Utdanningsdirektoratet

Eksempeloppgave 2008

REA3024 Matematikk R2

Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Bruk av kilder:	Alle kilder som blir brukt til eksamen skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til kilden. Du må oppgi forfatter og hele tittelen både på lærebøker og annen litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f. eks. ikke tilstrekkelig med www.Wikipedia.no.
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 2x\cos(3x)$

b) Deriver funksjonen $f(x) = 3\left(e^{4x} + 1\right)^2$

c) Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + x + 2$

1) Ligger grafen over eller under *x*-aksen når $x = 1$?

2) Stiger eller synker grafen når $x = 1$?

3) Øker eller minker den momentane veksthastigheten når $x = 1$?

d) Finn summen av den uendelige rekka: $9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots$

e) Bestem integralet $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 - 1}\,dx$

f) Funksjonen $f(x) = \dfrac{24}{\sqrt{x}}$ er gitt.

1) Vis at likningen for tangenten i punktet $\left(4\,,\ f(4)\right)$ er gitt ved $y = -\dfrac{3}{2}x + 18$.

2) Bestem arealet av det området som er avgrenset av grafen til *f*, tangenten i $\left(4\,,\ f(4)\right)$ og linja $x = 2$.

g) Gitt punktene $A(1,1,1)$, $B(3,3,2)$ og $C(2,1,2)$. Finn $\angle BAC$.

h) Løs differensiallikningen $y' + (\cos x) \cdot y = 0$ når $y(0) = 4$

i) En rekke er gitt ved at $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n + n + 2$ der $n \in N$

1) Skriv opp de 5 første leddene i rekken.
2) Bruk induksjon til å bevise at det generelle leddet er $a_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$

I Del 1 av eksamen kan du få bruk for eksaktverdier til noen vinkler:

v	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos v$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Del 2

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = 3(\sin x)^3$ der $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

a) Tegn grafen til f, og finn nullpunktene til funksjonen.

b) Tegn fortegnslinja til $f'(x)$ og bruk den til å finne eventuelle topp-, bunn- og terrassepunkter på grafen til f.

Det kan vises at $\int f(x)\,\mathrm{d}x = a(\cos x)^3 + b\cos x + c$, der a, b og c er konstanter.

c) Vis at $a = 1$ og $b = -3$.

d) Bruk c) til å bestemme arealet som er avgrenset av grafen til f og som ligger over x-aksen.

Oppgave 3

I et koordinatsystem har vi punktene $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 5)$.

a) Tegn punktene i et koordinatsystem. Finn avstanden fra *A* til *B*.

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, og bruk svaret til å finne volumet av tetraederet *OABC*.

En arealsetning oppkalt etter Pytagoras sier at:

$$F^2_{\Delta ABC} = F^2_{\Delta AOC} + F^2_{\Delta BOC} + F^2_{\Delta OAB}$$

Her betyr $F_{\Delta ABC}$ arealet av trekanten *ABC.* Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Regn ut de fire arealene, og kontroller at arealsetningen stemmer i dette tilfellet.

Planet α går gjennom punktene *A, B* og *C.*

d) Bestem likningen til planet α.

Et annet plan β er gitt ved

$$\beta : \quad x + y - z = 5$$

e) Finn vinkelen mellom planene α og β.

Vi lar nå punktet C få koordinatene $(0, 0, t)$. Vi antar at $t \neq 0$.

f) Forklar at likningen til planet α da kan skrives på formen

$$\alpha : \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{t} = 1$$

g) Finn likningen for det planet som α nærmer seg til når $t \to \infty$. Hva kan du si om dette planet?

Oppgave 4 – Alternativ I

Newtons 2. lov sier at $F = m \cdot a$, der F er summen av kreftene som virker på en gjenstand med masse m og akselerasjon a.

Vi minner om at akselerasjonen er den deriverte av farten med hensyn på tiden.

Newtons 2. lov kan for eksempel brukes til å beskrive og studere fallskjermhopp.

En fallskjermhopper med fallskjermen har til sammen massen m. La $v(t)$ være farten til hopperen ved tiden *t* etter uthoppet. Hoppingen skjer fra et utoverhengende fjell, slik at vi kan anta at $v(0) = 0$. Det er to krefter som virker på hopperen: tyngdekraften $m \cdot g$ og luftmotstanden som er $-k_1 \cdot v(t)$ når fallskjermen er lukket. Her er k_1 en konstant og g er tyngdeakselerasjonen. Alle størrelsene har benevning i SI-systemet, det vil si at masse måles i kg, tid måles i sekunder og strekning måles i meter.

a) Vis at Newtons 2. lov kan omformes til følgende differensiallikning:

$$v'(t) + \frac{k_1}{m} v(t) = g$$

Vi setter $m = 80$, $g = 10$ og $k_1 = 16$.

b) Vis at $v(t) = 50 - 50 \cdot e^{-0{,}2\,t}$ er en løsning av differensiallikningen i a).

c) Finn farten og akselerasjonen til hopperen når $t = 4$.

Etter 5 sekunder drar hopperen i snora og utløser fallskjermen. Vi regner med at luftmotstanden nå blir $-k_2 \cdot v(t)^2$. Vi setter $g = 10$ og $k_2 = 8$.

d) Bruk Newtons 2. lov til å sette opp en differensiallikning for situasjonen når fallskjermen er åpnet.

e) Differensiallikningen i d) er separabel. Vi setter v i stedet for $v(t)$. Vis at vi kan skrive differensiallikningen som:

$$\left(\frac{1}{10 - v} + \frac{1}{10 + v}\right)\frac{dv}{dt} = 2$$

f) Finn et uttrykk for v ved å løse differensiallikningen i e).

Oppgave 4 – Alternativ II

Vi har gitt differensiallikningen

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1} \cdot y = 0 \qquad \text{der} \qquad x \neq -1 \text{ og } x \neq 1$$

a)

1) Vis at $y = C\sqrt{1 - x^2}$ er en løsning når $x \in \langle -1,\ 1 \rangle$.

2) Skisser grafene til y for $C = 1$ og for $C = -1$.

3) Velg andre verdier for C og skisser grafene til y. Kommenter.

b)

1) Vis at $y = C\sqrt{x^2 - 1}$ er en løsning når $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

2) Velg ulike verdier for C og skisser grafene til y. Kommenter.

c)

1) Løs differensiallikningen ved regning

$$y' - \frac{2}{x^2 - 1} \cdot y = 0 \qquad \text{når } y(0) = C$$

2) Velg ulike verdier for C, og tegn de tilhørende grafene til y.