Utdanningsdirektoratet

Eksamen

28.11.2013

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

b) $g(x) = 2x \cdot \ln(3x)$

c) $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Oppgåve 2 (3 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

a) Vis at divisjonen $P(x):(x-1)$ går opp, utan å utføre divisjonen.

b) Utfør polynomdivisjonen og løys ulikskapen $P(x) \geq 0$.

Oppgåve 3 (2 poeng)

I $\triangle ABC$ er AB = 10,0 cm og $\angle C = 90°$. Høgda h frå C til AB er 4,0 cm.

Konstruer $\triangle ABC$ gitt at BC er den lengste kateten. Forklar kva du har gjort.

Oppgåve 4 (2 poeng)

Ein elev skulle løyse ei likning og begynte slik:

$$2^{3x-1} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{3x-1} = 4 \cdot 2^2$$

Fullfør løysinga av likninga.

Oppgåve 5 (4 poeng)

Vi har gitt vektorane $\vec{a} = [1, 3]$, $\vec{b} = [3, 2]$ og $\vec{c} = [-1, 2]$.

a) Teikn vektorane $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c}$ i eit koordinatsystem.

b) Avgjer ved rekning om $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Oppgåve 6 (5 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2, \qquad D_f \in \mathbb{R}$$

a) Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Bestem koordinatane til eventuelle topp-, botn- og vendepunkt på grafen til f.

c) Lag ei skisse av grafen til f. Bruk han til å avgjere for kva x-verdiar $f'(x) > 0$ og samtidig $f''(x) < 0$.

Oppgåve 7 (3 poeng)

To sirklar S_1 og S_2 er gitt ved

$$S_1: \ x^2 + y^2 = 25$$

$$S_2: \ (x-a)^2 + y^2 = 9$$

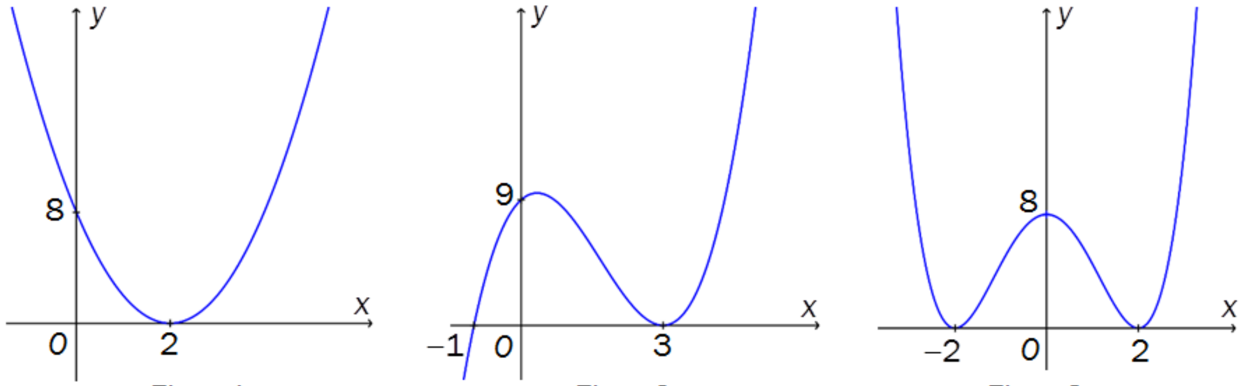
a) Teikn sirklane i eit koordinatsystem når $a = 6$.

b) For kva verdiar av a vil sirklane tangere kvarandre?

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Når grafen til ein polynomfunksjon tangerer *x*-aksen i $x = a$, har funksjonen minst to like (samanfallande) nullpunkt i $x = a$.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Grafen til ein andregradsfunksjon f er vist på figur 1. Grafen tangerer *x*-aksen i $x = 2$.

Forklar at $f(x) = 2 \cdot (x-2)^2$

b) Grafen til ein tredjegradsfunksjon g er vist på figur 2. Grafen tangerer x-aksen i $x = 3$.

Forklar at funksjonsuttrykket til g kan skrivast på forma $g(x) = k \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1)$
Bestem *k*.

c) Grafen til ein fjerdegradsfunksjon h er vist på figur 3. Grafen tangerer *x*-aksen i $x = -2$ og i $x = 2$.

Bestem funksjonsuttrykket $h(x)$.

Oppgåve 2 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1} \quad , \quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

a) Bestem asymptotane til f. Teikn grafen til f med asymptotar.

Funksjonen g er gitt ved

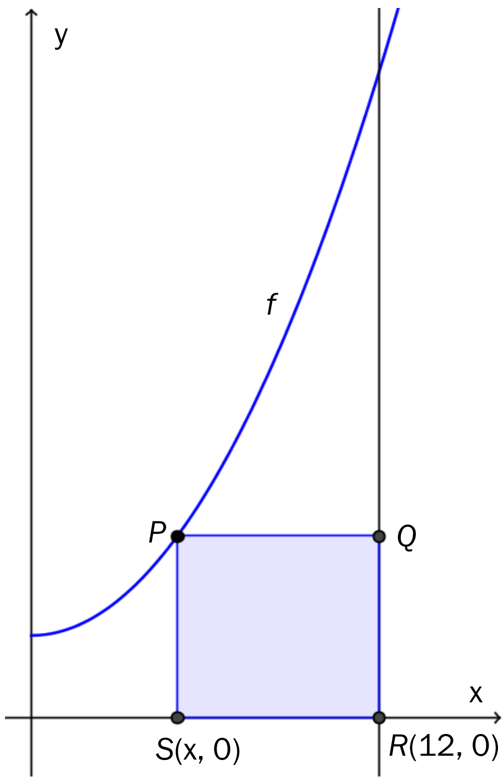
$$g(x)=x-1 \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

b) Bestem skjeringspunkta mellom grafane til f og g ved rekning.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Figuren til høgre viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=x^2+21 \quad , \quad x\in\langle 0,\rightarrow\rangle$$



Rektangelet $PSRQ$ blir laga slik at P ligg på grafen til f, punkta S og R ligg på x-aksen, og R og Q har førstekoordinat $x=12$. Punktet S ligg mellom origo og R.

a) Forklar at arealet av rektangelet $PSRQ$ kan skrivast som

$$A(x)=-x^3+12x^2-21x+252 \quad , \qquad x\in\langle 0\,,12\rangle$$

b) Bestem $A'(x)$ og bruk denne til å bestemme største og minste verdi som arealet av rektangelet kan ha.

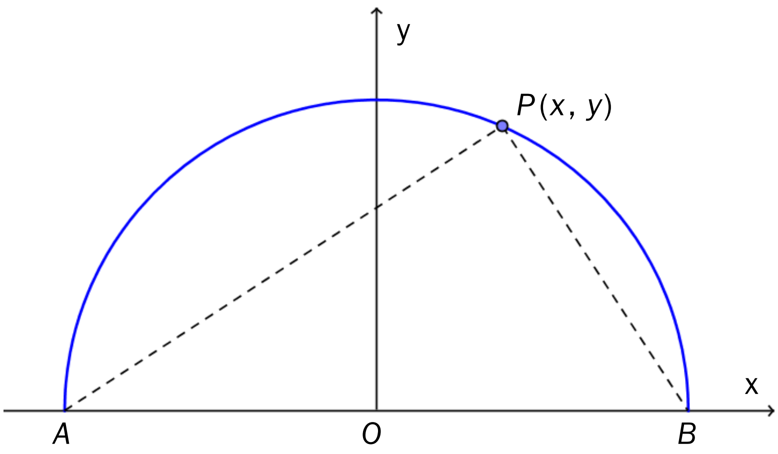
c) Teikn grafen til A, og kontroller om svara dine frå oppgåve b) stemmer.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Ein sirkel med radius r og sentrum i origo er gitt ved

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Punktet $P(x, y)$ er eit vilkårleg punkt på den øvre halvsirkelen. Sjå skissa nedanfor.



a) Bestem koordinatane til punkta A og B uttrykt ved r.
Bestem vektorkoordinatane til $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{PB}$.

b) Vis ved vektorrekning at $\angle APB = 90°$.

Oppgåve 5 (6 poeng)

Ved ein vidaregåande skole skal elevane velje fag. Hendingane M og F definerer vi slik:

M : Eleven vel matematikk.

F : Eleven vel fysikk.

Vi får opplyst at $P(M) = 0,64$, $P(F) = 0,32$ og $P(\overline{M \cup F}) = 0,30$.

a) Bestem $P(M \cap F)$ og $P(M \cap \overline{F})$.

b) Bestem $P(F \mid M)$. Undersøk om hendingane M og F er uavhengige.

c) Bruk Bayes' setning til å bestemme $P(M \mid F)$.

Oppgåve 6 (8 poeng)

I eit koordinatsystem har vi gitt punkta $A(-3, -3)$, $B(3, 1)$ og $D(-2, 2)$.

a) Bestem $\angle BAD$ og arealet av $\triangle ABD$.

Eit punkt C er gitt ved at $DC \parallel AB$ og $\angle ABC = 90^\circ$.

b) Bestem ved rekning koordinatane til C.

Ei parameterframstilling for linja l som går gjennom C og D, er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = \;\;\, 2 + 2t \end{cases}$$

Eit punkt E har koordinatane $(s, 2s - 2)$.

c) Bestem ved rekning ein verdi for s slik at E ligg på l.

d) Bestem koordinatane til punktet E når $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right|$.

Oppgåve 7 (2 poeng)

Løys likninga med omsyn på x

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg(x)-2} = x^2 \quad , \quad x > 0 \;\wedge\; n > 0$$

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

b) $g(x) = 2x \cdot \ln(3x)$

c) $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Oppgave 2 (3 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

a) Vis at divisjonen $P(x):(x-1)$ går opp, uten å utføre divisjonen.

b) Utfør polynomdivisjonen og løs ulikheten $P(x) \geq 0$.

Oppgave 3 (2 poeng)

I $\triangle ABC$ er AB = 10,0 cm og $\angle C = 90°$. Høyden h fra C til AB er 4,0 cm.

Konstruer $\triangle ABC$ gitt at BC er den lengste kateten. Forklar hva du har gjort.

Oppgave 4 (2 poeng)

En elev skulle løse en likning og begynte slik:

$$2^{3x-1} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{3x-1} = 4 \cdot 2^2$$

Fullfør løsningen av likningen.

Oppgave 5 (4 poeng)

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [1, 3]$, $\vec{b} = [3, 2]$ og $\vec{c} = [-1, 2]$.

a) Tegn vektorene $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c}$ i et koordinatsystem.

b) Avgjør ved regning om $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Oppgave 6 (5 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2, \qquad D_f \in \mathbb{R}$$

a) Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Bestem koordinatene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f. Bruk denne til å avgjøre for hvilke x-verdier $f'(x) > 0$ og samtidig $f''(x) < 0$.

Oppgave 7 (3 poeng)

To sirkler S_1 og S_2 er gitt ved

$$S_1: \; x^2 + y^2 = 25$$

$$S_2: \; (x-a)^2 + y^2 = 9$$

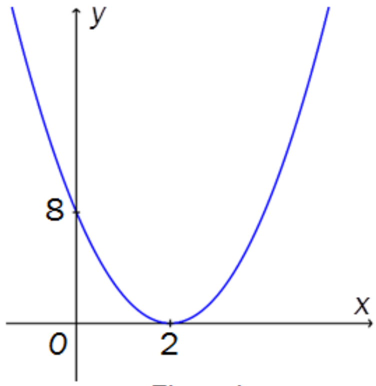
a) Tegn sirklene i et koordinatsystem når $a = 6$.

b) For hvilke verdier av a vil sirklene tangere hverandre?

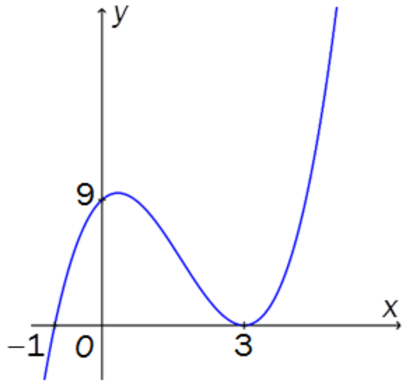
DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

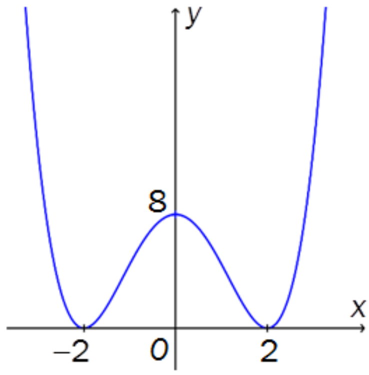
Når grafen til en polynomfunksjon tangerer *x*-aksen i $x = a$, har funksjonen minst to like (sammenfallende) nullpunkter i $x = a$.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

a) Grafen til en andregradsfunksjon f er vist på figur 1. Grafen tangerer *x*-aksen i $x = 2$.

   Forklar at $f(x) = 2 \cdot (x-2)^2$

b) Grafen til en tredjegradsfunksjon g er vist på figur 2. Grafen tangerer x-aksen i $x = 3$.

   Forklar at funksjonsuttrykket til g kan skrives på formen $g(x) = k \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1)$
   Bestem *k*.

c) Grafen til en fjerdegradsfunksjon h er vist på figur 3. Grafen tangerer *x*-aksen i $x = -2$ og i $x = 2$.

   Bestem funksjonsuttrykket $h(x)$.

Oppgave 2 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1} \quad , \quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

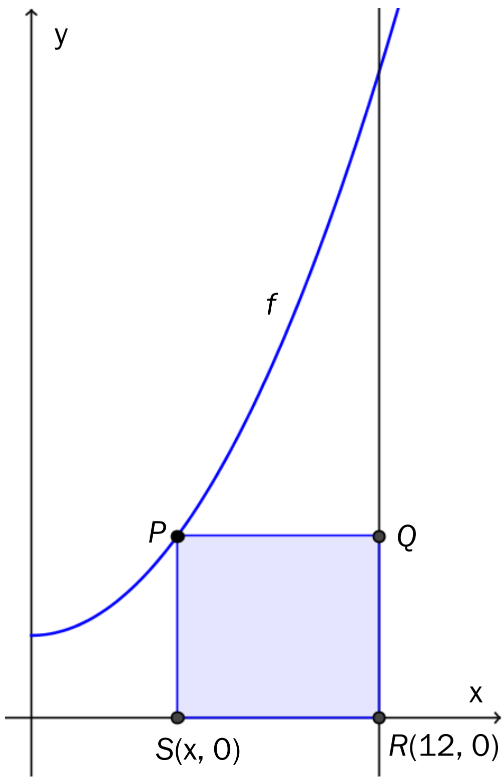
a) Bestem asymptotene til *f*. Tegn grafen til f med asymptoter.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x)=x-1 \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

b) Bestem skjæringspunktene mellom grafene til f og g ved regning.

Oppgave 3 (6 poeng)



Figuren til høyre viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=x^2+21 \quad , \quad x\in\langle 0, \rightarrow\rangle$$

Rektangelet $PSRQ$ lages slik at P ligger på grafen til f, punktene S og R ligger på x-aksen, og R og Q har førstekoordinat $x=12$. Punktet S ligger mellom origo og R.

a) Forklar at arealet av rektanglet $PSRQ$ kan skrives som

$$A(x)=-x^3+12x^2-21x+252 \quad , \qquad x\in\langle 0\,,12\rangle$$

b) Bestem $A'(x)$ og bruk denne til å bestemme største og minste verdi som arealet av rektanglet kan ha.

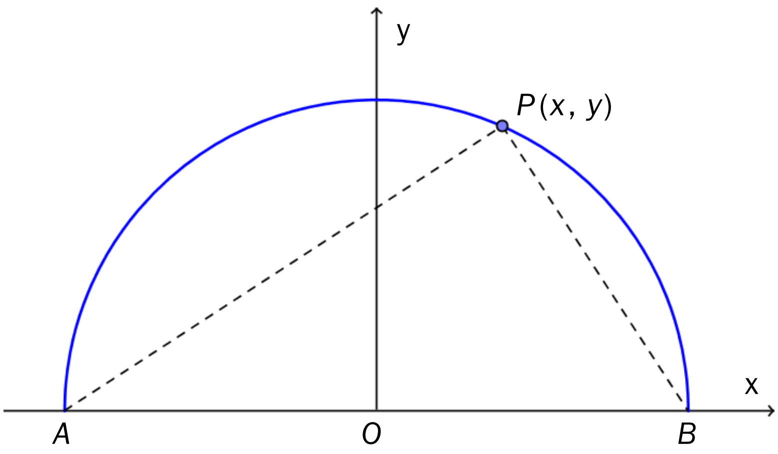
c) Tegn grafen til A, og kontroller om svarene dine fra oppgave b) stemmer.

Oppgave 4 (4 poeng)

En sirkel med radius r og sentrum i origo er gitt ved

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Punktet $P(x, y)$ er et vilkårlig punkt på den øvre halvsirkelen. Se skissen nedenfor.



a) Bestem koordinatene til punktene A og B uttrykt ved r.
Bestem vektorkoordinatene til $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{PB}$.

b) Vis ved vektorregning at $\angle APB = 90°$.

Oppgave 5 (6 poeng)

Ved en videregående skole skal elevene velge fag. Hendelsene M og F definerer vi slik:

M : Eleven velger matematikk.

F : Eleven velger fysikk.

Vi får opplyst at $P(M) = 0,64$, $P(F) = 0,32$ og $P(\overline{M \cup F}) = 0,30$.

a) Bestem $P(M \cap F)$ og $P(M \cap \overline{F})$.

b) Bestem $P(F \mid M)$. Undersøk om hendelsene M og F er uavhengige.

c) Bruk Bayes' setning til å bestemme $P(M \mid F)$.

Oppgave 6 (8 poeng)

I et koordinatsystem har vi gitt punktene $A(-3, -3)$, $B(3, 1)$ og $D(-2, 2)$.

a) Bestem $\angle BAD$ og arealet av $\triangle ABD$.

Et punkt C er gitt ved at $DC \parallel AB$ og $\angle ABC = 90°$.

b) Bestem ved regning koordinatene til C.

En parameterframstilling for linjen l som går gjennom C og D, er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Et punkt E har koordinatene $(s, 2s-2)$.

c) Bestem ved regning en verdi for s slik at E ligger på l.

d) Bestem koordinatene til punktet E når $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right|$.

Oppgave 7 (2 poeng)

Løs likningen med hensyn på x

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg(x)-2} = x^2 \quad , \quad x > 0 \;\wedge\; n > 0$$

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet