

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^{-2x}$

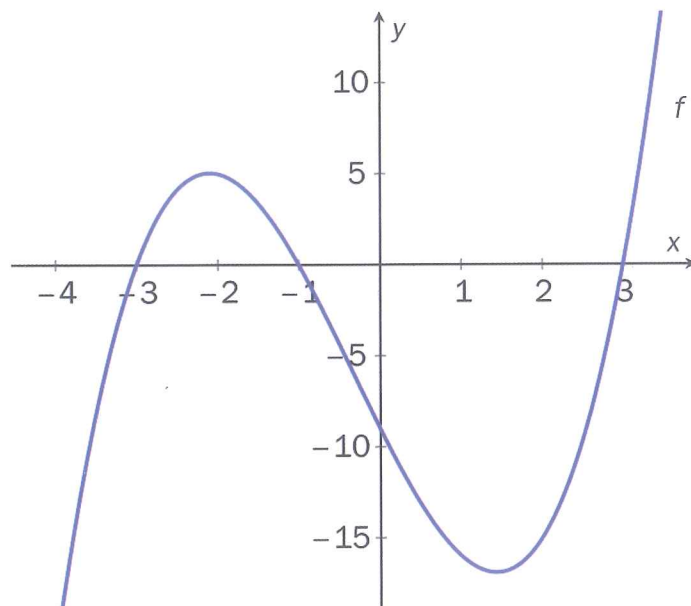
b) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

c) $h(x) = (3x + 1) \cdot e^x + 2$

Oppgave 2 (3 poeng)

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f gitt ved

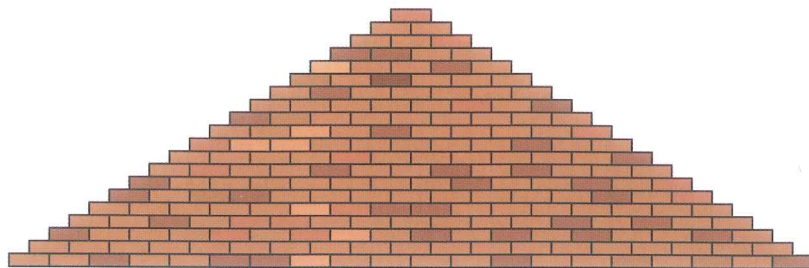
$$f(x) = x^3 + x^2 + kx + k, \quad D_f = \mathbb{R}$$



- a) ✎ Faktoriser $f(x)$ med lineære faktorer.
- b) Bestem verdien for k ved regning.

Oppgave 3 (3 poeng)

- a) Forklar hva det vil si at en rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ er aritmetisk.
- b) En murer skal lage en vegg slik figuren viser. Bruk teori om rekker til å bestemme hvor mange murstein mureren trenger, når han vet at det er totalt 20 rader med murstein.



Oppgave 4 (4 poeng)

Tallet $x = 0,555 \dots$ består av uendelig mange 5-tall etter komma.

- a) Forklar at vi kan se på dette tallet som summen av den uendelige geometriske rekken

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \dots$$

Bruke dette til å skrive x som en brøk.

- b) Tallet $y = 0,232323 \dots$ kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk dette til å skrive y som en brøk.

Oppgave 5 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

- a) Vis at $x = -1$ er et nullpunkt til f . Bestem eventuelt andre nullpunkter.
- b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f .
- c) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f .
- d) Lag en skisse av grafen til f .

Oppgave 6 (5 poeng)

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	0	1	2
$P(X)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien $E(X) = \frac{1}{2}$ og variansen $\text{Var}(X) = \frac{1}{2}$.

a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = \frac{1}{2} \\ a + b + 9c = 2 \end{cases}$$

b) Bestem ved regning verdien av a , b og c .

Oppgave 7 (4 poeng)

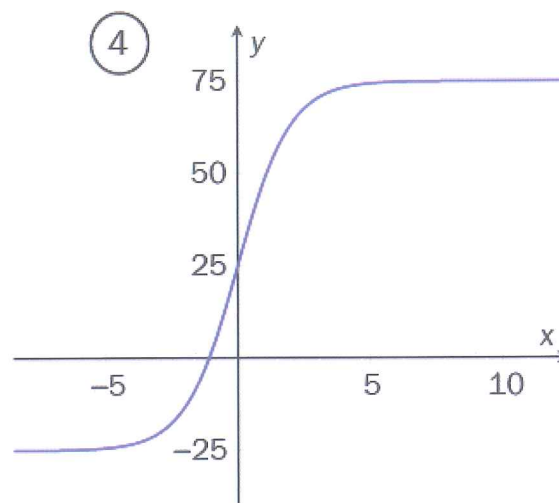
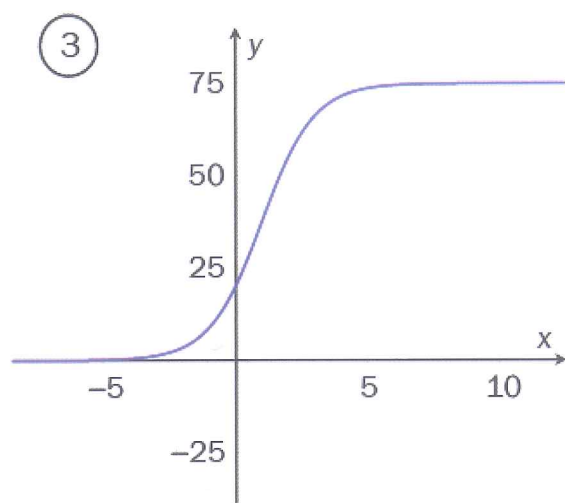
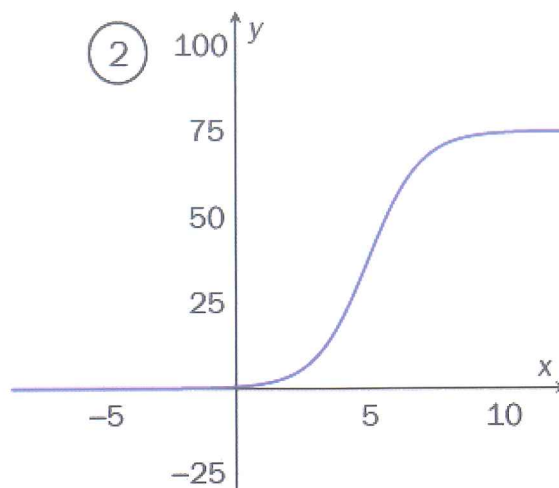
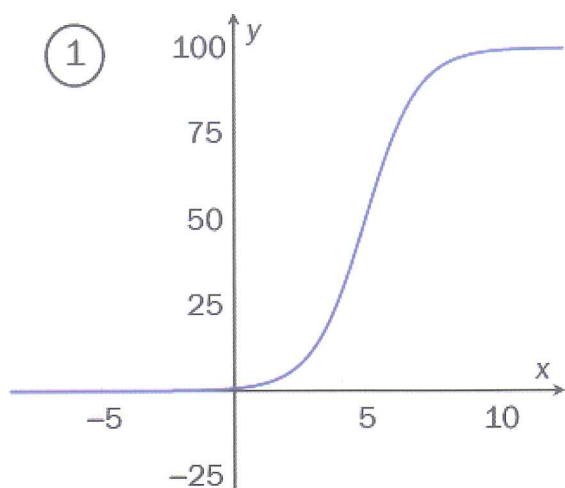
I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.



Vekten X av voksne hjortebukker i en kommune er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 100$ kg og med standardavvik $\sigma = 20$ kg.

- a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mindre enn 90 kg.
- b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mellom 90 og 110 kg.

Oppgave 8 (4 poeng)



På figuren ovenfor er det tegnet fire grafer.

Avgjør hvilken graf som hører til funksjonen f og hvilken graf som hører til funksjonen g når

$$f(x) = \frac{100}{1 + e^{-x}} - 25 \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{100}{1 + e^{-(x-5)}}$$

Begrunn svaret ditt.

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

De daglige kostnadene i kroner til en bedrift som produserer x enheter av en vare per dag er gitt i tabellen nedenfor.

x	40	50	60	70	80	90	100
$K(x)$	1200	2200	3600	5500	7800	10500	13700

- a) Bruk regresjon til å bestemme et andregradsuttrykk for $K(x)$.

Inntektene I kroner ved salg av x enheter per dag er gitt ved

$$I(x) = p \cdot x, \text{ der } p \text{ er prisen på varen og } x \in [40, 100]$$

- b) Hva må p være dersom overskuddet skal bli størst når det produseres og selges 75 enheter per dag. Hvor stort blir overskuddet da?

Bedriften har gjort en markedsanalyse. Sammenhengen mellom antall solgte enheter x og prisen p viser seg å være

$$x = 200 - 1,2p$$

- c) Bestem hvilken pris som vil gi det største overskuddet per dag.

Oppgave 2 (6 poeng)

I lungene blir oksygen bundet til hemoglobin og transportert rundt i kroppen av blodet. Hemoglobinet er mettet når det ikke er i stand til å ta opp mer oksygen.

Den engelske fysiologen A. V. Hill oppdaget i 1910 en sammenheng mellom deltrykket til oksygenet i lungene og metningsgraden g .

Han fant at under visse forhold er

$$g(x) = \frac{x^3}{x^3 + 25000}, \quad x > 0$$

Her er deltrykket x målt i mmHg (millimeter kvikksølv).

- a) Bruk graftegner til å tegne grafen til g .
- b) Bestem grafisk hva deltrykket x må være for at metningsgraden $g(x)$ skal være større enn 0,8.
- c) Bruk derivasjon til å vise at metningsgraden øker dersom deltrykket øker. Forklar.



A.V. Hill (1886 – 1977)

Nobelprisvinner 1922
(fysiologi eller medisin)

Oppgave 3 (3 poeng)

For at en bestemt type hamburgere skal kunne bli merket med «grønt nøkkelhull», må de inneholde høyst 10 g fett. I en kontroll viste det seg fettinnholdet (i gram) i 10 tilfeldig valgte hamburgere var

11, 10, 11, 12, 9, 10, 11, 12, 10, 11

Vi antar at fettinnholdet er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 10$ g og med standardavvik $\sigma = 3$ g.

Bedriften oppgir at fettinnholdet er 10 g. En forbrukergruppe påstår at fettinnholdet er for stort til at hamburgerne kan bli merket med grønnt nøkkelhull.

Bruk hypotesetesting til å vurdere påstanden. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 4 (4 poeng)

Kristin bestemmer seg for å spare penger til hun blir pensjonist. Hun ønsker å ha 2 millioner kroner på konto den dagen hun fyller 60 år. For å oppnå dette vil hun sette inn et fast årlig beløp, første gang når hun fyller 25 år og siste gang når hun fyller 59 år. Hun regner med en årlig rente på 5 % i hele perioden.

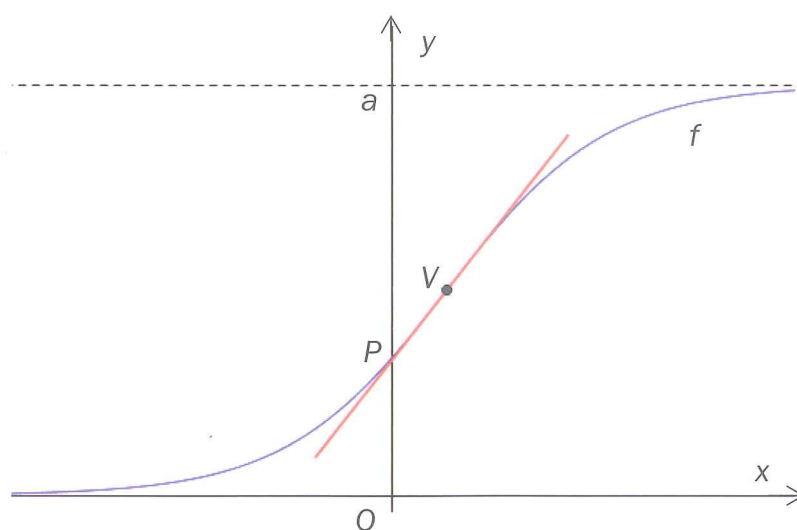
- a) Vis at hun må sette inn omtrent 21 000 kroner hvert år.

Den dagen Kristin fyller 60 år, vil hun ta ut 200 000 kroner. Det samme vil hun gjøre på hver av de fire neste fødselsdagene.

- b) Hvor stort beløp har Kristin på kontoen den dagen hun fyller 65 år?

Oppgave 5 (5 poeng)

Grafen til en logistisk funksjon $f(x) = \frac{a}{1+b \cdot e^{-k \cdot x}}$ er skissert nedenfor.

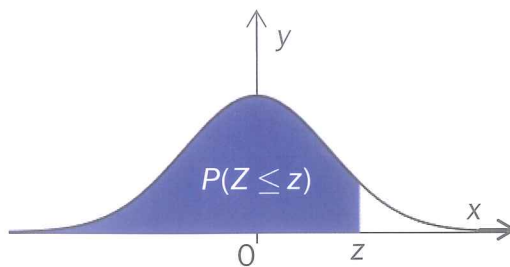


- a) Grafen skjærer y-aksen i punktet P . Bestem y -koordinaten til P uttrykt ved a og b .
- b) Bruk CAS og derivasjon til å vise at vendepunktet V har y -koordinat lik $\frac{a}{2}$.
- c) Bruk CAS til å vise at tangenten i V har stigningstall lik $\frac{a \cdot k}{4}$.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3,09 \leq z \leq 3,09$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990