Utdanningsdirektoratet

Eksamen

19.05.2015

REA3022 Matematikk R1

Ny eksamensordning

Del 1:
3 timar (utan hjelpemiddel) /
3 timer (uten hjelpemidler)

Del 2:
2 timar (med hjelpemiddel) /
2 timer (med hjelpemidler)

Minstekrav til digitale verktøy på datamaskin:

- Grafteiknar/graftegner
- CAS

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 5 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

b) $g(x) = \ln(x-2)$

c) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

a) Vis at $(x-2)$ er ein faktor i $P(x)$.

b) Bruk mellom anna polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ med lineære faktorar.

c) Bestem $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x-2}$

Oppgåve 3 (3 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4}$$

Oppgåve 4 (2 poeng)

Ein sirkel er gitt ved likninga

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$$

Bestem sentrum S og radius r i sirkelen.

Oppgåve 5 (5 poeng)

Vektoren $\vec{v} = [3, 4]$ er gitt.

a) Bestem ein vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsett retta.

b) Bestem ein vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

c) Bestem konstantane k og t slik at

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{w}$$

d) Bestem ein vektor $\vec{x}$ som har same retning som $\vec{v}$ og som har lengd lik 7.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Binomialkoeffisientane er gitt ved $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

a) Bestem $\binom{12}{2}$. Vis at $\binom{n}{1} = n$.

b) Bruk det du fann i oppgåve a) til å løyse likninga $\dfrac{\binom{x}{1} \cdot \binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{6}{11}$

Oppgåve 7 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad , \quad x \in \langle -1 \, , 4 \rangle$$

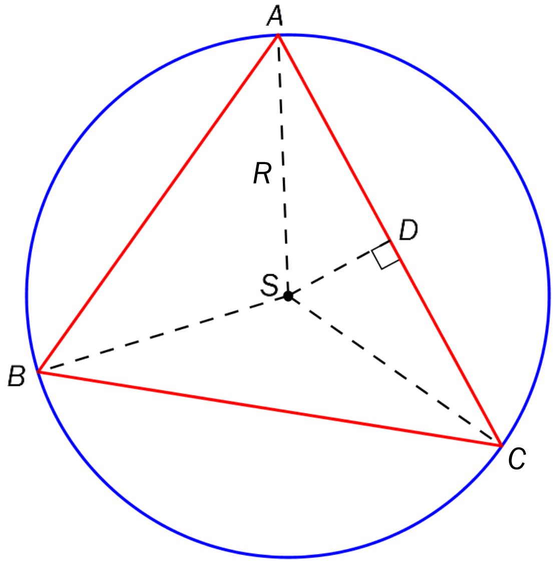
a) Bruk $f'(x)$ til å avgjere kvar $f(x)$ veks og kvar $f(x)$ minkar. Bestem x-verdien til eventuelle topp- eller botnpunkt.

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle vendepunkt på grafen til f.

c) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 8 (6 poeng)

Ein vilkårleg $\triangle ABC$ er gitt. Ein sirkel har radius R og sentrum i S og omskriv $\triangle ABC$.
Ein normal frå S til sida AC har fotpunkt D. Sjå skissa nedanfor.



a) Forklar at $\angle B = \angle DSA$.

Vi set $AC = b$.

b) Vis at $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

Vi set $BC = a$ og $AB = c$.

c) Bruk tilsvarande resonnement som i oppgåve b) til å vise at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Oppgåve 9 (2 poeng)

Løys likninga

$$9^x - 3^x - 12 = 0$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Ein sirkel har desse eigenskapane:

- Sentrum i sirkelen ligg på linja $y = x$
- Sentrum i sirkelen ligg like langt frå origo som frå punktet $A(6\,,\,0)$
- Origo og punktet A ligg begge på sirkelperiferien

a) Teikn sirkelen i eit koordinatsystem.

b) Bestem ei likning for sirkelen.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Bilane i ein bilkø held ein fart på v km/h. Ifølgje køteori vil talet på bilar N som passerer ein bestemt stad per minutt vere gitt ved modellen

$$N(v) = \frac{16{,}7v}{4 + 0{,}25v + 0{,}006v^2}$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til N for $v \in [0,\,120]$.

b) Bestem grafisk kva farten bør vere for at minst 25 bilar skal kunne passere staden per minutt.

c) Bestem grafisk kva farten må vere for at flest mogleg bilar skal kunne passere staden per minutt. Kor mange bilar passerer staden per minutt da?

Oppgåve 3 (6 poeng)

Posisjonen til to båtar A og B er gitt ved

$$\vec{r_A}(t) = [18t - 8\,,\ 10 - 3t]$$

$$\vec{r_B}(t) = [10t\,,\ 20 - 6t]$$

Alle lengdemål er gitt i kilometer og tida t er gitt i timar.

a) Bestem farten (banefarten) til kvar av båtane.

b) Forklar at avstanden d mellom båtane er gitt ved

$$d(t) = \sqrt{(8t - 8)^2 + (3t - 10)^2}$$

c) Når er denne avstanden minst? Kor langt frå kvarandre er båtane da?

Oppgåve 4 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Om denne funksjonen veit vi at

- f har nullpunkt i $x = 1$
- $x = 2$ er x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f
- Grafen til f går gjennom punktet $(3,\ 4)$

a) Sett opp tre likningar som svarer til opplysningane ovanfor.

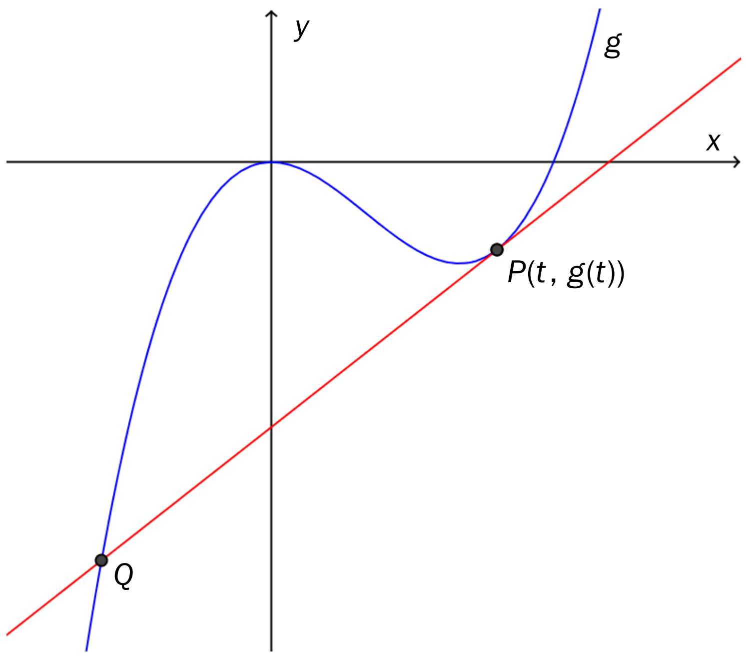
b) Bruk CAS til å bestemme konstantane a, b og c.

Oppgåve 5 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har ein tangent i punktet $P(t\ ,\ g(t))$. Tangenten skjer grafen til g i eit anna punkt Q. Sjå skissa nedanfor.



a) Vis at tangenten har likninga

$$y = (3at^2 - 2t)\,x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatane til Q, uttrykt ved a og t.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

b) $g(x) = \ln(x-2)$

c) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

Oppgave 2 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

a) Vis at $(x-2)$ er en faktor i $P(x)$.

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ med lineære faktorer.

c) Bestem $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x-2}$

Oppgave 3 (3 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

En sirkel er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$$

Bestem sentrum S og radius r i sirkelen.

Oppgave 5 (5 poeng)

Vektoren $\vec{v} = [3,\ 4]$ er gitt.

a) Bestem en vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsatt rettet.

b) Bestem en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

c) Bestem konstantene k og t slik at

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{w}$$

d) Bestem en vektor $\vec{x}$ som har samme retning som $\vec{v}$ og som har lengde lik 7.

Oppgave 6 (4 poeng)

Binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

a) Bestem $\binom{12}{2}$. Vis at $\binom{n}{1} = n$.

b) Bruk det du fant i oppgave a) til å løse likningen $\dfrac{\binom{x}{1} \cdot \binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{6}{11}$

Oppgave 7 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x \cdot e^{-x} \quad , \quad x \in \langle -1\ ,\ 4 \rangle$$

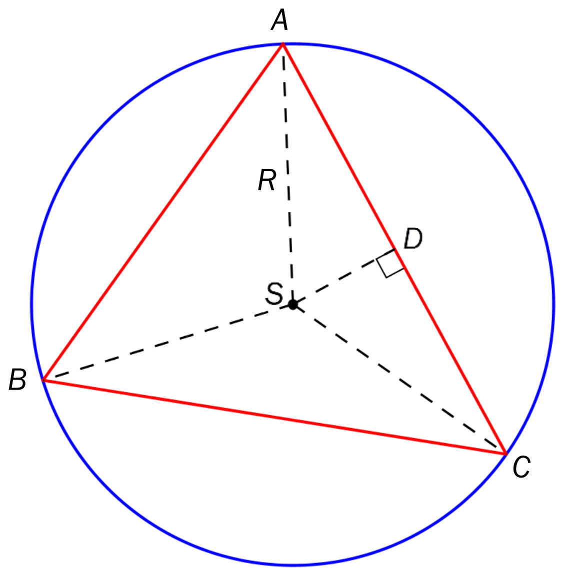
a) Bruk $f'(x)$ til å avgjøre hvor $f(x)$ vokser og hvor $f(x)$ avtar. Bestem x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter.

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (6 poeng)

En vilkårlig $\triangle ABC$ er gitt. En sirkel har radius R og sentrum i S og omskriver $\triangle ABC$.
En normal fra S til siden AC har fotpunkt D. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at $\angle B = \angle DSA$.

Vi setter $AC = b$.

b) Vis at $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

Vi setter $BC = a$ og $AB = c$.

c) Bruk tilsvarende resonnement som i oppgave b) til å vise at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Løs likningen

$$9^x - 3^x - 12 = 0$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

En sirkel har følgende egenskaper:

- Sentrum i sirkelen ligger på linjen $y = x$
- Sentrum i sirkelen ligger like langt fra origo som fra punktet $A(6\,,\,0)$
- Origo og punktet A ligger begge på sirkelperiferien

a) Tegn sirkelen i et koordinatsystem.

b) Bestem en likning for sirkelen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Bilene i en bilkø holder en fart på v km/h. Ifølge køteori vil antall biler N som passerer et bestemt sted per minutt være gitt ved modellen

$$N(v) = \frac{16{,}7v}{4 + 0{,}25v + 0{,}006v^2}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til N for $v \in [0,\, 120]$.

b) Bestem grafisk hva farten bør være for at minst 25 biler skal kunne passere stedet per minutt.

c) Bestem grafisk hva farten må være for at flest mulig biler skal kunne passere stedet per minutt. Hvor mange biler passerer stedet per minutt da?

Oppgave 3 (6 poeng)

Posisjonen til to båter A og B er gitt ved

$$\vec{r_A}(t) = [18t - 8\ ,\ 10 - 3t]$$

$$\vec{r_B}(t) = [10t\ ,\ 20 - 6t]$$

Alle lengdemål er gitt i kilometer, og tiden t er gitt i timer.

a) Bestem farten (banefarten) til hver av båtene.

b) Forklar at avstanden d mellom båtene er gitt ved

$$d(t) = \sqrt{(8t-8)^2 + (3t-10)^2}$$

c) Når er denne avstanden minst? Hvor langt fra hverandre er båtene da?

Oppgave 4 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Om denne funksjonen vet vi at

- f har nullpunkt i $x = 1$
- $x = 2$ er x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f
- Grafen til f går gjennom punktet $(3,\ 4)$

a) Sett opp tre likninger som svarer til opplysningene ovenfor.

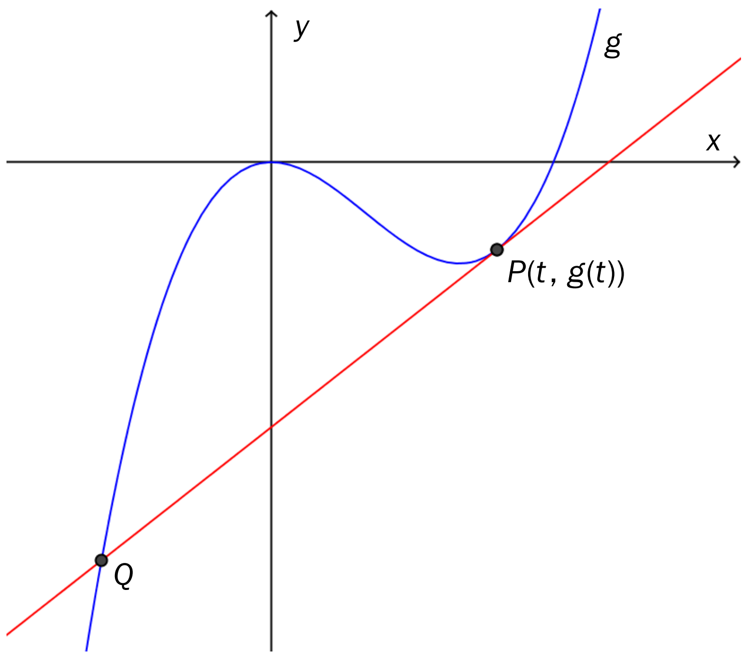
b) Bruk CAS til å bestemme konstantene a, b og c.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t\,,\,g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a) Vis at tangenten har likningen

$$y = (3at^2 - 2t)\,x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet