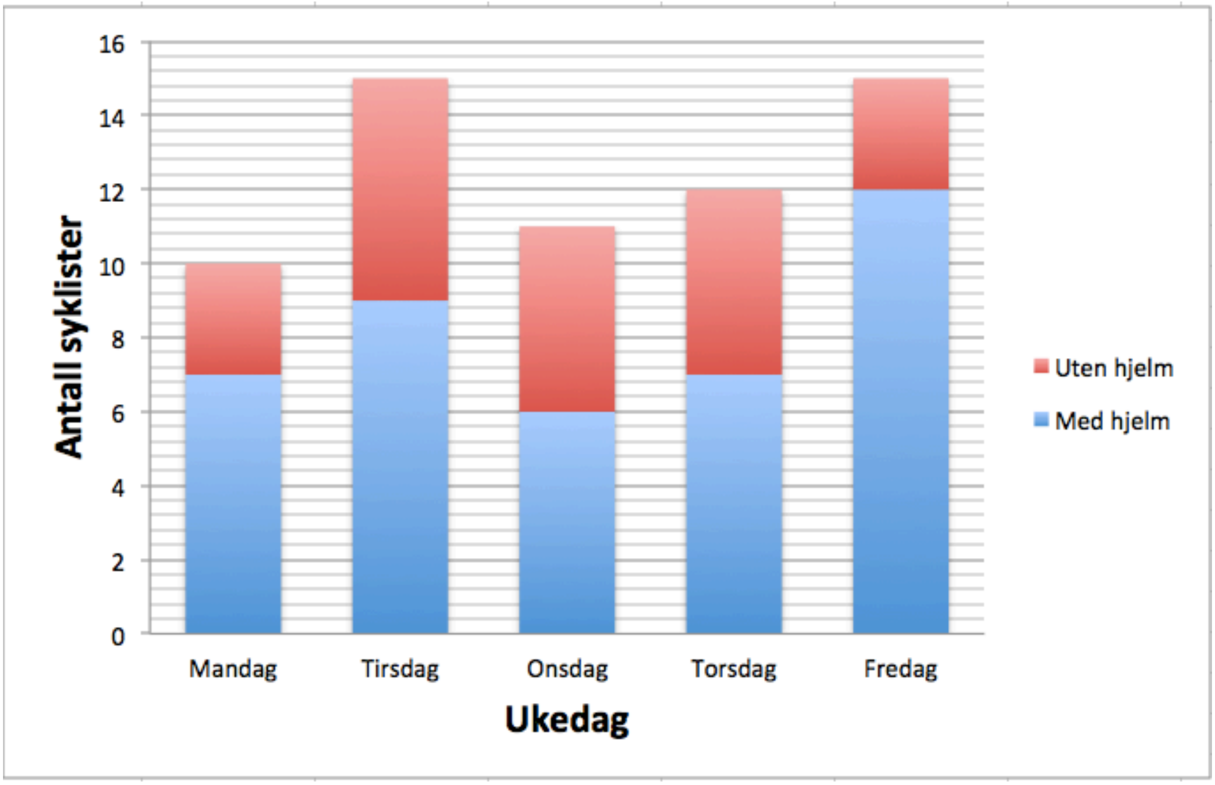
Formler:

	A	B	C	D
1	Ukedag	Syklister	Med hjelm	Uten hjelm
2	Mandag	10	7	=B2-C2
3	Tirsdag	15	9	=B3-C3
4	Onsdag	11	6	=B4-C4
5	Torsdag	12	7	=B5-C5
6	Fredag	15	12	=B6-C6
7	Sum	=SUMMER(B2:B6)	=SUMMER(C2:C6)	=SUMMER(D2:D6)

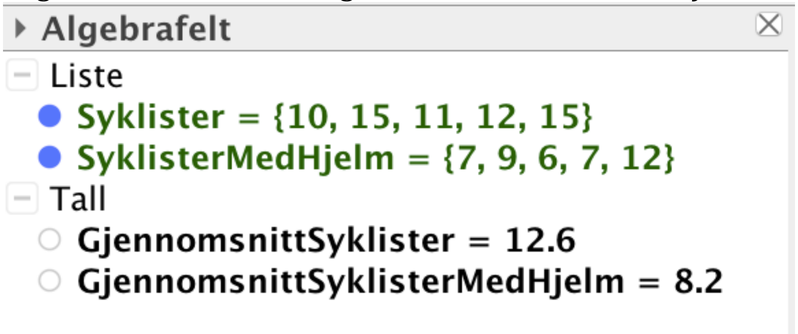
Markerer celle C1, D1, C7 og D7 og velger sektordiagram. Finner et passende oppsett.



Videre lager jeg et stablet søylediagram som gir en oversikt over syklister gjennom uken, samtidig som det illustrerer hjelmbruken dag for dag.
Markerer celle C1 til C6 og celle D1 til D6 og velger stablet stolpediagram.
Velger et passende oppsett, og setter celle A1 til A6 som kategoriakseetiketter.

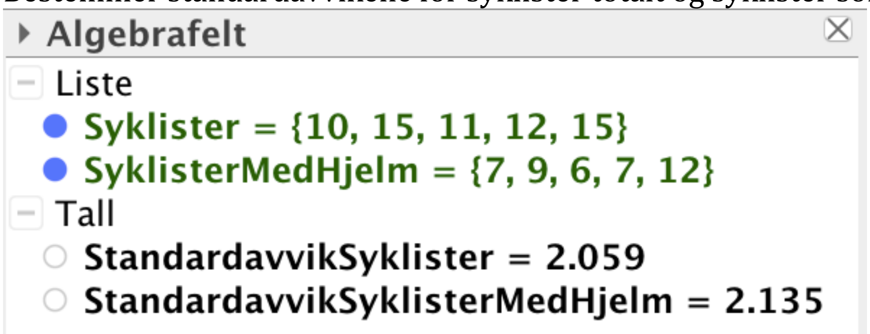


Beregner gjennomsnittlig antall syklister per dag, og gjennomsnittlig antall som bruker hjelm.
Lager lister i GeoGebra og bruker kommandoen *" Gjennomsnitt(<Liste med rådata>)".*



Det ble observert i gjennomsnitt 12,6 syklister per dag.
Antall syklister som brukte hjelm var i gjennomsnitt 8,2 per dag.

Bestemmer standardavvikene for syklister totalt og syklister som bruker hjelm.



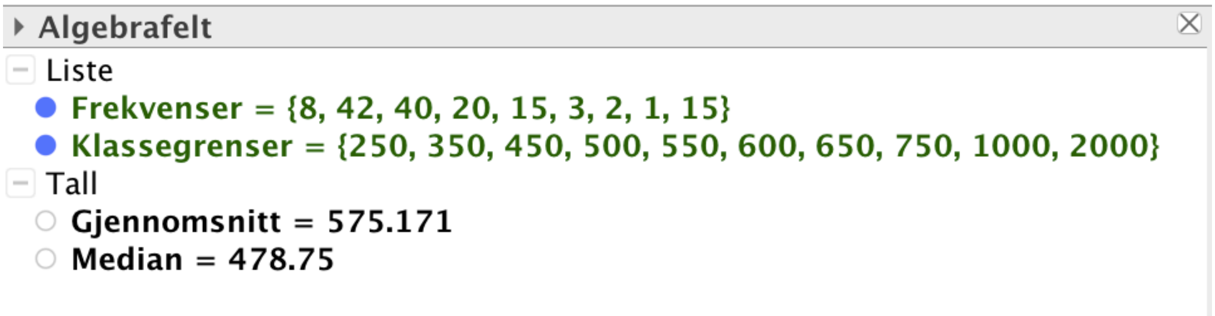
Standardavviket er omtrent 2,1 for begge kategorier.
Siden det er færre syklister som bruker hjelm enn det er syklister totalt, men standardavviket er tilnærmet likt, kan vi konkludere med at det er større forskjeller i

antallet som bruker hjelm fra dag til dag enn det er forskjeller i antallet syklister totalt. (Noe vi også kan se nokså greit i tabellen).
Det vil da være vanskelig å kunne si noe generelt om "hjelmvanene" til syklistene som passerte busstoppet i det aktuelle tidsrommet hver dag den uken undersøkelsen ble gjennomført.
Dersom vi antar at det stort sett er snakk om de samme syklistene, ser det ikke ut til at mange av disse har faste vaner når det kommer til hjelmbruk.
Dersom vi antar at syklistene i området har nokså faste vaner knyttet til hjelmbruk, ser det ikke ut til at det kan være stort sett de samme syklistene som har passert busstoppet i det aktuelle tidsrommet dag for dag gjennom uken.

Oppgave 5

a) Forutsetter at lønnen til de ansatte er jevnt fordelt innenfor de oppgitte intervallene, slik at vi kan anta at gjennomsnittslønnen til de ansatte er gjennomsnittet av endepunktene til intervallene.
Det vil for eksempel bety at vi antar at de gjennomsnittslønnen til de åtte med lavest lønn er 300 tusen kroner per år, de 42 neste har en gjennomsnittslønn på 400 tusen kroner per år osv.
Dette er en nødvendig forutsetning for at vi skal kunne anta at gjennomsnitt og median, beregnet ut fra oversikten, stemmer godt med virkeligheten.

Lager liste med klassegrenser og liste med frekvenser.
Bruker kommandoene
"Gjennomsnitt(<Liste med verdier (n) eller klassegrenser (n+1)>, <Liste med frekvenser (n)>)"
og
" Median(<Liste med tall>, <Liste med frekvenser>)"



<u>Gjennomsnittslønnen er 575 171 kroner, mens medianlønnen er 478 750 kroner.</u>

b) Vi kan se at minst 110 ansatte av 146 ansatte totalt har en lønn som er lavere enn gjennomsnittslønnen. Det kan tyde på at de 15 ansatte som har en årslønn på mellom én og to millioner kroner drar totalen såpass høyt opp at gjennomsnittslønnen blir "falskt høy". Vi ser klart av tabellen at en vesentlig større andel av de ansatte har en årslønn som ligger i nærheten av medianlønnen.

Basert på redegjørelsen ovenfor, mener jeg at ***medianen*** er det sentralmålet som er best egnet til å beskrive bedriftens lønnsnivå.

Oppgave 6

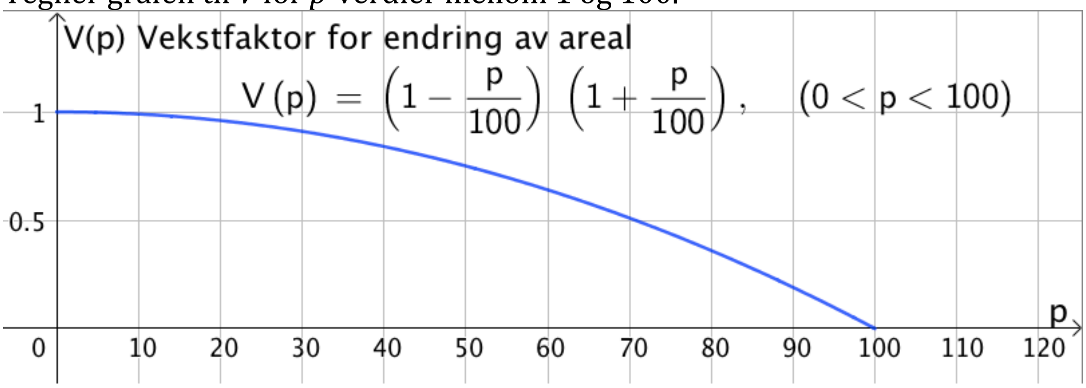
La oss tenke oss at den gitte prosentandelen er 5 %.
I utgangspunktet vil da arealet av parkeringsplassen være gitt ved $A = l \cdot b$.
Dersom lengden økes med 5 %, mens bredden minskes med 5 %, vil det nye arealet være $l \cdot 1{,}05 \cdot b \cdot 0{,}95 = 0{,}9975 \cdot l \cdot b = 0{,}9975A$.
Vi ser altså at arealet av den nye parkeringsplassen vil være 99,75 % av arealet av den gamle. Parkeringsplassen blir altså mindre i dette tilfellet.

Det kan altså tyde på at det er påstand 1 som er riktig.

For å være enda mer på den sikre siden, kan se nærmere på hva som skjer med produktet av vekstfaktorene etter hvert som vi endrer prosentandelen bredden og lengden skal henholdsvis minskes og økes med.

Når bredden skal minskes med *p* prosent, er vekstfaktoren $1 - \dfrac{p}{100}$.

Når bredden skal økes med *p* prosent, er vekstfaktoren $1 + \dfrac{p}{100}$.
Så hver gang den prosentvise endringen skjer, i lengde og bredde, vil arealet multipliseres med produktet av disse vekstfaktorene, altså $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$.
Vi kan da se nærmere på hvordan verdien av dette produktet vil endres etter hvert som vi endrer den gitte prosentandelen.
Jeg lager da en funksjon *V*, gitt ved $V(p) = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$, der *V* er vekstfaktoren for den prosentvise endringen i areal når lengde og bredde endres *p* prosent i henhold til instruksen. Siden vi ikke kan minske bredden med mer enn 100 %
(da "forsvinner" den), kan heller ikke lengden øke mer enn 100%.
Tegner grafen til *V* for *p*-verdier mellom 1 og 100.



Vi ser at vekstfaktoren for endringen av arealet blir mindre og mindre etter hvert som *p* øker. Det betyr at den nye parkeringsplassen vil bli mindre, uavhengig av hvilken prosentandel lengde og bredde endres.

<u>Påstand 1 er den riktige.</u>

Oppgave 7

a) Legger inn nødvendige formler i linje 12, 13 og 14 og øker endepunktet i ”rangen” i linje 10, helt til hele planen er på plass.

```
1  # Definerer variabler
2  restlån = 100000
3  terminbeløp = 6378
4  rentefot = 2
5
6  #Overskrifter
7  print("Måned           Terminbeløp     Renter          Avdrag          Restlån")
8
9
10 for måned in range(1, 20):
11
12     renter = (rentefot/100)*restlån
13     avdrag = terminbeløp - renter
14     restlån = restlån - avdrag
15
16     # Skriver ut i fem kolonner ved å bruke tabulatorer sep = "\t\t"
17     # Runder av beløpene til to desimaler ved å bruke round
18     print(måned,
19           round(terminbeløp, 2),
20           round(renter, 2),
21           round(avdrag, 2),
22           round(restlån, 2), sep = "\t\t")
```

Måned	Terminbeløp	Renter	Avdrag	Restlån
1	6378	2000.0	4378.0	95622.0
2	6378	1912.44	4465.56	91156.44
3	6378	1823.13	4554.87	86601.57
4	6378	1732.03	4645.97	81955.6
5	6378	1639.11	4738.89	77216.71
6	6378	1544.33	4833.67	72383.05
7	6378	1447.66	4930.34	67452.71
8	6378	1349.05	5028.95	62423.76
9	6378	1248.48	5129.52	57294.24
10	6378	1145.88	5232.12	52062.12
11	6378	1041.24	5336.76	46725.36
12	6378	934.51	5443.49	41281.87
13	6378	825.64	5552.36	35729.51
14	6378	714.59	5663.41	30066.1
15	6378	601.32	5776.68	24289.42
16	6378	485.79	5892.21	18397.21
17	6378	367.94	6010.06	12387.15
18	6378	247.74	6130.26	6256.9
19	6378	125.14	6252.86	4.03

Her måtte jeg justere ”rangen” slik at det ble en riktig plan.
Ved å utvide programmet litt, kan man sørge for at man kan sette en så stor ”range” man vil, men at for-løkken stopper når avdraget er større en restlånet, og man er nesten i mål med nedbetalingen. Så legger man til en egen ”print” til slutt som skriver ut den siste terminen.

Se neste side…

```python
# Definerer variabler
restlån = 100000
terminbeløp = 6378
rentefot = 2

#Overskrifter
print("Måned           Terminbeløp     Renter          Avdrag          Restlån")


for måned in range(1, 100):

    renter = (rentefot/100)*restlån
    avdrag = terminbeløp - renter
    restlån = restlån - avdrag

    # Skriver ut i fem kolonner ved å bruke tabulatorer sep = "\t\t"
    # Runder av beløpene til to desimaler ved å bruke round
    print(måned,
          round(terminbeløp, 2),
          round(renter, 2),
          round(avdrag, 2),
          round(restlån, 2), sep = "\t\t")
    if restlån < avdrag:
        break
print(måned+1,round(restlån+0.05*restlån, 2), round(0.05*restlån, 2), round(restlån, 2),0, sep = "\t\t")

```

Måned	Terminbeløp	Renter	Avdrag	Restlån
1	6378	2000.0	4378.0	95622.0
2	6378	1912.44	4465.56	91156.44
3	6378	1823.13	4554.87	86601.57
4	6378	1732.03	4645.97	81955.6
5	6378	1639.11	4738.89	77216.71
6	6378	1544.33	4833.67	72383.05
7	6378	1447.66	4930.34	67452.71
8	6378	1349.05	5028.95	62423.76
9	6378	1248.48	5129.52	57294.24
10	6378	1145.88	5232.12	52062.12
11	6378	1041.24	5336.76	46725.36
12	6378	934.51	5443.49	41281.87
13	6378	825.64	5552.36	35729.51
14	6378	714.59	5663.41	30066.1
15	6378	601.32	5776.68	24289.42
16	6378	485.79	5892.21	18397.21
17	6378	367.94	6010.06	12387.15
18	6378	247.74	6130.26	6256.9
19	6378	125.14	6252.86	4.03
20	4.24	0.2	4.03	0

Her hadde Sofie allerede startet å lage et program der hun brukte en "for-løkke". Skulle jeg lagd et tilsvarende program fra bunnen av selv, istedenfor å ta utgangspunkt i Sofie sitt, ville jeg nok heller valgt å bruke en "while-løkke" som kjørte så lenge restlånet var større enn avdraget.

b) Dersom Sofie aldri betaler mer enn det gitte terminbeløpet, vil det ta 20 måneder før lånet er nedbetalt, men siste terminbeløp blir på bare noen kroner.
Man kan anta at hun har mulighet til å betale restlånet i sammenheng med betalingen den 19. måneden, ved at det siste terminbeløpet blir noen kroner høyere enn de 18 første. I så fall vil lånet være nedbetalt etter 19 måneder.