

Del 1

Oppgave 1

- a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

- b) Utfør polynomdivisjonen

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$$

- c) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{2x - 16}$$

- d) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg(x \cdot y^2) - 2 \lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

- e) Vi har funksjonen $f(x) = x \cdot e^{-x}$

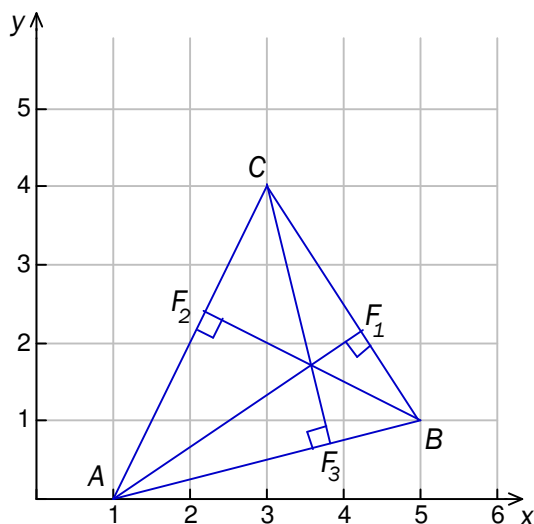
- 1) Vis at $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$. Bruk dette til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- 2) Bruk $f''(x)$ til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til f .

(I denne oppgaven kan du få bruk for $e^{-1} \approx 0,37$, $e^{-2} \approx 0,14$ og $e^{-3} \approx 0,05$)

Oppgave 2

- a) Vi har gitt vektorene $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [-b, a]$. Vis at vektorene står vinkelrett på hverandre.

Punktene $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ og $C(3, 4)$ er hjørner i en trekant. Fotpunktene til høydene fra hjørnene A , B og C er F_1 , F_2 og F_3 . Se skissen nedenfor.



- b) Forklar at

$$l: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$$

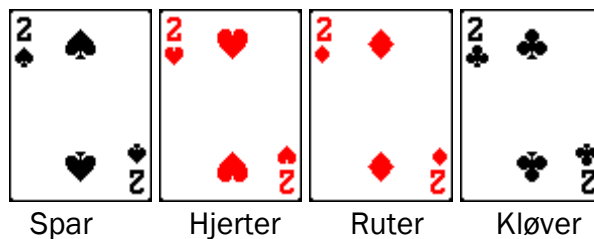
er en parameterframstilling for linja gjennom C og F_3 .

- c) Finn en parameterframstilling for linja gjennom A og F_1 .
- d) Regn ut koordinatene til skjæringspunktet mellom linjene CF_3 og AF_1 .
- e) Vis at skjæringspunktet du fant i d), også ligger på linja gjennom B og F_2 .
Hvilken setning fra geometrien er dette et eksempel på?

Del 2

Oppgave 3

En kortstokk består av 52 kort: 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver. Spar og kløver er svarte kort. Hjerter og ruter er røde kort.



Fra en kortstokk trekker vi tilfeldig ut 5 kort. I flere kortspill kalles disse 5 kortene en hånd.

a) Hvor mange mulige korthender er det?

Vi definerer følgende hendelser:

A: Korthånden består av 5 spar.

B: Korthånden består av 5 svarte kort.

b) Bestem $P(A)$ og $P(B)$.

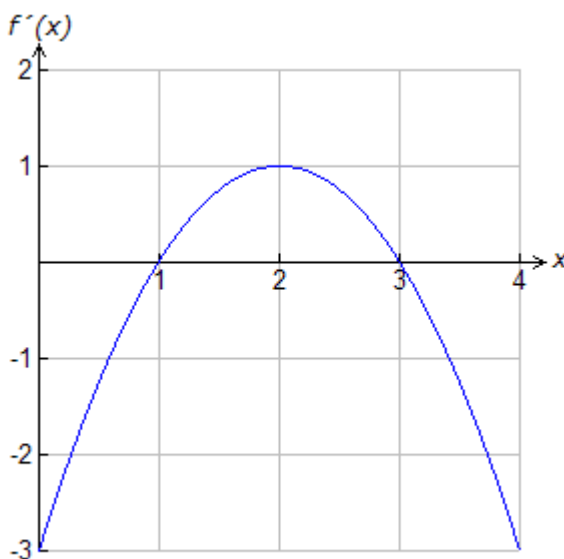
c) Finn $P(A|B)$. Er hendelsene A og B uavhengige?

Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

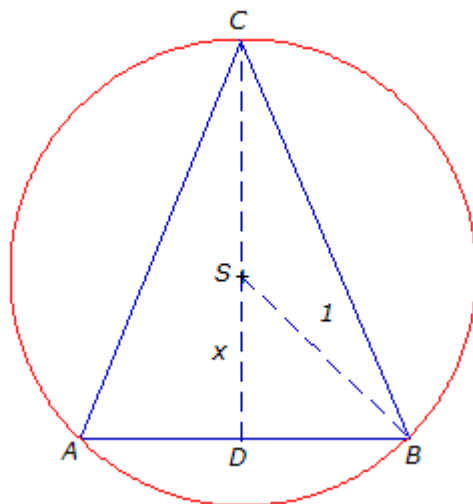


I denne oppgaven skal du drøfte en polynomfunksjon f av tredje grad.
På figuren har vi tegnet grafen til den *deriverte* av funksjonen.

- Bruk grafen til f' til å avgjøre hvor funksjonen f vokser og hvor den avtar.
- Bruk grafen til f' til å finne førstekoordinaten til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f .
- Bruk grafen til f' til å finne et funksjonsuttrykk for f' .
- Grafen til f går gjennom origo. Forklar at $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$.
Tegn grafen til f når $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Alternativ II

Figuren nedenfor viser en likebeint trekant ABC innskrevet i en sirkel med sentrum S og radius 1 . Linjestykket CD er en høyde i trekanten. Vi setter $SD = x$.



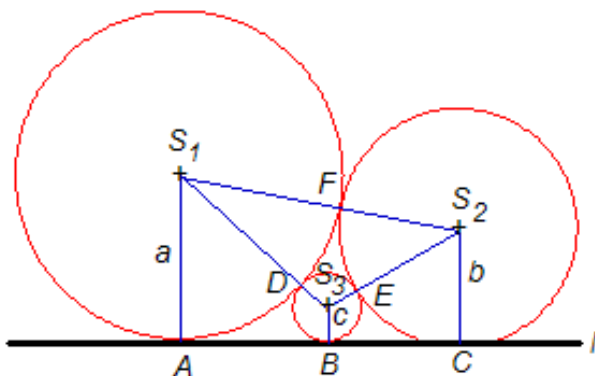
- a) Forklar at arealet F av trekanten ABC er gitt ved

$$F(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

- b) Tegn grafen til F . Bruk grafen til å finne det største arealet av trekanten ABC .
- c) Vis at $x = \frac{1}{2}$ er en løsning av likningen $F'(x) = 0$. Kommenter svaret.
- d) Regn ut lengden av sidene i trekanten ABC når $x = \frac{1}{2}$. Kommenter svaret.

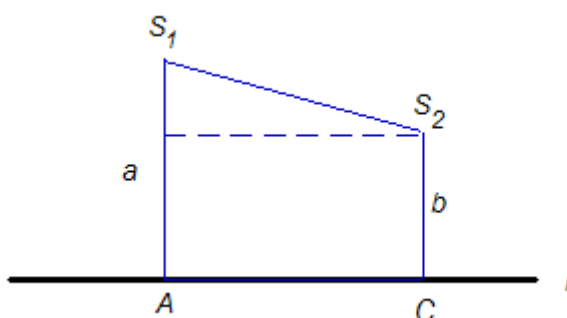
Oppgave 5

Tre sirkler med sentre i S_1 , S_2 og S_3 har radiene a , b og c . Alle sirklene tangerer linja l . Tangeringspunktene er A , B og C . Sirklene tangerer hverandre parvis i punktene D , E og F , slik figur 1 viser.



Figur 1

- Forklar at $S_1S_2 = a+b$. Finn også S_1S_3 og S_2S_3 uttrykt ved radiene.
- Bruk Pytagoras og vis at $AC = 2\sqrt{ab}$. Se figur 2.



Figur 2

- Vis på tilsvarende måte at $AB = 2\sqrt{ac}$ og $BC = 2\sqrt{bc}$.
- Bruk resultatene fra b) og c) til å vise følgende sammenheng mellom radiene i sirklene:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

- Vi setter $a = b = r$. Finn c uttrykt ved r .
- Konstruer figuren når $r = 4$ cm, enten med passer og linjal eller med dynamisk programvare. Forklar hvordan du har utført konstruksjonen.