DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

b) $g(x) = \ln(x-2)$

c) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

Oppgave 2 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

a) Vis at $(x-2)$ er en faktor i $P(x)$.

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ med lineære faktorer.

c) Bestem $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2}$

Oppgave 3 (3 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

En sirkel er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$$

Bestem sentrum S og radius r i sirkelen.

Oppgave 5 (5 poeng)

Vektoren $\vec{v} = [3,\ 4]$ er gitt.

a) Bestem en vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsatt rettet.

b) Bestem en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

c) Bestem konstantene k og t slik at

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{w}$$

d) Bestem en vektor $\vec{x}$ som har samme retning som $\vec{v}$ og som har lengde lik 7.

Oppgave 6 (4 poeng)

Binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

a) Bestem $\binom{12}{2}$. Vis at $\binom{n}{1} = n$.

b) Bruk det du fant i oppgave a) til å løse likningen $\dfrac{\binom{x}{1} \cdot \binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{6}{11}$

Oppgave 7 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x \cdot e^{-x} \quad , \quad x \in \langle -1\ ,\ 4 \rangle$$

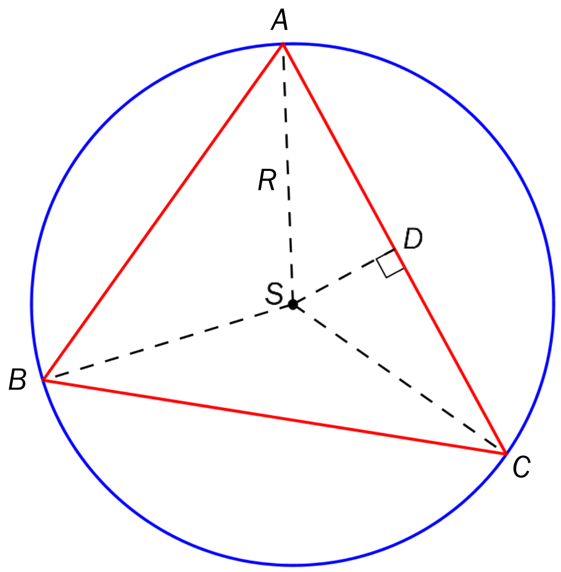
a) Bruk $f'(x)$ til å avgjøre hvor $f(x)$ vokser og hvor $f(x)$ avtar. Bestem x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter.

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (6 poeng)

En vilkårlig $\triangle ABC$ er gitt. En sirkel har radius R og sentrum i S og omskriver $\triangle ABC$.
En normal fra S til siden AC har fotpunkt D. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at $\angle B = \angle DSA$.

Vi setter $AC = b$.

b) Vis at $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

Vi setter $BC = a$ og $AB = c$.

c) Bruk tilsvarende resonnement som i oppgave b) til å vise at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Løs likningen

$$9^x - 3^x - 12 = 0$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

En sirkel har følgende egenskaper:

- Sentrum i sirkelen ligger på linjen $y = x$
- Sentrum i sirkelen ligger like langt fra origo som fra punktet $A(6\,,\,0)$
- Origo og punktet A ligger begge på sirkelperiferien

a) Tegn sirkelen i et koordinatsystem.

b) Bestem en likning for sirkelen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Bilene i en bilkø holder en fart på v km/h. Ifølge køteori vil antall biler N som passerer et bestemt sted per minutt være gitt ved modellen

$$N(v) = \frac{16,7v}{4 + 0,25v + 0,006v^2}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til N for $v \in [0,\, 120]$.

b) Bestem grafisk hva farten bør være for at minst 25 biler skal kunne passere stedet per minutt.

c) Bestem grafisk hva farten må være for at flest mulig biler skal kunne passere stedet per minutt. Hvor mange biler passerer stedet per minutt da?

Oppgave 3 (6 poeng)

Posisjonen til to båter A og B er gitt ved

$$\vec{r_A}(t) = [18t - 8\ ,\ 10 - 3t]$$

$$\vec{r_B}(t) = [10t\ ,\ 20 - 6t]$$

Alle lengdemål er gitt i kilometer, og tiden t er gitt i timer.

a) Bestem farten (banefarten) til hver av båtene.

b) Forklar at avstanden d mellom båtene er gitt ved

$$d(t) = \sqrt{(8t-8)^2 + (3t-10)^2}$$

c) Når er denne avstanden minst? Hvor langt fra hverandre er båtene da?

Oppgave 4 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Om denne funksjonen vet vi at

- f har nullpunkt i $x = 1$
- $x = 2$ er x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f
- Grafen til f går gjennom punktet $(3,\ 4)$

a) Sett opp tre likninger som svarer til opplysningene ovenfor.

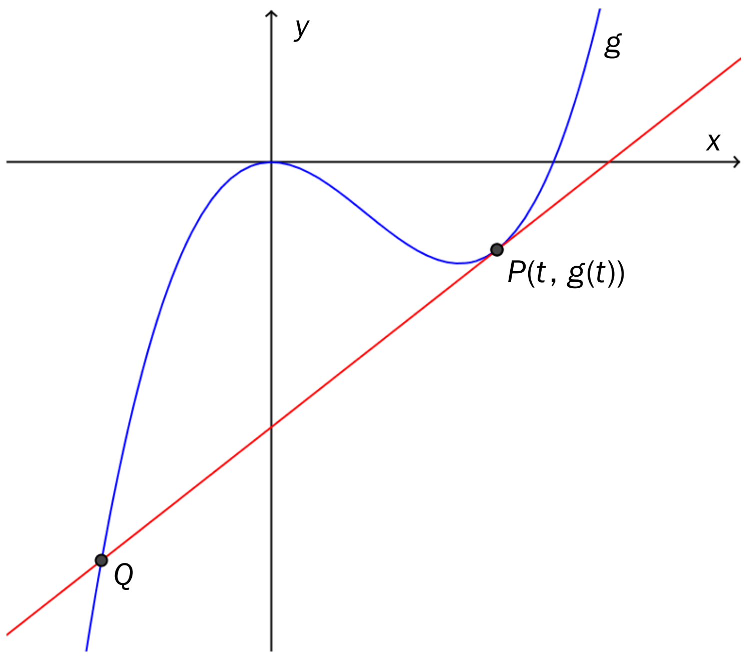
b) Bruk CAS til å bestemme konstantene a, b og c.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t\ ,\ g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a) Vis at tangenten har likningen

$$y = (3at^2 - 2t)\,x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.