GeoGebra 5.0

Versjon 5.0.65.0 - 18. februar 2015

CAS

Østerås 22. februar 2015

Odd Heir

Innhold

Mac

Hurtigtasten «Alt + en tast» i Windows erstattes med «Ctrl + en tast» i Mac.

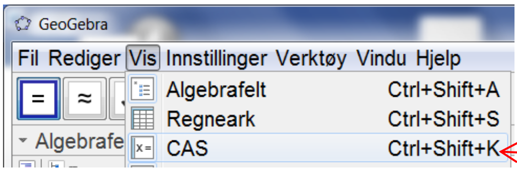
Klammen [har hurtigtasten «Alt + 8»,] har tilsvarende Alt + 9.

Klammen { har hurtigtasten «Alt + Shift + 8», } har tilsvarende Alt + Shift + 9.

CAS-verktøyet i GeoGebra

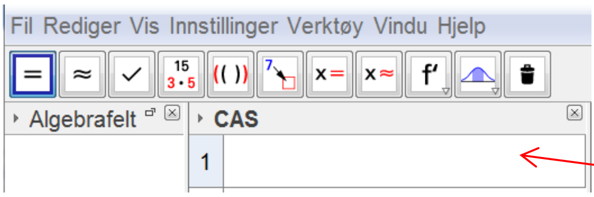
CAS: Computer Algebra System

CAS-verktøyet i GeoGebra finner du her:



Klikk på CAS

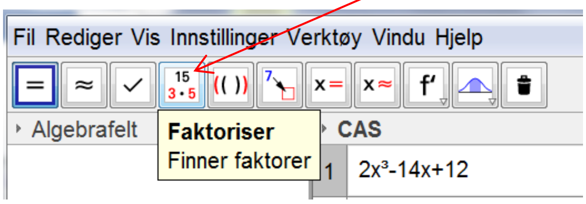
Da dukker arbeidsvinduet i CAS opp:



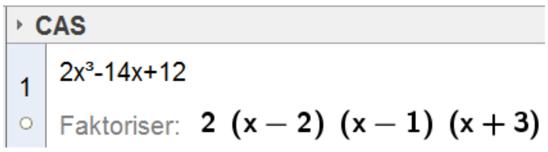
CAS-vinduet

Faktorisering

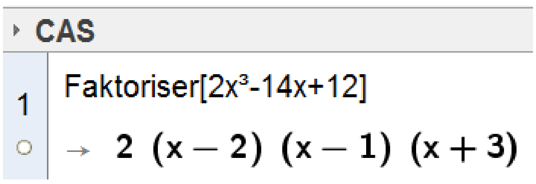
Skriv inn $2x^3 - 14x + 12$ i CAS-vinduet og klikk på Faktoriser. (Heltallig eksponent: Alt + 3)



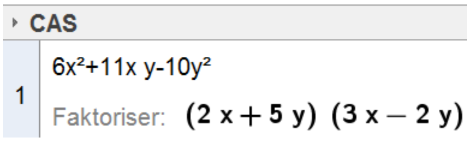
Da får du dette bildet:



Du kan også bruke kommandoen Faktoriser[<Polynom>]:



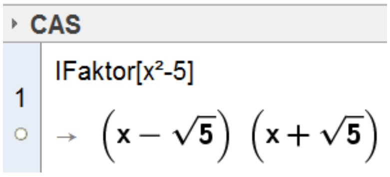
Faktoriser $6x^2 + 11xy - 10y^2$



NB! Legg merke til mellomrommet mellom *x* og y. Her kan du alternativt bruke *.

Faktoriser $x^2 - 5$.

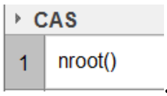
Med irrasjonale røtter bruker vi IFaktor[<Uttrykk>].



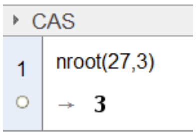
Nb! IFaktor kan også brukes på rasjonale røtter.

Utregning av *n*-te røtter

For å legge inn kvadratroten av tall, kan vi bruke sqrt() eller Alt + r.

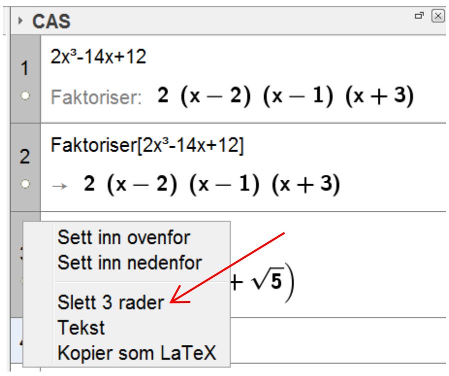
Ved utregning av *n*-te røtter generelt kan vi bruke kommandoen .

$\sqrt[3]{27}$ finner vi slik:



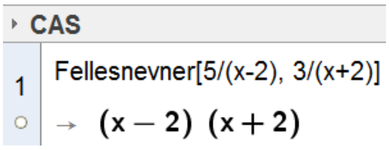
Slette rader

Hvis du vil slette innlagte rader, kan du markere venstre del av radene (delen med rad-numrene) ved å dra mustasten over med venstre mustast nede. Høyreklikk et sted i det markerte området og klikk på ønsket antall rader som skal slettes.



Finne felles nevner

Skriv inn leddene og trykke Enter.

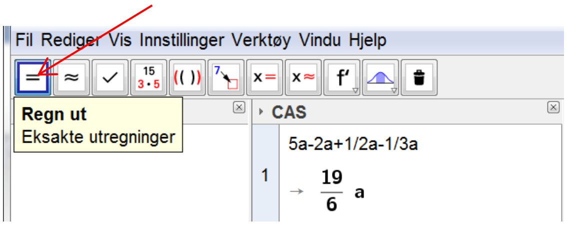


Regner ut og gir svaret eksakt med brøk

Regn ut $5a-2a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a$.

Skriv inn $5a-2a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a$ i CAS-vinduet og klikk på $\boxed{=}$, Regn ut (Eksakte utregninger).

(Hvis $\boxed{=}$ - ikonet er aktivt, kan du trykke Enter.)

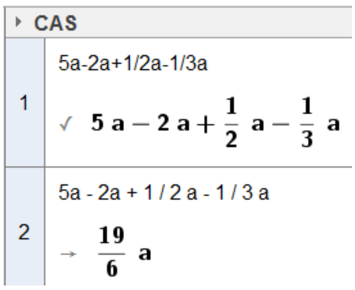


Kontroll av innskriving

Ved kontroll av innskrivning kan du bruke ikonet $\boxed{\checkmark}$. Eller Alt + Enter.

Etter at du har skrevet inn teksten, klikker du på ikonet.

For å fortsette klikker du på den «oversatte» teksten i 1 eller trykk på ordmellomromtasten. Teksten blir da kopiert til 2, og du kan fortsette.

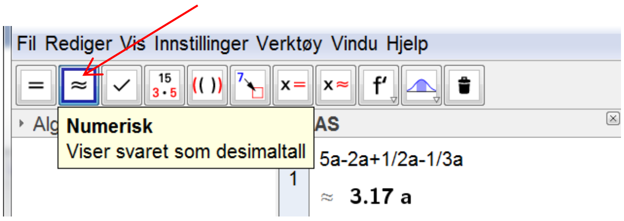


Du kan også kopiere ved å markere ønsket tekst, trykke Ctrl + C, og lime inn på ønsket sted med Ctrl + V.

Regner ut og gir svaret numerisk som desimaltall

Regn ut $5a-2a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a$.

Skriv inn $5a-2a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a$ i CAS-vinduet og klikk på Numerisk (Vise svaret som desimaltall).

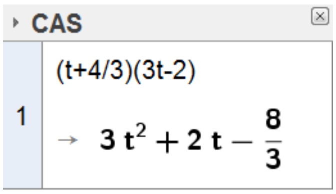


Antall sifre /desimaler i svaret velger du under Innstilliger/Avrunding.

Regner ut parentesuttrykk

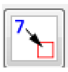
Regn ut $\left(t+\frac{4}{3}\right)(3t-2)$.

Skriv inn $\left(t+\frac{4}{3}\right)(3t-2)$ i CAS-vinduet og trykk Enter eller klikk på , Regn ut.

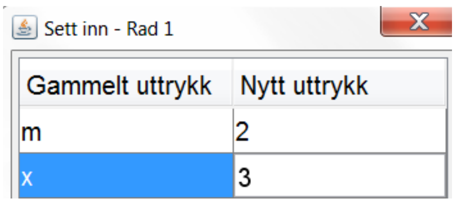


Verktøyknappen «Sett inn»

I utrykket $f(x) = mx^2 - mx + 2m$ skal vi regne ut $f(3)$ for $m = 2$.

Vi kan bruke verktøyknappen Sett inn: 

Vi skriver inn f(x):=m x^2-m x+2m i CAS og klikker på verktøyknappen og skriver inn 2 for m og 3 for x. (Husk mellomrom eller * mellom m og x.)



Vi klikker på =, , og får

CAS	
1	f(x):=m x²-m x+2m ByttUt, m=2,x=3: $f(x) := 16$

Alternativ kan vi bruke kommandoen Bytt Ut:

CAS	
1	f(x):=m x²-m x+2m $\rightarrow\ f(x) := m\,x^2 - m\,x + 2\,m$
2	ByttUt[f(3),m,2] $\rightarrow\ 16$

Fullstendig kvadrat

Lag et fullstendig kvadrat av $x^2 - 8x$ med GeoGebra.

CAS	
1	FullstendigKvadrat[x²-8x] $\rightarrow\ (x-4)^2 - 16$

Logaritmer

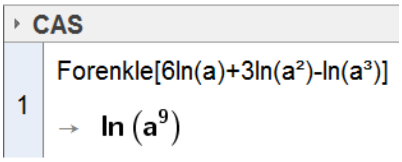
Vi finner lg(3) + 2lg(3) eksakt ved , og numerisk ved .

CAS	
1	lg(3)+2lg(3) $\rightarrow\ 3 \cdot \frac{\ln(3)}{\ln(10)}$
2	lg(3)+2lg(3) $\approx\ 1.43$

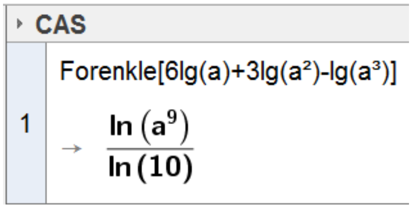
GeoGebra gir altså ikke svaret med Briggske logaritmer når vi bruker , «Regn ut».

Forenkle uttrykk

Skriv uttrykket $6\ln a + 3\ln\left(a^2\right) - \ln\left(a^3\right)$ enklere.



Skriv uttrykket $6\lg a + 3\lg\left(a^2\right) - \lg\left(a^3\right)$ enklere.



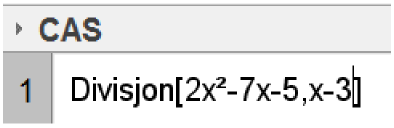
Som vi også her ser: GeoGebra gir ikke svaret med Briggske logaritmer.

Polynomdivisjon

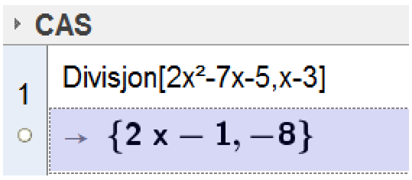
Utfør polynomdivisjonen $\left(2x^2 - 7x - 5\right) : \left(x - 3\right)$.

Skriv Div. . , og velg Divisjon[<Dividend Polynom> , <Divisor Polynom>] i CAS-vinduet.

Skriv $2x^2 - 7x - 5$ og trykk TAB-tasten på tastaturet. Skriv $x - 3$. Da har du dette bildet:



Trykk ENTER.



Svaret på divisjonen er $2x - 1$ med -8 som rest.

$$\left(2x^2 - 7x - 5\right) : \left(x - 3\right) = 2x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

NB!

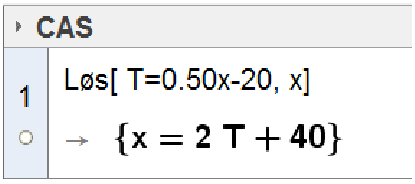
Hvis du velger Div[<Dividend Polynom> , <Divisor Polynom>], blir svaret gitt uten rest.

Anbefaler derfor ikke å bruke denne.

Å snu formler

Vi har formelen $T = 0{,}50x - 20$ og vil finne et uttrykk for *x*.

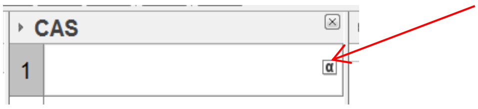
Vi bruker kommandoen Løs[<Likning>,<Variabel>] i CAS.



NB! Hvis formelen inneholder et produkt med bokstaver som faktorer, må du bruke * eller ordmellomrom mellom bokstavene.

Greske bokstaver og andre symboler

Når du skal skrive inn noe i CAS-vinduet, dukker symbolet α opp.



Hvis du klikker på α, får du denne menyen:

Herfra kan du blant annet hente gradtegnet °, π (pi) og Eulers tall e.

NB! For å få Eulers tall e, kan du også holde Alt-tasten nede og skrive e.

Dette er spesielt viktig i CAS-vinduet. Der skiller GeoGebra mellom e som grunntall og Alt e (Eulers tall) som grunntall.

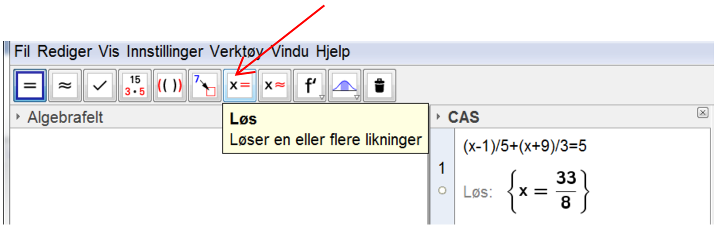
(Ved inntasting av eksponentialfunksjoner i Grafikkfeltet kan du bruke e^(x) , Alt e^(x) eller exp(x).)

π kan du få ved å skrive pi eller trykke Alt + p.

Løse likninger og gi svaret eksakt

Løs likningen $\frac{x-1}{5} + \frac{x+9}{3} = 5$.

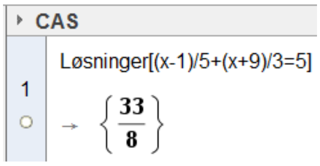
Skriv inn $\frac{x-1}{5}+\frac{x+9}{3}=5$ i CAS-vinduet og klikk på Løs.



Alternativt

Du kan også bruke kommandoen Løs[ ]. Eller også Løsninger[ ].

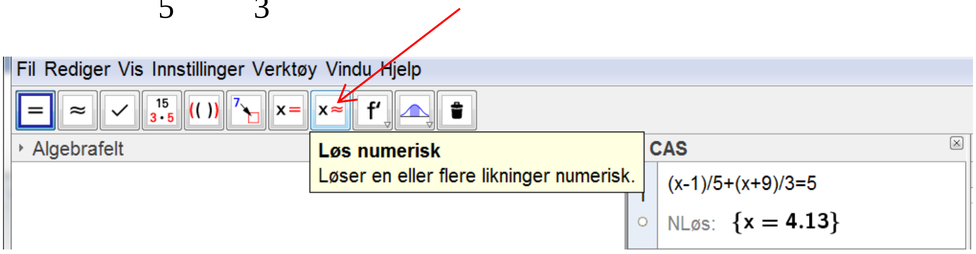
Hvis du bruker Løsninger[ ], får du svaret på denne formen:



Løse likninger og gi svaret numerisk med desimaltall

Løs likningen $\frac{x-1}{5}+\frac{x+9}{3}=5$.

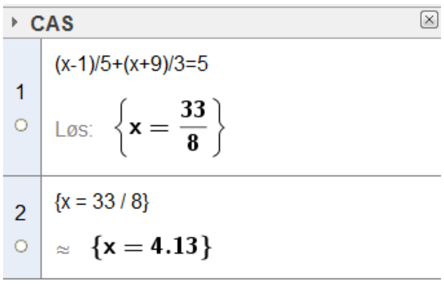
Skriv inn $\frac{x-1}{5}+\frac{x+9}{3}=5$ i CAS-vinduet og klikk på Løs numerisk.



Alternativt

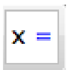
Hvis du vil ha svaret med desimaltall etter å ha fått den eksakte løsningen, kan du gjøre slik:

Klikk på $\left\{x=\frac{33}{8}\right\}$ eller trykk på ordmellomromtasten, og deretter på .



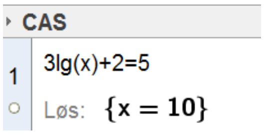
Eksempel

Løs likningen $3\lg(x)+2=5$.

Skriv $3\lg(x)+2=5$ i CAS-vinduet, og klikk på ikonet 

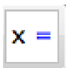
.

Alternativt kan du skrive Løs[$3\lg(x)+2=5$], og trykke ENTER.



Eksempel

Løs likningen $3\ln(x)+2=5$.

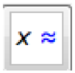
Skriv $3\ln(x)+2=5$ i CAS-vinduet, og klikk på ikonet 

.

Alternativt kan du skrive Løs[$3\ln(x)+2=5$], og trykke ENTER.

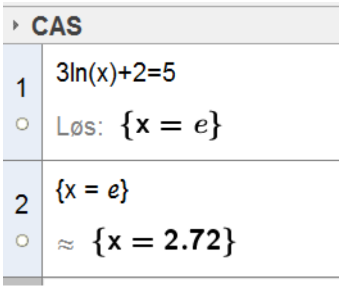
Klikk på {x = e} i rute 1 ({x = e} blir kopiert til rute 2), og deretter på 

nr. 2 fra venstre.

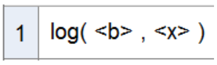
Du kan også løse likningen direkte numerisk ved å klikke på 

(Løs numerisk).

Da får du dette bildet:



Andre grunntall

Kommandoen 

log(2,x) regner ut log(x) med grunntall b, $\log_b x$.

Eksempel

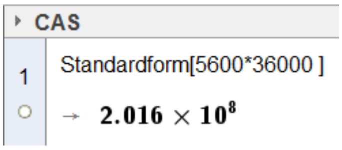
Alternativt kan du bruke: 

Bruk kommandoen Numerisk.

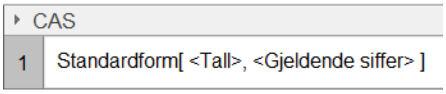
Standardform

Du kan bruke kommandoen 

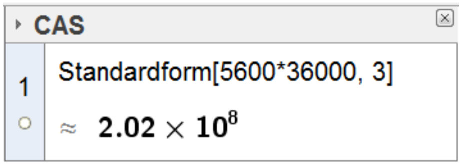
for å få et svar på standardform:



I Innstillinger/Avrunding kan du velge hvor mange desimaler/sifre du vil ha med i svaret.

Men til det kan du også bruke kommandoen: 

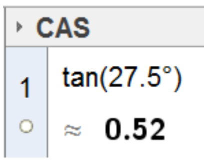
.

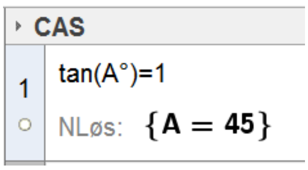


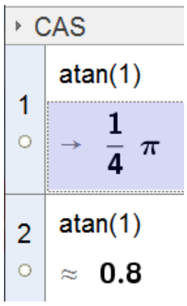
Trigonometri

NB! Husk å legge til gradtegnet når du bruker enheten grader (Deg).

Gradtegnet kan du nå med hurtigtasten Alt + o eller i listen med symboler under α i Cas-vinduet.

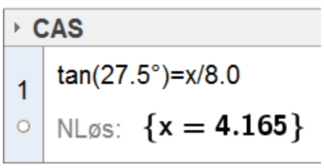


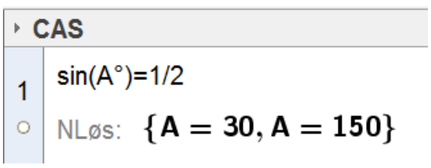




Trigonometriske likninger

NB! Husk å legge til gradtegnet i likningen når du løser med grader (Deg), ellers vil GeoGebra regne med radianer.

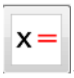




Likningssystem

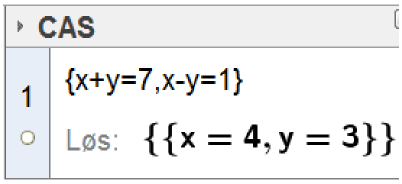
Løs likningssystemet $x + y = 7 \quad \wedge \quad x - y = 1$.

Metode 1

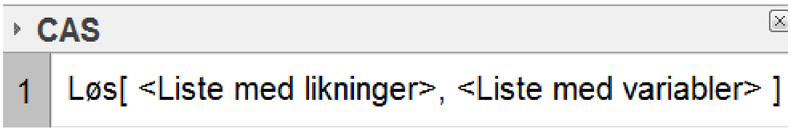
Legg inn likningene slik figuren viser, og klikk på 

.

NB! Husk å bruke listeparenteser **{ }** når du legger inn settet av likninger.



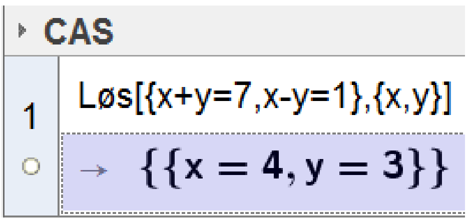
Vi kan også bruke kommando:



(Når du bekrefter første likning med komma eller bruker piltasten for å legge inn neste likning, hopper kursøren til «Liste med variabel». Trykk venstre pil på tastaturet eller bruk musmarkøren for å flytte kursøren tilbake.)

NB! Husk å bruke listeparenteser **{ }** når du legger inn settet av likninger og når du legger inn settet av de variable.

Legg inn likningene, og trykk Enter.



NB! Pass på at inntastingen er slik bildet ovenfor viser, med riktige listeparenteser.

Metode 2

Skriv inn i CAS-vinduet:

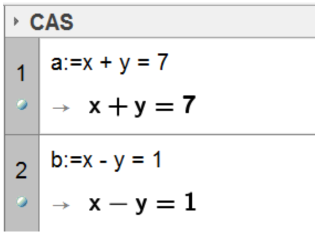
I felt 1: $x + y = 7$ Trykk ENTER

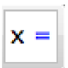
Hvis du vil se grafen til likningen i Grafikkfeltet, klikker du i ringen til venstre.

I felt 2: $x - y = 1$ Trykk ENTER

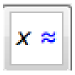
NB! Hvis du vil se grafen til likningen i Grafikkfeltet, klikker du i ringen til venstre.

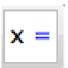
Marker «1»og «2» til venstre.



Klikk på 

.

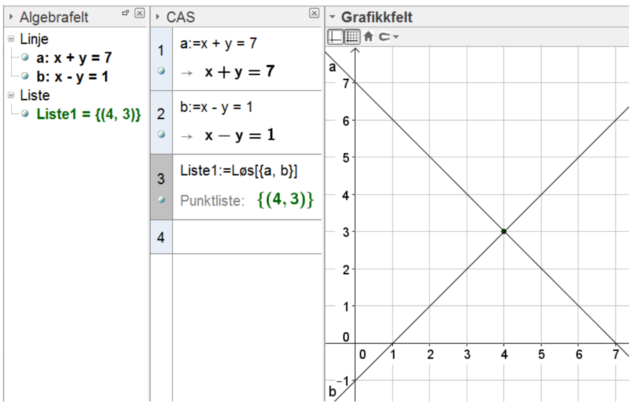
NB! Ikke bruk 

(Løs numerisk) når du løser likningssett. Da vil du ikke nødvendigvis få alle løsninger hvis det er flere løsninger. Hvis du vil ha de numeriske løsningene, løser du først med 

, og trykker ordmellomrom tasten og 

for å få de numeriske løsningene.

Klikk i ringen til venstre i felt 3, og skjæringspunktet mellom grafene blir markert.

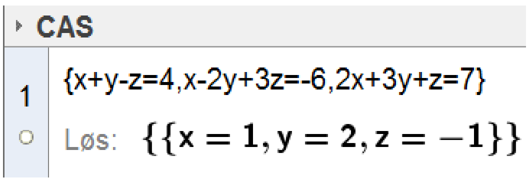


(Hvis du klikker i Grafikkfeltet, er dette aktivt.)

Legg merke til samspillet mellom Algebra-, CAS- og Grafikkfeltet.)

NB! Hvis du vil ha skjæringspunktet «levende» for eksempel for å sette inn navn, verdi, osv., må du legge inn punktet på nytt i grafikkvinduet.

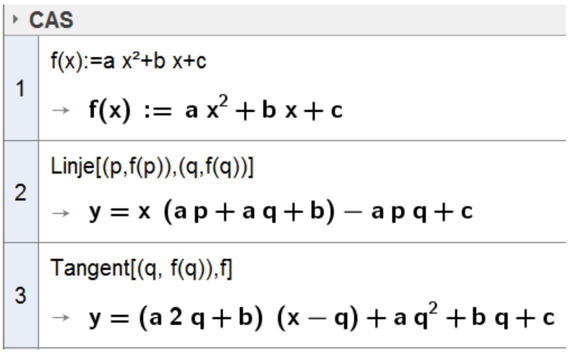
Likningssystem med tre ukjente



Linje og tangent

Vi har funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Vi skal finne likningen for linja gjennom punktene (p , $f(p)$) og (q , $f(q)$), og tangenten til grafen i punktet (q , $f(q)$).



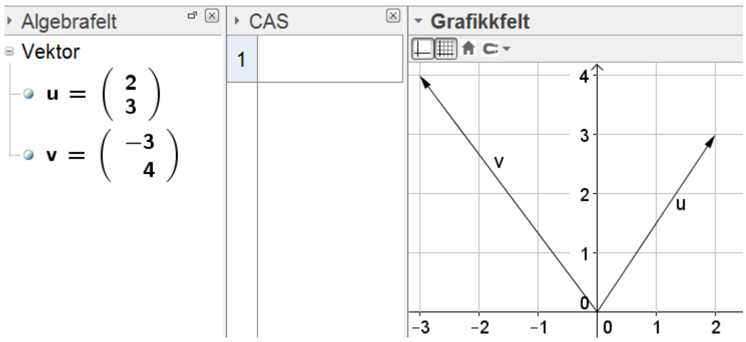
Hvis du vil sette inn bestemte tall for de ulike parameterne, kan du bruke verktøyknappen Sett inn. Hvis punktene er gitt med bestemte tall, kan du bruke «Regn ut» for å få likningen på formen $y = ax + b$.

Skalarprodukt

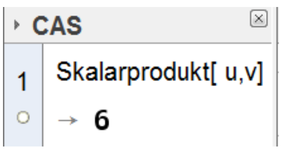
Finn skalarproduktet av $\vec{u} = [2\,,3]$ og $\vec{v} = [-3\,,4]$.

Skriv u = (2 , 3) i Inntastingsfeltet under Grafikkfeltet og trykk Enter. Skriv deretter inn v = (–3 , 4) og trykk Enter.

(Små bokstaver er navn på vektorer, store bokstaver er navn på punkter.)



Skriv Skalarprodukt[u,v] i CAS-vinduet, og trykk ENTER. Da får du dette bildet:



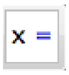
Alternativt til å skrive Skalarprodukt[u,v] kan du skrive u*v, og trykke ENTER.

Du kan også legge inn vektorene direkte i CAS-vinduet.

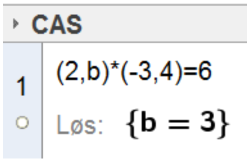
Da må du skrive u:=(2,3) og v:=(-3,4).

Likning med skalarprodukt

Vi har vektorene *u* = (2 , *b*) og *v* = (–3 , 4). Finn *b* når u*v = 6.

Vi skriver (2,b)*(-3,4)=6 i CAS-vinduet, og klikker på 

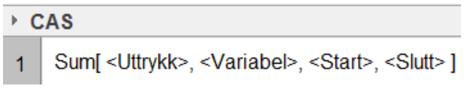
.



Summere endelige rekker

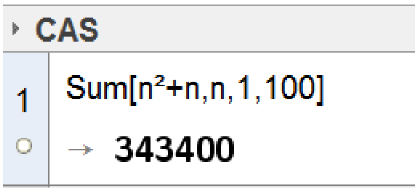
Det *n*-te leddet i en rekke er gitt ved $a_n = n^2 + n$.

Finn summen av de 100 første leddene.

Bruk kommandoen 

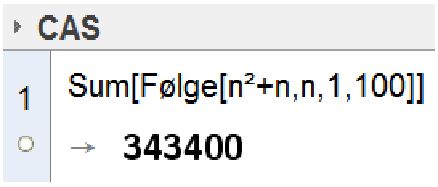
og skriv inn i CAS-vinduet:

Sum[n^2+n,n,1,100], og trykk ENTER. Da får du dette bildet:

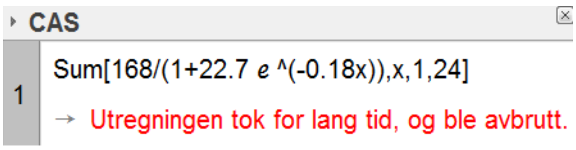


Du kan også bruke kommandoen nedenfor.

Først legger du inn Sum[<Liste>]. Deretter legger du inn Følge[ ] inn i hakeparentesene. Da ser det slik ut:



Hvis vi bruker kommandoen Sum[n^2+n,n,1,100] ovenfor, kan vi møte dette:

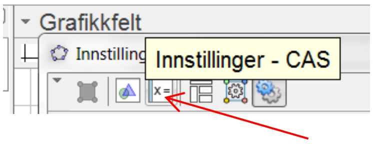


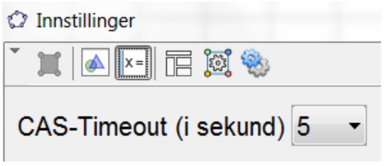
Da kan vi utvide «regnetiden»:

CAS-Time-out

Klikk på Innstillinger og på Avansert. Klikk så på 

:

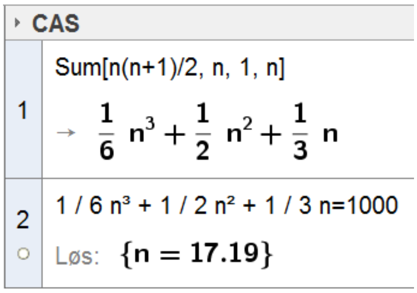




Endre 5 til for eksempel 30.

Figurtall

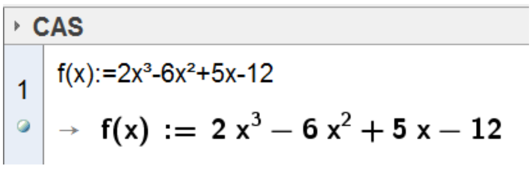
Vi tar som eksempel å finne uttrykket for summen av trekanttallene.



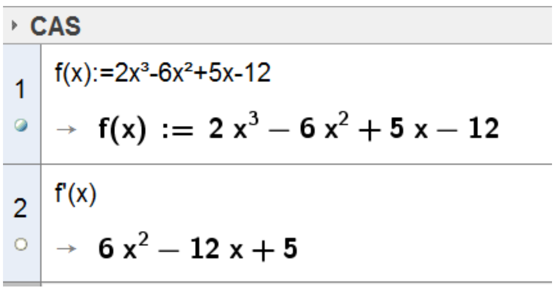
I rad 2 har vi regnet ut hvor mange trekanttall vi må summere for at summen skal bli 1000.

Derivasjon

Skriv inn $f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x - 12$ i CAS-vinduet, og trykk Enter.

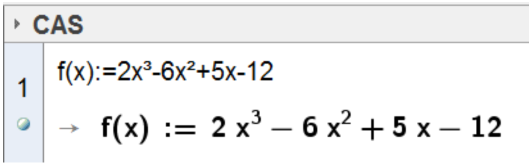


Skriv f'(x) i felt 2, og trykk Enter.



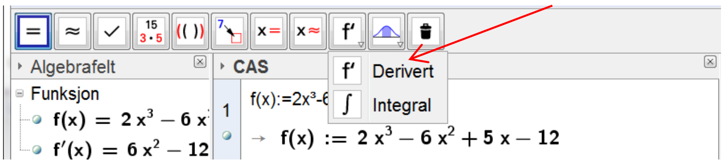
Alternativt

Skriv inn $f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x - 12$ i CAS-vinduet, og trykk Enter.

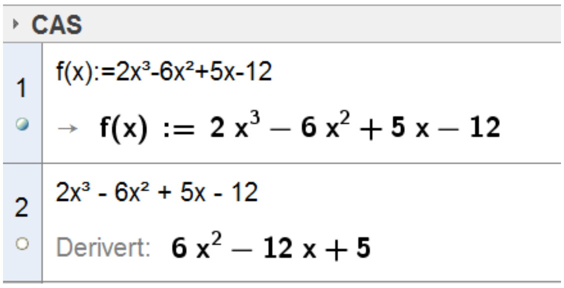


Klikk på funksjonsuttrykket og deretter på 

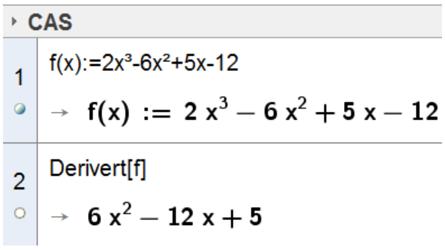
. Klikk så på Derivert.



Da får du dette bildet:



Du kan også bruke kommandoen Derivert[f]:



Eksempel

Vi har gitt funksjonen $f(t) = 3e^{2t}$.

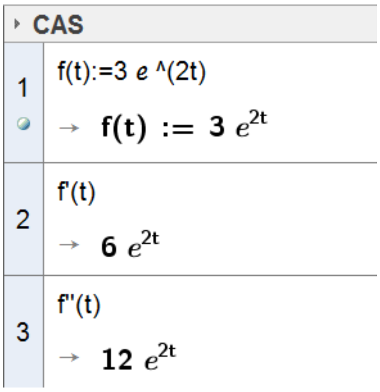
Finn $f'(t)$ og $f''(t)$.

Svar:

Skriv inn $f(t) := 3e^{2t}$ i CAS-vinduet.

(Husk parentes rundt argumentet.)

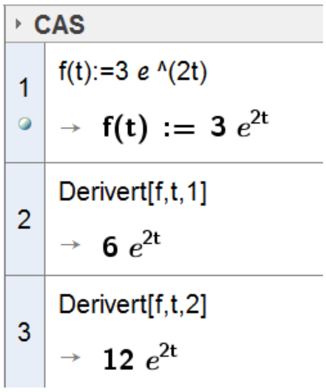
NB! Eulers konstant (ALT + e)



Alternativt:

Bruk kommandoen:

Derivert[<Uttrykk>,<Variabel>,Tall>]



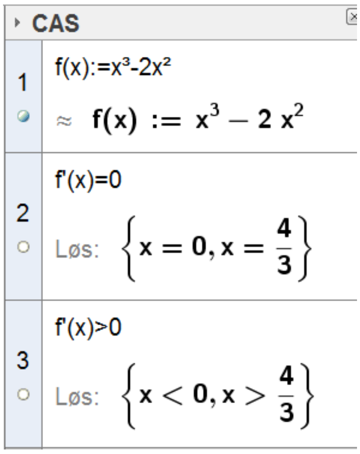
Deriverttegnet på tastaturet, ‘, finner u på samme knapp som *.

Kombinasjon av kommandoer

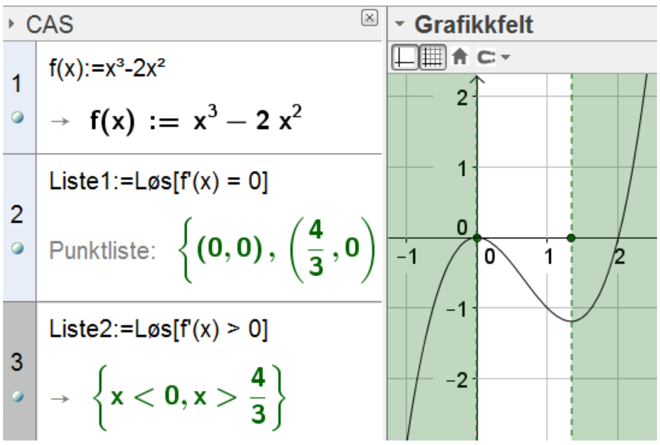
Vi har funksjonen $f(x) = x^3 - 2x^2$.

Løs likningen $f'(x) = 0$ og ulikheten $f'(x) > 0$.

I CAS kan vi gjøre dette slik:



Hvis du klikker i ringene under radtallene:

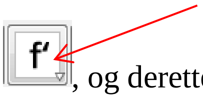


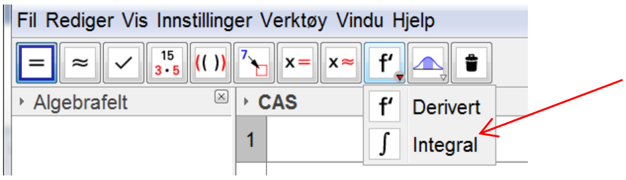
Hvis du også legger inn $f'(x)$ i en rad og klikker på ringen i raden, vil grafen til den deriverte bli tegnet.

Integral

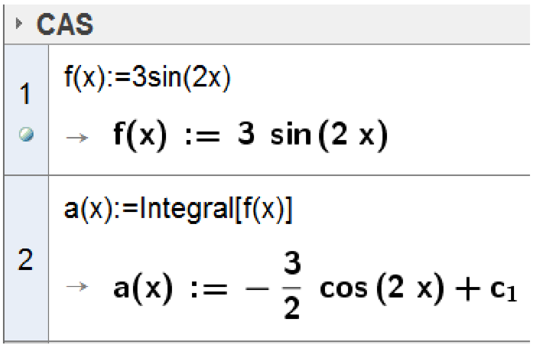
Bestem integralet $\int 3\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

Skriv inn $f(x) := 3\sin(2x)$ i CAS-vinduet.

Klikk på , og deretter på Integral.



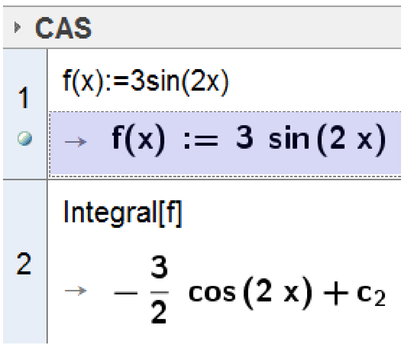
Da får du dette bildet:



Alternativt

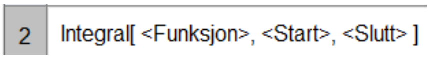
Skriv inn i CAS-vinduet:

Integral[f] og trykk ENTER. Da får du dette bildet:

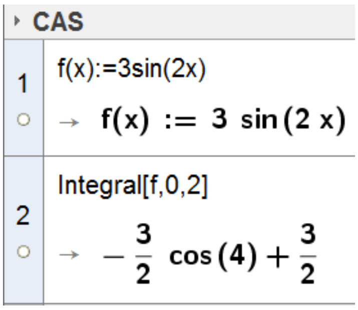


Bestemt integral

Bestem integralet $\int_0^2 3\sin(2x)\,dx$.

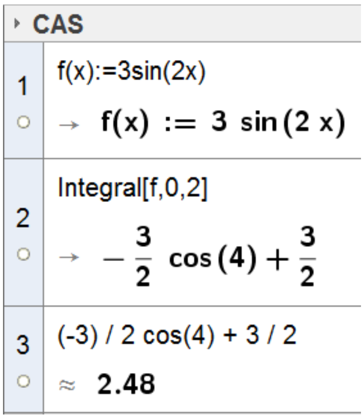
Da bruker du kommandoen 

og skriver Integral[f,0,2], og trykker ENTER. Da får du dette bildet:

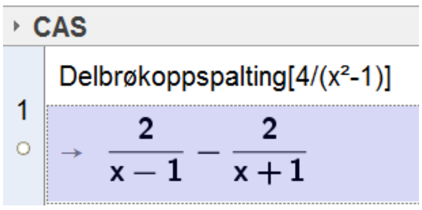


Hvis du vil ha tilnærmingsverdien, klikker du først på det eksakte svaret ovenfor, og deretter på $\boxed{\approx}$.

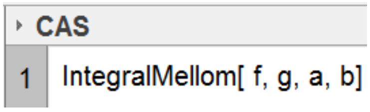
Da får du dette bildet:



Delbrøkoppspalting



Areal mellom grafene til *f* og *g* fra *a* til *b*.



Differensiallikninger

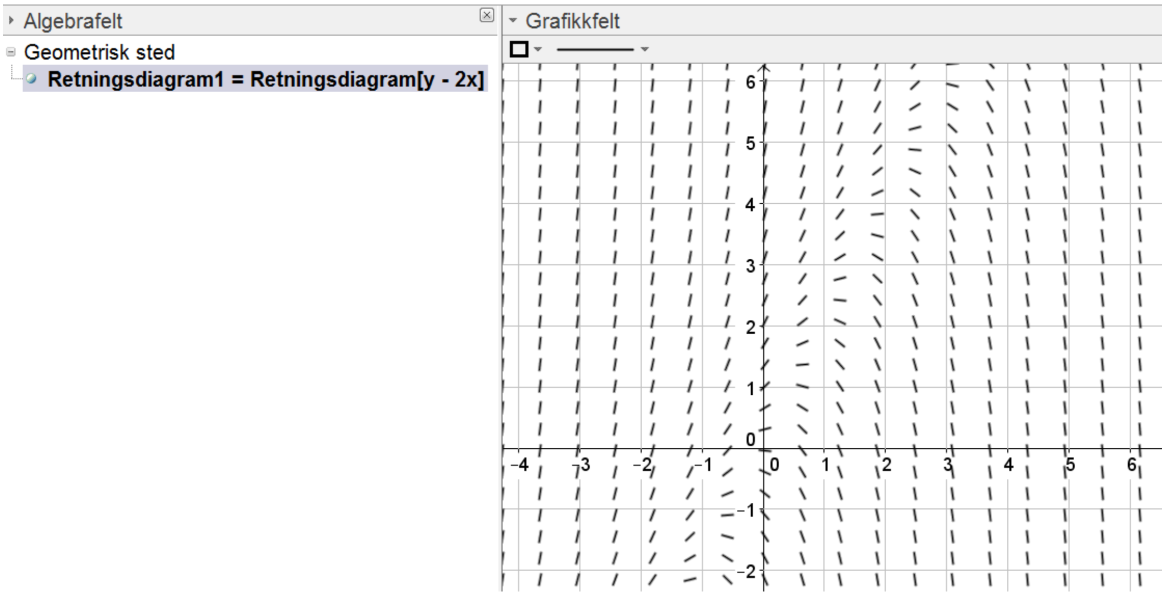
Vi ser først på noen av mulighetene i *Grafikkfeltet*.

Retningsdiagram

Tegn retningsdiagram for differensiallikningen $y' = y - 2x$.

Benytt kommandoen Retningsdiagram i Innskrivningsfeltet (ikke CAS-vinduet).

Skriv Retningsdiagram[y-2x], og trykk ENTER. Da får du dette bildet:



Integralkurve

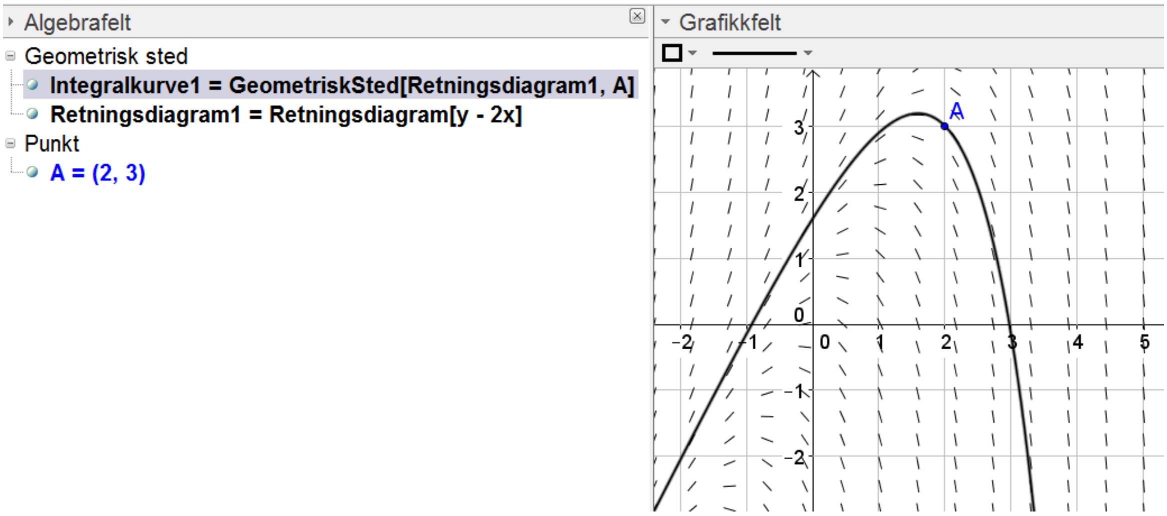
Tegn integralkurven gjennom $A = (2\,,3)$.

Skriv inn A = (2,3), og trykk ENTER.

Benytt Geometrisk sted [<f(x,y)>,<Punkt>].

Skriv Geometrisk sted [Retningsdiagram1,A], og trykk ENTER.

(Du kan først omdøpe «Retningsdiagram1» til for eksempel f, og skrive [f,A].)



Differensiallikninger, første orden

Løs likningen $y' + 4y = 3x$ med CAS.

Benytt LøsODE[<Likning>] i CAS-vinduet.

Skriv LøsODE[y’+4y=3x], og trykk ENTER. Da får du dette bildet:

CAS

1 LøsODE[y'+4y=3x]

$\rightarrow \; y = c_1 \, e^{-4x} + \frac{3}{4} x - \frac{3}{16}$

Kommentar

Ovenfor er $\boxed{=}$ aktiv. Hvis $\boxed{\approx}$ er aktiv, får du dette bildet:

CAS

1 LøsODE[y'+4y=3x]

$\approx \; y = c_1 \, e^{-4x} + 0.75 \, x - 0.19$

Første orden differensiallikning med initialbetingelse.

Løs likningen $y' + 4y = 3x$ med initialbetingelsen (0 , 1).

Skriv inn LøsODE[y'+4y=3x,(0,1)], og trykk ENTER.

CAS

1 LøsODE[y'+4y=3x,(0,1)]

$\rightarrow \; y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{16}e^{-4x} - \frac{3}{16}$

(Vi har klikket i ringen til venstre, og har fått tegnet grafen til den spesielle løsningen.)

Differensiallikninger, andre orden

Løs likningen $y'' - 5y' + 6y = 0$.

CAS

1 LøsODE[y''-5y'+6y=0]

$\rightarrow \; y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

Andre ordens differensiallikning med initialbetingelser

Løser differensiallikningen $y'' - 5y' + 6y = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$

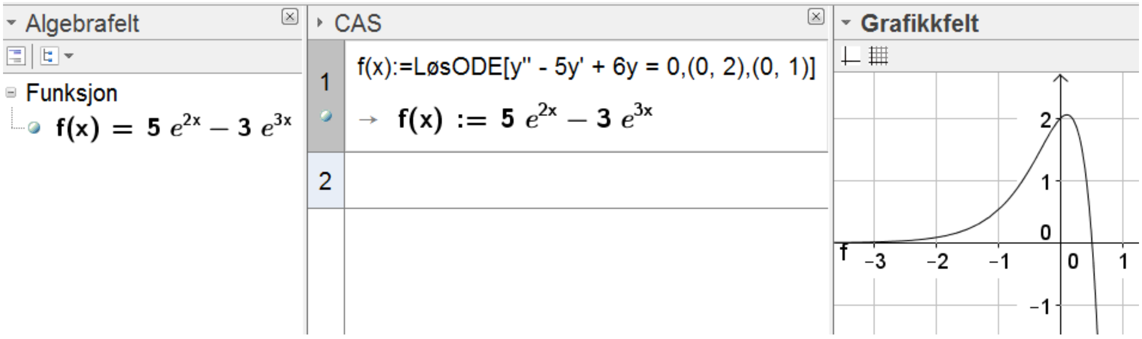
Vi legger inn LøsODE[y''- 5y'+6y=0,(0,2),(0,1)], og trykker ENTER.

CAS

1 LøsODE[y''-5y'+6y=0,(0,2),(0,1)]

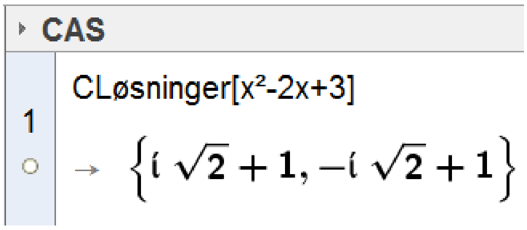
$\rightarrow \; y = 5e^{2x} - 3e^{3x}$

Vi klikker i ringen til venstre, og får grafen til den spesielle løsningen.



Andregradslikninger med komplekse løsninger

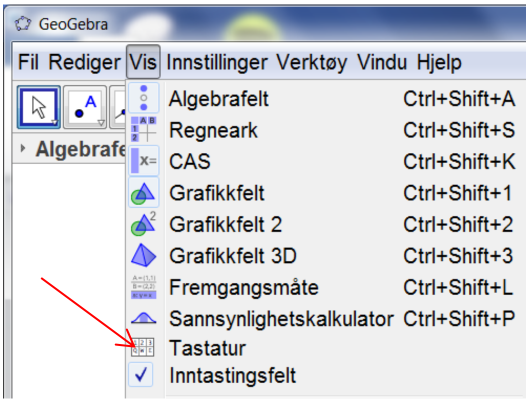
Vi løser andregradslikningen $x^2 - 2x + 3 = 0$.



Virtuelt tastatur

I noen tilfeller kan det være en fordel å bruke det virtuelle tastaturet i GeoGebra.

Det finner du ved å klikke Vis/Tastatur:



Litt 3D i CAS

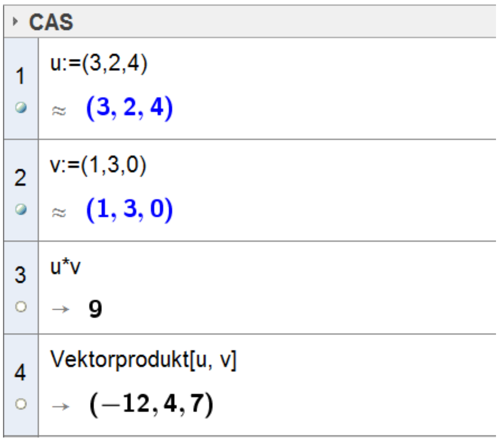
Gitt tre vektorer $\vec{u} = [3,2,4]$, $\vec{v} = [1,3,0]$ og $\vec{w} = [2,1,-4]$.

a Bestem $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$.

b Bestem $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w}\right|$

Løsning:

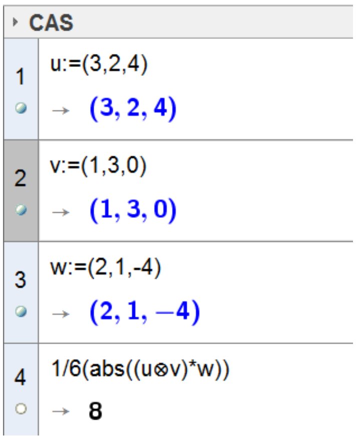
a



I stedet for å bruke kommandoen «Vektorprodukt[< , >], kan vi bruke tasten ⊗ for vektorprodukt. Den finner vi under α.

Vi kan også bruke hurtigtasten ALT + Shift + 8.

b



Fallgruver - Vær obs!

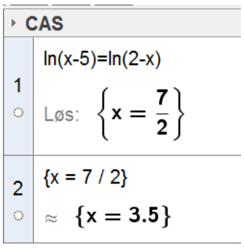
Ny oppgave i CAS i GeoGebra

Start med ny GeoGebrafil. Objekter du skal bruke, for eksempel a, kan allerede ha en tilordnet verdi.

Mellom bokstaver

Mellomrom eller gangetegn mellom a og x, a x (a*x), ellers tolker GeoGebra ax som en variabel.

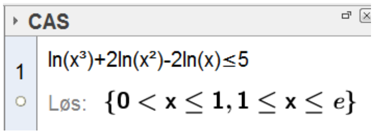
Likningen $\ln(x-5)=\ln(2-x)$ i CAS.



I den reelle verden er jo dette ikke en løsning. Men det er det for dem som beveger seg i den komplekse verden. Siden GeoGebra er et verktøy for dem også, vil ikke GeoGebra-teamet gjøre noe med dette.

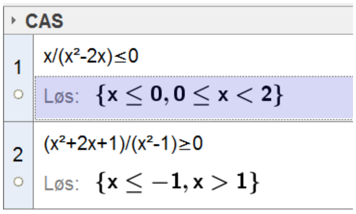
Likningens grunnmengde/definisjonsmengde er altså minst like viktig som tidligere!

Uheldig svarpresentasjon

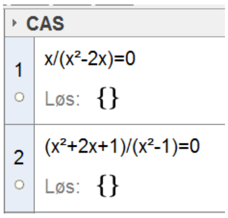


Denne versjonen inneholder også noen feil og mangler!

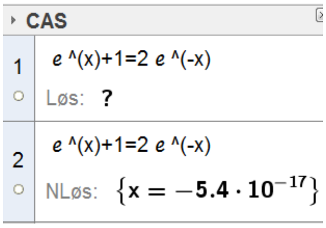
Eksempel



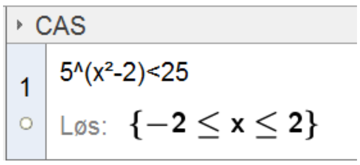
Med likning går det bra!



Eksempel



Eksempel



Nyttige Tips!

Algebravinduet

Ctrl + d: Skifter mellom Definisjon, Kommando og Verdi.

CAS

Inntastinger

Enter: Regner ut inntastet uttrykk

Alt + Enter: Kontrollerer inntasting
(I stedet for å bruke verktøyknappen «Bruk inntasting»)

På en tom rad:

Mellomromtast: Du får resultatet i raden ovenfor

= Du får inntastingen i raden ovenfor.

Fra andre rader enn den ovenfor

$3 Setter inn resultatet fra rad 3

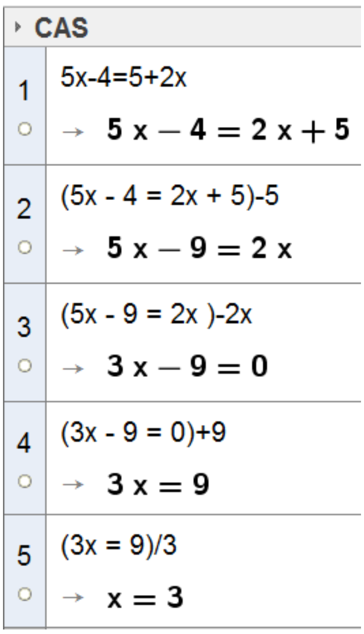
Påminnelse

Ved innlegging av uttrykk i CAS-vinduet, husk : For eksempel: f(x):=

Likninger

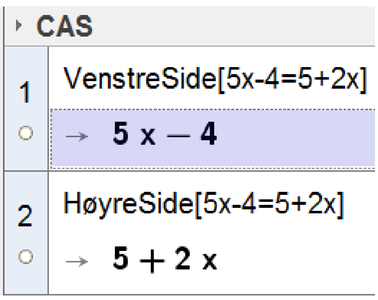
Du kan løse likninger trinnvis

«manuelt» i CAS.



Du kan også få fram høyre side og venstre side

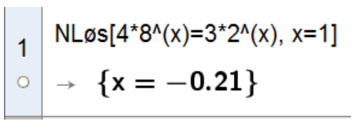
hver for seg med kommandoene:



Likningen $4 \cdot 8^x = 3 \cdot 2^x$ lar seg ikke løse numerisk.

Men det går bra med å løse eksakt først, kopiere til neste rad og finn svaret som desimaltall.

Men du kan bruke kommandoen NLøs[Likning,Variabel=startverdi].



Fra Eksamensveiledningen 2015

Eksamenskode	Datamaskin med digitalt verktøy
MAT0010 Matematikk (grunnskole)	• Regneark • Graftegner
MAT1011 Matematikk 1P MAT1015 Matematikk 2P MAT1005 Matematikk 2P-Y	• Regneark • Graftegner
MAT1013 Matematikk 1T MAT1017 Matematikk 2T MAT1010 Matematikk 2T-Y REA3022 Matematikk R1 REA3024 Matematikk R2 REA3026 Matematikk S1 REA3028 Matematikk S2	• CAS • Graftegner

1.4 Språket i eksamensoppgavene

Ved formuleringer som "**Finn …**", "**Løs …**" og "**Bestem …**" legges det ikke opp til bestemte framgangsmåter eller spesielle hjelpemidler. Eleven kan velge å løse oppgaven grafisk, ved regning (algebraisk) eller ved å benytte ulike kommandoer i et digitalt verktøy. Her har eleven *full* metodefrihet.

Hvis eleven bruker grafiske løsningsmetoder, må eleven argumentere for løsningen og forklare figuren.

NB!

Del 2 vil ikke lenger inneholde oppgaveformuleringer som "**Finn/Løs/Bestem … ved regning**" eller "**Regn ut …**".

I enkelte oppgaver i Del 2 vil elevene bli bedt om å bruke «regneark» eller «graftegner» eller «CAS» for å løse oppgaven. I andre oppgaver i Del 2 kan elevene bruke den metoden/det hjelpemiddel/det digitale verktøy som eleven finner hensiktsmessig.

- **Dersom en oppgave krever bruk av et digitalt verktøy og eleven ikke bruker det digitale verktøyet, oppnås lav / noe uttelling ved sensuren dersom oppgaven ellers er korrekt besvart.**

1.6.3.3 Graftegner (programvare på datamaskin) . Obligatorisk.

- En digital graftegner finnes i mange varianter og skal brukes i alle skriftlige eksamenskoder i matematikk.
- Det skal gå klart fram av den grafiske framstillingen hvilken skala som er brukt og hvilken størrelse som kan leses av, på hver av aksene.
- Det er en fordel at funksjonsuttrykket som er tastet inn i graftegneren framkommer slik at sensor enklere kan vurdere graftegningen.
- Hvis elevene bruker en slik graftegner, trenger de ikke å oppgi verken verditabell eller framgangsmåte (hvordan de har gått fram for å tegne grafen).
- Elevene må derimot forklare *hvilke kommandoer som er brukt* for å finne for eksempel skjæringspunkter og ekstremalpunkter.
- Elevene kan legge ved forklaringer over hva som er gjort i programvaren dersom man finner dette hensiktsmessig.

1.6.3.4 CAS – Computer Algebra System – (programvare på datamaskin). Obligatorisk.

- CAS forstås som en symbolbehandlende (og numerisk) kalkulator. CAS skal brukes i eksamenskodene for 1T, 2T, 2T-Y, R1, R2, S1 og S2.
- Eksamenskandidatene skal dokumentere bruken av CAS. De kan f.eks. ta en «skjermdump» (Print Screen). De kan eventuelt knytte kommentarer til CAS og konkludere i forhold til problemstillingen.
- Eksamenskandidatene må selv finne for eksempel en riktig setning, kommando eller stille opp en riktig likning. Deretter kan CAS brukes direkte.

Regneark

Vi viser til «Eksempeloppgave MAT1011 Matematikk 1P Ny eksamensordning våren 2015» for eksempler på bruk av regneark.

Elevene bør lage regnearkmodellene selv, og elevens bruk av formler blir vurdert i forhold til om regneark blitt «dynamisk» , dvs, dersom vi endrer inndata, endres også utdata automatisk, slik at det blir enkelt å bruke samme regneark om igjen til liknende oppgaver.

Det er derfor ikke alltid hensiktsmessig eller en fordel å bruke ferdigmodeller.

Noen formuleringer som kan brukes (Fra Eksempeloppgaver)

Jeg tegner grafen til h i GeoGebra.

Jeg tegner grafen til h i GeoGebra for $0 \leq x \leq 10$.

Jeg bruker kommandoen Ekstremalpunkt for å finne toppunktet.

Jeg finner skjæringspunktene mellom grafene ved å bruke kommandoen Skjæring mellom to objekt.

Jeg tegner en linje gjennom de to punktene ved å bruke kommandoen Linje gjennom to punkt.

Av figuren ser jeg at stigningstallet er –5. Jeg brukte kommandoen Stigning.

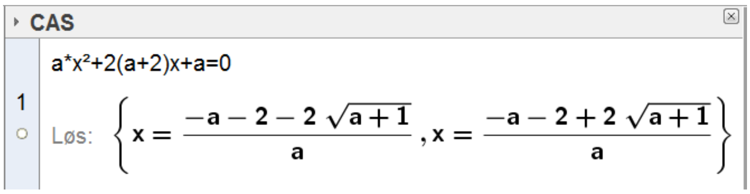
NB! Ved grafisk løsning, husk å gi svaret med litt tekst. Det er ikke nok å tegne figur.

Noen eksempler på bruk av GeoGebra til eksamen

Eksempel

Bruk CAS til å drøfte antall løsninger på andregradslikningen
$ax^2 + 2(a+2)x + a = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

Vi skriver likningen i CAS i GeoGebra:

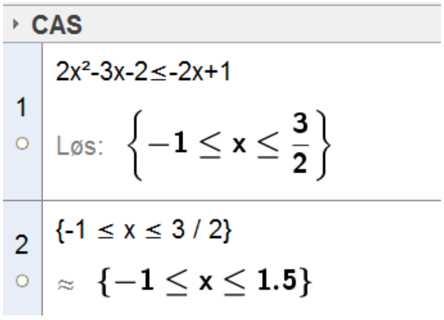


Vi ser: osv.

Eksempel

Løs ulikheten $2x^2 - 3x - 2 \leq -2x + 1$.

Vi skriver ulikheten inn i CAS i GeoGebra:

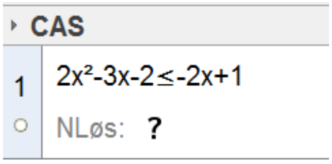


Vi ser at løsningen på ulikheten er

$$L = \left[-1 \ , \ \frac{3}{2}\right] \qquad \left(L = [-1 \ , \ 1{,}5]\right)$$

Kommentar

Her løste vi først ulikheten eksakt. Deretter kopierte vi svaret til linje 2 og fant svaret numerisk. Vi prøver nå å løse numerisk først:



Og det går ikke i denne versjonen av 5.0. Kanskje ikke i senere versjoner heller.

Godt å vite!

Eksamen R1 Våren 2014

Oppgave 2 (6 poeng)

I en klasse er det 12 gutter og 16 jenter. Det skal trekkes ut en gruppe på 5 elever på en tilfeldig måte.

a) Bestem sannsynligheten for at det blir med akkurat én gutt i gruppen.

Sannsynligheten er $\frac{44}{117}$ for at et bestemt antall gutter blir med i gruppen.

b) Hvor mange gutter blir det da med i gruppen?

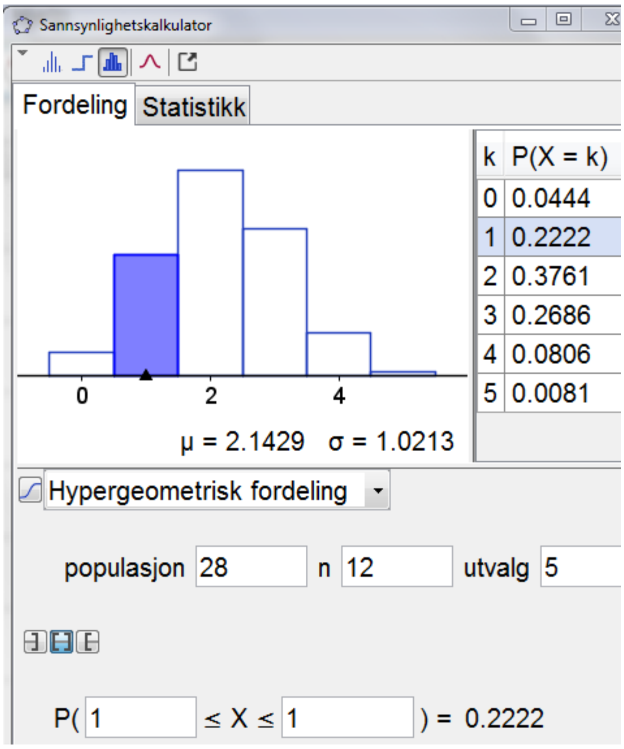
Løsning:

a Vi bruker Sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Dette er en hypergeometrisk situasjon.

Vi legger inn 28 for populasjon og 12 for n, som er antall gutter.

Vi legger inn 5 for utvalg, som er antall elever som trekkes ut.

Siden vi skal ha sannsynligheten for akkurat én gutt, regner vi ut $P(1 \leq x \leq 1)$.

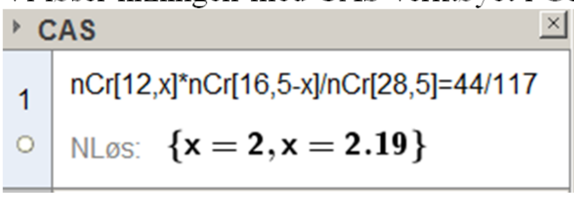


Sannsynligheten er 0,222 for at akkurat én gutt blir med.

b La antall gutter blant de fem i gruppen være x.

$$P(x \text{ gutter}) = \frac{\binom{12}{x} \cdot \binom{16}{5-x}}{\binom{28}{5}} = \frac{44}{117}$$

Vi løser likningen med CAS-verktøyet i GeoGebra:



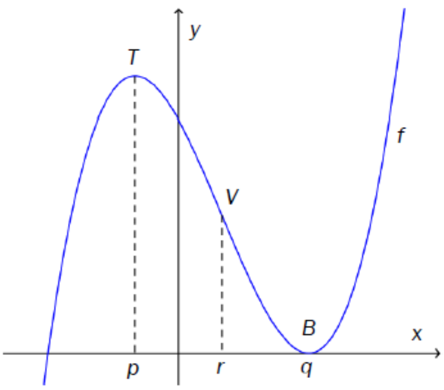
Ettersom antall gutter er et naturlig tall, er den oppgitte sannsynligheten for 2 gutter.

Eksempelsett R1 2014

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$



Grafen til f har toppunkt T når $x = p$ og bunnpunkt B når $x = q$.

Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til vendepunktet V (infleksjonspunktet) ligger midt mellom x-koordinaten til toppunktet og x-koordinaten til bunnpunktet.

Vi foretar de nødvendige utregningene i CAS-vinduet i GeoGebra.

CAS

1	f(x):=a x³+b x²+c x+d $\rightarrow \ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	f'(x)=0 Løs: $\left\{ x = \frac{\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}, x = \frac{-\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a} \right\}$
3	q:= (sqrt(-3 a c + b²) - b) / (3a) $\rightarrow \ \frac{1}{3} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3\,a\,c}}{a}$
4	p:=1 / 3 (-b - sqrt(b² - 3a c)) / a $\rightarrow \ \frac{1}{3} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3\,a\,c}}{a}$
5	(q+p)/2 $\rightarrow \ -\frac{b}{3\,a}$
6	f''(r)=0 Løs: $\left\{ r = -\frac{b}{3\,a} \right\}$

Av rad 5 i figuren ser vi at x-koordinaten til midtpunktet mellom p og q er $-\dfrac{b}{3a}$.

Av rad 6 ser vi at x-koordinaten til vendepunktet er $-\dfrac{b}{3a}$, altså den samme.

Eksempelsett S1 2014

Del 2 Oppgave 6

Oppgave 6 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^3 - bx - 2$$

Grafen til f har et toppunkt i $(2, f(2))$ og en tangent med stigningstall lik 2 i punktet $(1, f(1))$.

Bestem de eksakte verdiene for tallene a og b.

Vi foretar utregningene i CAS-vinduet i GeoGebra.

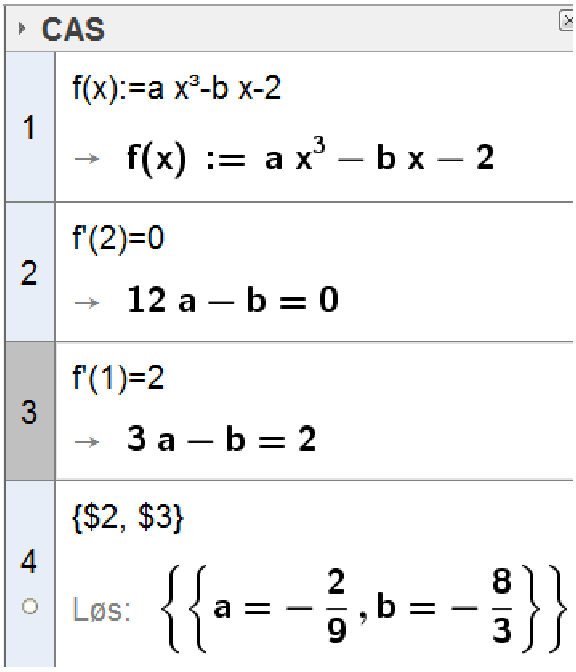


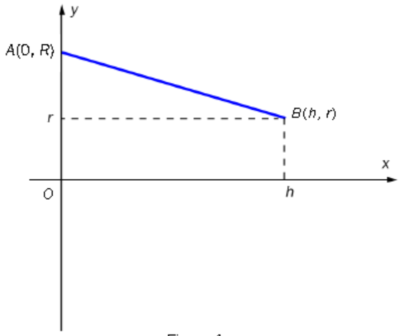
Fig. 2

Av figur 2 ser vi at $a = -\dfrac{2}{9}$ og $b = -\dfrac{8}{3}$.

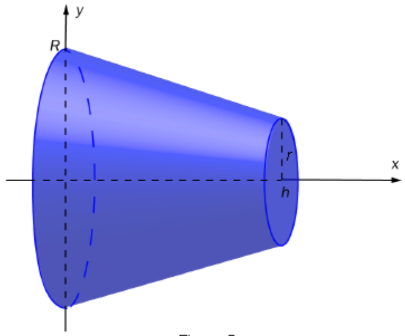
Eksempeloppgave 2014 R2

Oppgave 2 (4 poeng)

En rett linje går gjennom punktene $A(0, R)$ og $B(h, r)$. Se figur 1. En rett, avkortet kjegle framkommer ved å rotere linjestykket AB 360° om x-aksen. Se figur 2.



Figur 1



Figur 2

a) Vis at linjen gjennom A og B har likningen $y = \frac{r-R}{h} \cdot x + R$

b) Bruk CAS til å vise at volumet V av den rett avkortede kjeglen er

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

c) Forklar kort hvilket omdreiningslegeme vi får dersom $r = 0$ og dersom $r = R$.

Løsning

Oppgave 2b

Volumet av kjegla er gitt ved $V = \pi \int_0^h \left(\frac{r - R}{h} \cdot x + R \right)^2 \mathrm{d}x$.

Vi bruker CAS i GeoGebra til å bestemme dette integralet.

CAS	
1	f(x):=((r-R)/h*x+R) $\rightarrow \ f(x) := \frac{R\,h - R\,x + r\,x}{h}$
2	V:= π *Integral[f(x)², x, 0, h] $\rightarrow \ \frac{1}{3} h\, r^2 \pi + \frac{1}{3} R^2 h\, \pi + \frac{1}{3} R\, h\, r\, \pi$
3	1 / 3 h r² π + 1 / 3 R² h π + 1 / 3 R h r π Faktoriser: $(r^2 + r\,R + R^2)\ \pi\ \frac{h}{3}$

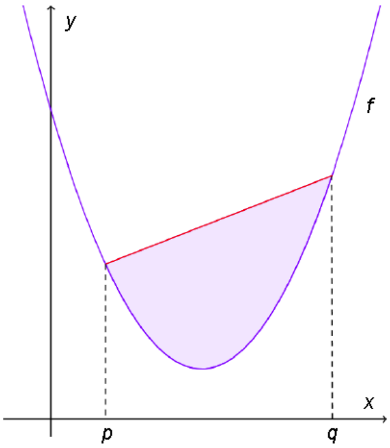
Vi ser at $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Oppgave 6 (3 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Et område er avgrenset av grafen til f og en rett linje. Skjæringspunktene mellom grafen til f og den rette linjen har x-koordinater p og q. Se skissen nedenfor.



Bruk CAS til å vise at arealet som er begrenset av grafen til f og den rette linjen bare er avhengig av differansen $p-q$ og a (eller differansen $q-p$ og a).

Vi finner først likningen for linja gjennom $x = p$ og $x = q$. deretter finner vi det bestemte integralet mellom den rette linja og grafen til f mellom $x = p$ og $x = q$.

	CAS
1	f(x):=a*x²+b*x+c → $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	Linje[(p,f(p)),(q,f(q))] → $y = x\,(a\,p + a\,q + b) - a\,p\,q + c$
3	y = x (a p + a q + b) - a p q + c → $y = -a\,p\,q + a\,p\,x + a\,q\,x + b\,x + c$
4	l:=-a p q + a p x + a q x + b x + c → $-a\,p\,q + a\,p\,x + a\,q\,x + b\,x + c$
5	IntegralMellom[l, f, p, q] → $-\frac{1}{6}\,a\,p^3 + \frac{1}{2}\,a\,p^2\,q - \frac{1}{2}\,a\,p\,q^2 + \frac{1}{6}\,a\,q^3$
6	(-1) / 6 a p³ + 1 / 2 a p² q - 1 / 2 a p q² + 1 / 6 a q³ Faktoriser: $-(p - q)^3 \cdot \frac{a}{6}$

Arealet mellom grafene er kun avhengig av differansen $p - q$ og a.

Følgende står i besvarelsen fra Udir:

Kommentar: Dersom kandidaten får svaret $\frac{1}{6}a(q-p)^3$ godtas dette.

I denne oppgaven skal kandidaten bruke CAS. Hvis ikke, oppnås lav / noe uttelling ved sensuren.

Dette gir altså lav uttelling:

Oppgave 6 løst av en elev som ikke behersker CAS

Linjestykket på figuren ligger på en rett linje som kan beskrives med funksjonen g som jeg finner ved å ta utgangspunkt i punktene $\left(p\,,\, f(p)\right)$ og $\left(q\,,\, f(q)\right)$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{f(q)-f(p)}{q-p}\cdot(x-p)+f(p)\\
&= \frac{(aq^2+bq+c)-(ap^2+bp+c)}{q-p}\cdot(x-p)+(ap^2+bp+c)\\
&= \frac{aq^2-ap^2+bq-bp+c-c}{q-p}\cdot(x-p)+ap^2+bp+c\\
&= \frac{a(q^2-p^2)+b(q-p)}{q-p}\cdot(x-p)+ap^2+bp+c\\
&= \left(a(q+p)+b\right)\cdot(x-p)+ap^2+bp+c\\
&= (aq+ap+b)\cdot(x-p)+ap^2+bp+c\\
&= aqx+apx+bx-aqp-ap^2-bp+ap^2+bp+c\\
&= aqx+apx+bx-aqp+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x)-f(x) &= (aqx+apx+bx-aqp+c)-(ax^2+bx+c)\\
&= -ax^2+(ap+aq)x-aqp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_p^q \left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x &= \int_p^q \left(-ax^2+(ap+aq)x-aqp\right)\,\mathrm{d}x\\
&= a\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(p+q)x^2-pqx\right]_p^q = \frac{a}{6}\left[-2x^3+3px^2+3qx^2-6qpx\right]_p^q\\
&= \frac{a}{6}\left[-2q^3+3q^2p+3q^3-6q^2p+2p^3-3p^3-3qp^2+6qp^2\right]\\
&= \frac{a}{6}\left[q^3-3q^2p+3qp^2-p^3\right] = \frac{a}{6}(q-p)^3
\end{aligned}$$

S2 Eksempeloppgave 2014

Oppgave 3 (4 poeng)

I bedriften er dagsproduksjonen av en vare x enheter. Kostnadene per enhet er gitt ved

$$E(x) = 0{,}15x + 7 + \frac{2000}{x} \quad , \quad x \in [10,\ 300]$$

Etterspørselen etter varen er så stor at alt som produseres, blir solgt. Varen selges for 55 kroner per enhet.

a) Bestem et funksjonsuttrykk for totalkostnaden K og inntekten I ved produksjon og salg av x enheter.

b) Bestem hvilke produksjonsmengder som gir overskudd, og hvilken produksjonsmengde som gir størst overskudd.

Løsning

Oppgave 3

a Kostnadene per enhet i kroner: $E(x) = 0.15x + 7 + \dfrac{2000}{x} \quad x \in [10, 300]$.

Totalkostnadene i kroner:

$K(x) = x \cdot E(x) = x\left(0.15x + 7 + \dfrac{2000}{x}\right) = 0.15x^2 + 7x + 2000$. Siden vi selger alt som produseres til prisen 55 kroner per enhet, så er inntekten i kroner gitt ved:

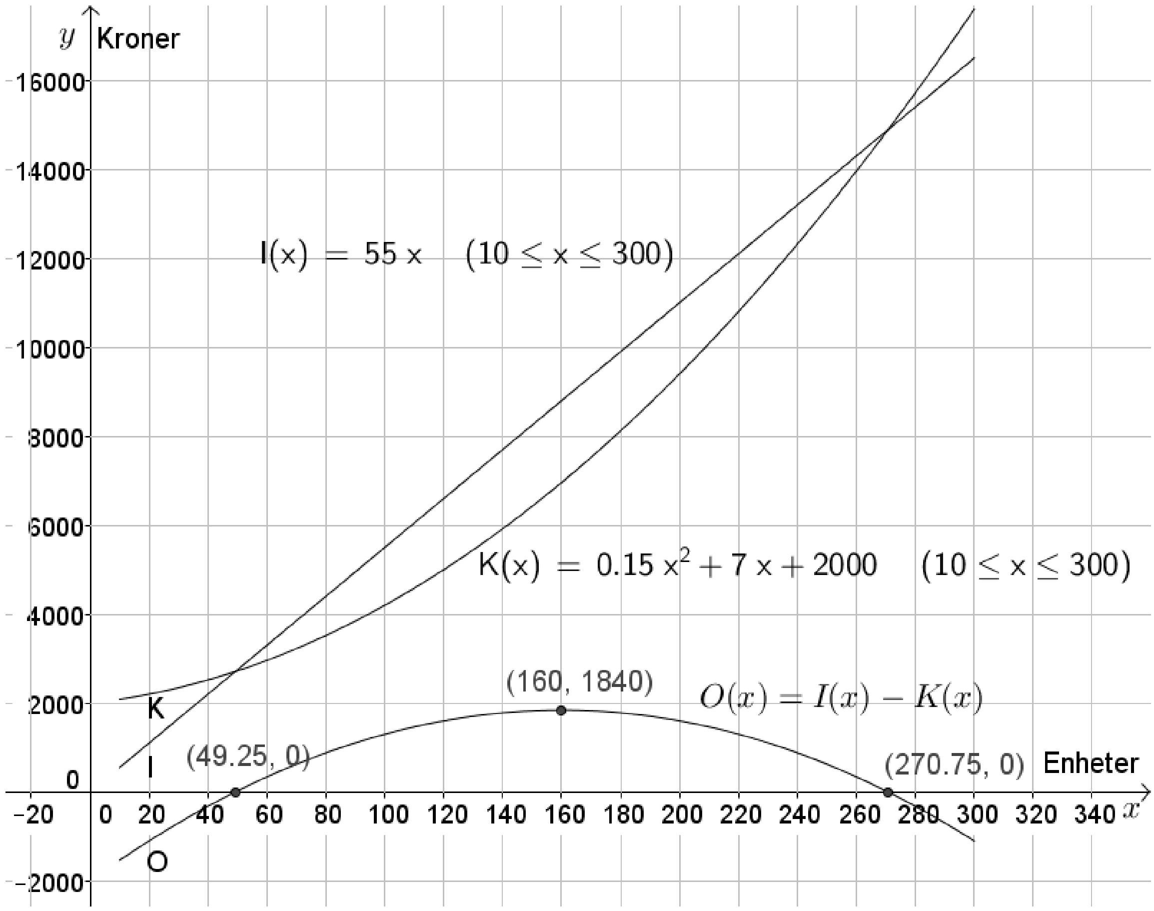
$I(x) = 55x$.

b Overskuddet i kroner er gitt ved:

O(*x*) = *I*(*x*) – *K*(*x*)

Grafisk løsning:
Vi skriver inn funksjonene *I* og *K* i GeoGebra, deretter skriver vi inn funksjonen *O*(*x*) = *I*(*x*) – *K*(*x*).

Vi finner nullpunktene til *O* med kommandoen NullpunktIntervall[O,10,300] og toppunktet på grafen til *O* med kommandoen Ekstremalpunkt[O,10,300].



Vi ser at vi vi har overskudd for en produksjon der $x \in [50, 270]$. Det største overskuddet har vi for $x = 160$. En produksjon på 160 enheter per dag gir altså størst overskudd.

Løsning med CAS: Vi legger inn funksjonene K og I i CAS i GeoGebra.

CAS	
1	K(x):=0.15x²+7x+2000 $\rightarrow\ K(x) := \frac{3}{20}x^2 + 7x + 2000$
2	I(x):=55x $\rightarrow\ I(x) := 55x$
3	O(x):=I(x)-K(x) $\approx\ O(x) := -0.15x^2 + 48x - 2000$
4	O(x)>0 Løs: $\left\{\frac{-40\sqrt{69}+480}{3} < x \leq \frac{40\sqrt{69}+480}{3}\right\}$
5	{(-40 sqrt(69) + 480) / 3 < x ≤ (40sqrt(69) + 480) / 3} $\approx\ \{49.25 < x \leq 270.75\}$
6	O'(x)=0 Løs: $\{x = 160\}$
7	O'(150) $\rightarrow\ 3$
8	O'(170) $\rightarrow\ -3$

Vi ser av rad 5 at det er overskudd for en produksjon når $x \in [50, 270]$.
Vi ser av radene 6, 7 og 8 at den deriverte skifter fortegn fra pluss til minus for $x = 160$.
Overskuddet er derfor størst ved en produksjon på 160 enheter.

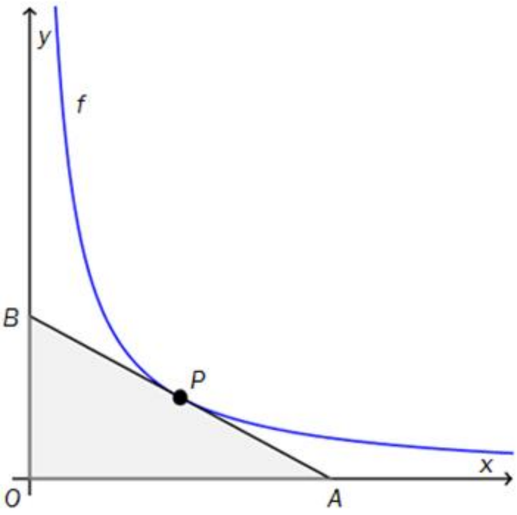
Eksempler presentert på sensorskoleringen våren 2014

Eksempel 1

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = \frac{k}{x} \quad , \quad D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$$

Skissen av grafen til f og en tangent på grafen til f i punktet $P(a, f(a))$ er tegnet nedenfor. Tangenten skjærer koordinataksene og danner ΔOAB.



Bruk CAS og vis at arealet av ΔOAB alltid er lik $2k$.

	CAS
1	f(x):=k/x → $f(x) := \frac{k}{x}$
2	Tangent[(a,f(a)),f(x)] → $y = -\frac{k}{a^2}(x-a) + \frac{k}{a}$
3	A:=Løs[(-k) / a² (x - a) + k / a=0] → $A := \{x = 2\,a\}$
4	B:=Løs[y = (-k) / a² (0 - a) + k / a, y] → $B := \left\{y = 2 \cdot \frac{k}{a}\right\}$
5	T=0.5*2*a*2*k/a → $T = 2\,k$

Eksempel 2

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2(m+2) \quad , \quad D_f = \mathbb{R} \ , \quad m > 0$$

a) Bestem m slik at f får et minimum for $x = 3$.

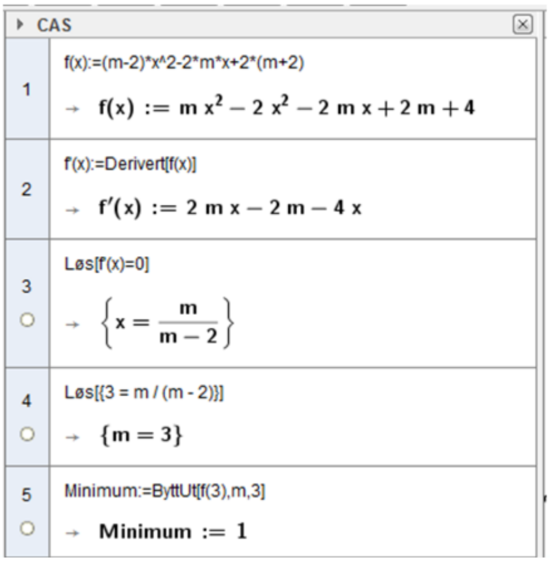
b) Bestem dette minimum og tegn grafen til f.

$$f'(x) = 2(m-2)x - 2m$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(m-2)x - 2m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2m}{2(m-2)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{m}{m-2}$$

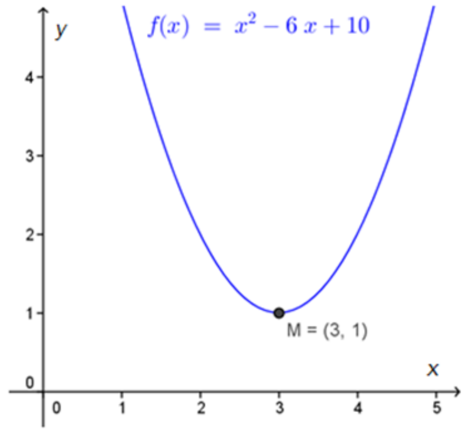
$$\frac{m}{m-2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3(m-2) \quad \Leftrightarrow \quad m = 3m - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 2m \quad \Leftrightarrow \quad m = 3$$

$$f(3)_{m=3} = (3-2)\cdot 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3 + 2(3+2) = 1$$



$$f(x)_{m=3} = x^2 - 6x + 10$$

Grafen til f:



Fra Eksamansveiledningen 2015

Fra Eksamen MAT1013 Matematikk 1T Høsten 2014, Oppgave 2 i Del 2:

Grete observerer en bakteriekultur. Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = -0{,}1x^4 + 5{,}5x^3 - 150x^2 + 5\,500x + 200000$$

viser antall bakterier $B(x)$ i bakteriekulturen x timer etter at hun startet observasjonene.

a) Tegn grafen til B for $x \in [0,\ 60]$.

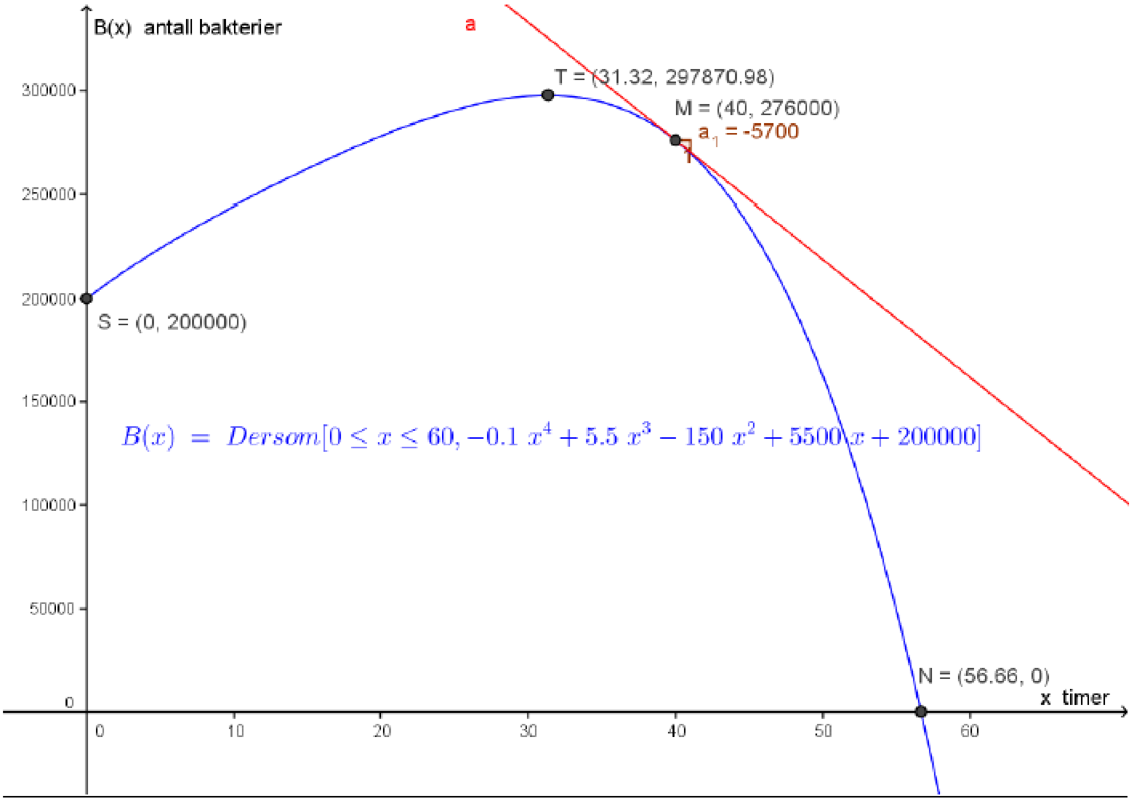
b) Bestem toppunktet på grafen og skjæringspunktene mellom grafen og aksene.

c) Hva forteller svarene i oppgave b) om bakteriekulturen?

d) Bestem den momentane vekstfarten til bakteriekulturen etter 40 timer.

Eksempel på besvarelse med graftegner:

a) Grafen til *f* (innenfor definisjonsområdet). Navn på aksen og skala.



b) Toppunkt: Se punkt T. Kommando: Ekstremalpunkt. Skjæringspunkt med y-aksen: Se punkt S. Skjæringspunkt med x-aksen: Se punkt N. Kommando: Nullpunkt.

c) Det var 200 000 bakterier i bakteriekulturen da Grete startet observasjonene, se punkt S.

ca. 56,5 h etter at Grete startet observasonene, var det ingen bakterier igjen i bakteriekulturen. Se punkt N.

d) Momentan vekstfart etter 40 timer: -5700. Stigningstall i punkt M. Antall bakterier synker da med 5700 per time.

Kandidatene kan kortfattet besvare spørsmålene ved å henvise til graftegningen. Det er ikke nødvendig å ta med framgangsmåte for hvordan grafen er kommet fram. Heller ikke er verditabell et krav. Det er en fordel at kandidatene får fram hvilket funksjonsuttrykk det har tastet inn i programmet. De ulike punktene bør komme fram med koordinater.

Eksempler for 1T

Sinussetningen

CAS

1 a/sin(45°)=2.5/sin(25°)

NLøs: $\{a = 4.18\}$

Cosinussetningen

CAS

1 10²=5²+8²-2*5*8*cos(B°)

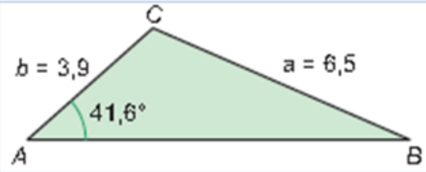
NLøs: $\{B = -97.9, B = 97.9\}$

Eksempel

I en trekant *ABC* er $a = 6{,}5$, $b = 3{,}9$ og $A = 41{,}6\,°$.

a Bestem vinkel *B*.

b Bestem lengden av siden *AB*.



Vi legger inn likningen $\dfrac{\sin B}{3{,}9} = \dfrac{\sin 41{,}6°}{6{,}5}$ i CAS-vinduet i GeoGebra:

CAS

1 sin(B°)/3.9=sin(41.6°)/6.5

NLøs: $\{B = 23.48, B = 156.52\}$

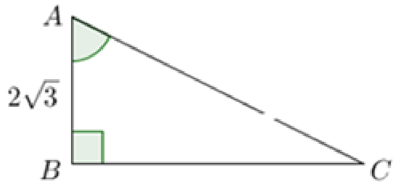
$156{,}52° + 41{,}6°$ er større enn $180°$.

Derfor forkaster vi løsningen $B = 156{,}52°$.

Vinkel *B* er $23{,}5\,°$.

Eksempel (Del 1)

På figuren ser du trekanten ABC, der vinkel C er gitt ved $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



Finn eksakt lengde av hypotenusen AC på figuren uten å bruke hjelpemidler.

Gjør slik:

Vi setter AC lik x. Vi skal finne hypotenusen og kjenner hosliggende katet til A. Derfor bruker vi cosinus.

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$

Deler på begge sider med $\sqrt{3}$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{2}{x} \cdot 4x$$

$$x = 8$$

$AC = 8$

Eksempel

Vi har funksjonen $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$.

Tangentene til grafen i to punkter på grafen går begge gjennom punktet $(0\,,\,-1)$.

Bruk CAS til å finne koordinatene for de to punktene.

Fordi denne linja tangerer grafen til f, ligger punktet $(x\,,\,f(x))$ på linja.

Stigningstallet a til linja må være lik $f'(x)$.

Vi kan da sette $y =$ f(x) og $a = f'(x)$. Dette gir

$f(x) - (-1) = f'(x)(x - 0)$.

Vi løser denne likningen med CAS.

Vi skriver inn f(x):=0.5x² +2 i felt 1.

I felt 2 skriver vi f(x)-(-1)=f'(x)(x-0).

CAS	
1	f(x):=0.5x²+1
	→ $f(x) := \frac{1}{2} x^2 + 1$
2	f(x)-(-1)=f'(x)(x-0)
	NLøs: $\{x = -2, x = 2\}$

Tangentene gjennom (0 , –1) tangerer grafen for $x = -2$ og for $x = 2$.
Vi finner andrekoordinatene til tangeringspunktene.

3	f(-2)
	≈ 3
4	f(2)
	≈ 3

Koordinatene til de to punktene er (–2 , 3) og (2 , 3).

Eksempel (R1/S1)

Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 2\lg(x+3)$ for hånd når du får vite at $\lg 2 \approx 0{,}3$.

Løsning:

$x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

Derfor er $x = -3$ en vertikal asymptote for grafen til f.
Videre regner vi ut en del funksjonsverdier:

$f(-2{,}5) = 2\lg 0{,}5 = 2\lg 2^{-1} = -2\lg 2 \approx -0{,}6$

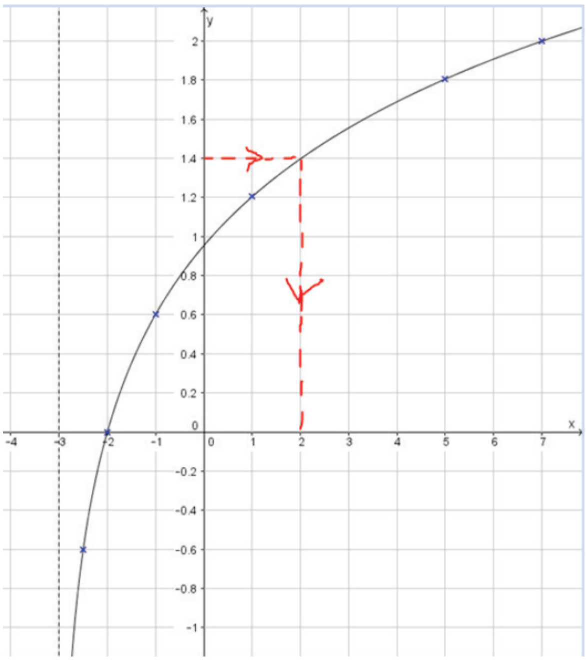
$f(-2) = 2\lg 1 = 0$

$f(-1) = 2\lg 2 \approx 0{,}6$

$f(1) = 2\lg 4 = 2\lg 2^2 = 4\lg 2 \approx 1{,}2$

$f(5) = 2\lg 8 = 2\lg 2^3 = 6\lg 2 \approx 1{,}8$

$f(7) = 2\lg 10 = 2$



S1/R1

Del 1 – Uten hjelpemidler

I noen av oppgavene kan du få bruk for noen av logaritmeverdiene i tabellen.

x	$\lg x$
0,40	–0,40
2	0,30
3	0,48
5	0,70
8	0,90

Oppgave

En bil ble kjøpt for 400 000 kroner. Verdien av bilen avtar med 20 % per år.

a Hva er vekstfaktoren?

b Hvor lang tid går det til verdien av bilen er 40 % av innkjøpsprisen?

Oppgave

I Joars hjemmebakeri etterspørres Randis bollekaker per uke gitt ved

$E = 200 - 50\lg p$.

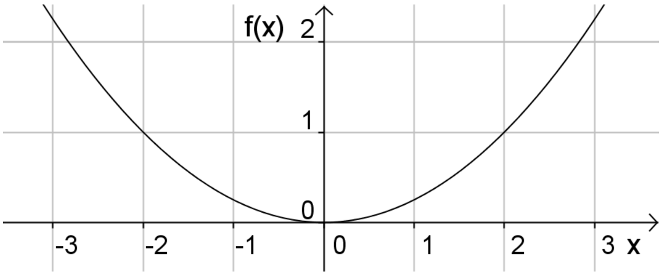
E er antall solgte bollekaker når prisen er p kroner.

a Hva er etterspørselen når prisen er 8 kr?
b Hva er etterspørselen når prisen er 15 kr?
c En uke ble det solgt 150 bollekaker. Hva var prisen denne uka?
d Finn en formel for p uttrykt ved E.

Forslag til elevaktivitet

Eksempel 1 Funksjonsdrøfting

Figuren viser grafen til funksjonen $f(x) = 0,25x^2$.



Hva er $f'(x)$?

Regn ut $f'(-2)$, $f'(-1,5)$, $f'(-1)$ og $f'(-0,5)$.

Regn ut $f'(0)$.

Regn ut $f'(0,5)$, $f'(1)$, $f'(1,5)$ og $f'(2)$.

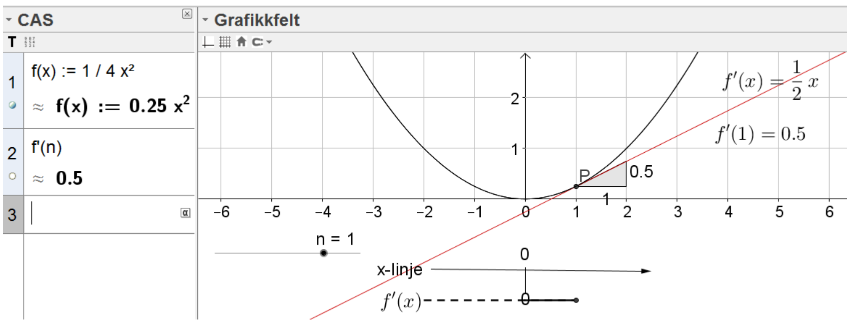
Fyll ut tabellen.

x	$f'(x)$
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	

Bruk grafen til å tegne en fortegnslinje for $f'(x)$.

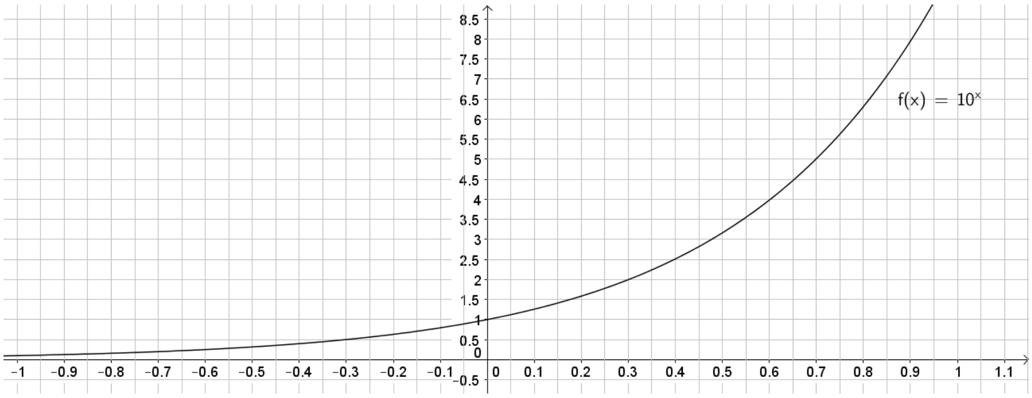
Kontroller at fortegnslinja stemmer med det du har fylt ut i tabellen.

Ved gjennomgang av aktiviteten brukes denne animasjonen:



Eksempel 2 Logaritmer

Figuren viser grafen til funksjonen $f(x) = 10^x$.



Oppgave 1

Bruk figuren til å finne en tilnærmingsverdi for

a	lg 8	Svar:	b	lg 5	Svar:
c	lg 2	Svar:	d	lg 1,5	Svar:
e	lg 1	Svar:	f	lg 0,5	Svar:

Oppgave 2

a Er det mulig å finne en verdi for lg 0?

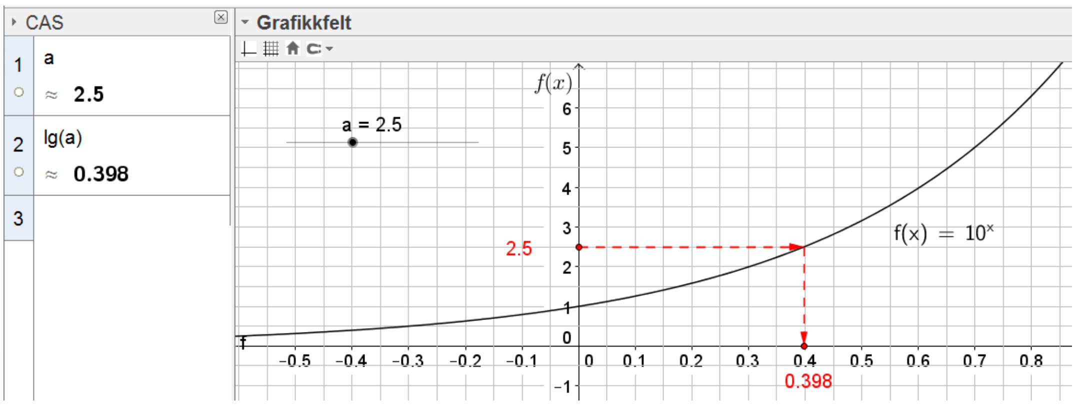
b Er det mulig å finne en verdi for logaritmen til et negativt tall?

Oppgave 3

Kan logaritmen til et tall være negativt?

Diskuter dette ut fra figuren

Tilhørende animasjon



DEL 2 EKSAMEN

To alternativer: Papirbasert med utskrifter eller levere én fil.

Alternativ 1

Besvarelsen føres med penn eller skrives i et dokument, en kombinasjon av dette.

Det er ingen ting i veien for at elever som bruker alternativ 1 kan føre på utskrifter tilleggsopplysninger med penn, for eksempel matematisk tekst.

Alternativ 2

Det er det som kalles for en IKT-basert eksamen.

Følgende filformater kan benyttes i forbindelse med IKT-basert eksamen: doc, pdf, rtf, xls, ods, odt, xlsx, docx, sxc, sxw, html, txt. Men det skal altså være kun 1 fil.

NB!

Altså kan elevene ikke levere inn dynamiske filer fra GeoGebra.
Én Excelfil er mulig, men egner seg vel ikke så godt til å levere hele besvarelsen med.
Elevene bør ikke lenke Excel filer til Word-dokumentet, siden denne lenken vil bli brutt når filen lastes opp.

Skjermbilder er vel da det eneste aktuelle.

1.7 Papirbasert eksamen

Del 1 av eksamen i matematikk er papirbasert. Når Del 2 skal leveres som en papirbasert eksamen kan kandidatene besvare Del 2 på papir og ta utskrifter fra programvare på datamaskin.

Alle kandidater bør få tilbud om å gjennomføre eksamen i matematikk som papirbasert eksamen.

Papirbasert eksamen betyr også at kandidatene må ha utskriftsmuligheter. Vi presiserer at en papirbasert eksamen også inkluderer bruk av datamaskin med påkrevd programvare. Besvarelsen skjer da utelukkende på papir/utskrifter fra programvare.

Del 1 og Del 2 sendes som papirbesvarelse til sensor med «ekspress over natten» slik at besvarelsen kommer raskest mulig fram til sensor.