Utdanningsdirektoratet

Eksamen

03.12.2009

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Bruk av kjelder:	Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal førast opp på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må føre opp forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal du føre opp heile adressa og nedlastingsdatoen. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med www.wikipedia.no.
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det vil seie at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

b) Forklar kva det vil seie at ein vinkel er målt i radianar. Kva samanheng er det mellom radianar og grader?

c) Løys differensiallikninga $y' + 2y = 3x$ når $y(0) = 3$

d) Vi har polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1) Vis at $f(x)$ er deleleg med $(x-1)$ og faktoriser $f(x)$.

2) Vis at $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ kan skrivast $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

3) Finn integralet

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, dx$$

e) I ei rekkje er $a_1 = x - 1$, $a_2 = 2x$ og $a_3 = 4x + 8$. Bestem x slik at rekkja blir geometrisk.

f) Summen av dei n første ledda i ei generell geometrisk rekkje er

$$S_n = \frac{a_1\left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$

Bevis denne formelen ved induksjon.

Oppgåve 2

Gitt punkta $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 3)$ og $C(2, 7, 5)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Punkta A, B og C ligg i planet α.

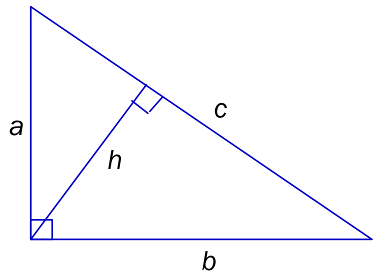
c) Finn likninga til planet α. Undersøk om punktet $D(2, 2, 3)$ ligg i planet α.

d) Finn ei parameterframstilling for ei linje l som går gjennom punktet D, og som står vinkelrett på planet α. Finn skjeringspunktet S mellom l og α.

Del 2

Oppgåve 3

Vi har ein rettvinkla trekant med kateter a og b og hypotenus c. Høgda ned på hypotenusen blir kalla h. Sjå figuren til høgre.

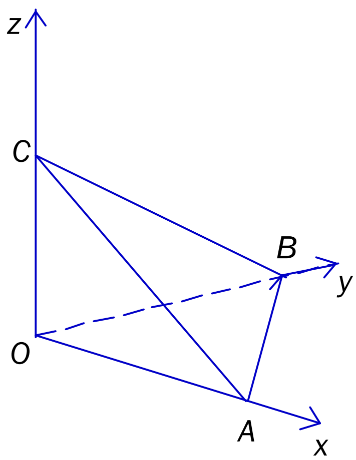


a) Forklar at $a \cdot b = c \cdot h$

Bruk Pytagoras' setning og vis at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Vi vil no studere tetraederet *OABC*. Hjørnet O er plassert i origo, $A(a, 0, 0)$ på x-aksen, $B(0, b, 0)$ på y-aksen og $C(0, 0, c)$ på z-aksen. Sjå figuren nedanfor.



b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ uttrykt ved a, b og c. Finn arealet av trekanten *ABC*.

Ei arealsetning som er oppkalla etter Pytagoras, seier at

$$F^2_{\triangle ABC} = F^2_{\triangle OAC} + F^2_{\triangle OBC} + F^2_{\triangle OAB}$$

Her tyder $F_{\triangle ABC}$ arealet av trekanten *ABC*. Tilsvarande gjeld for ledda på høgre side.

c) Kontroller at arealsetninga er riktig.

d) Avstanden frå O til $\triangle ABC$ blir kalla h. Forklar at vi kan skrive

$$F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2h}$$

e) Bruk c) og d) til å vise at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Oppgåve 4

Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneheld delar av begge oppgåvene,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Vi vil studere ein periodisk funksjon f gitt på forma

$$f(x) = a\cos(cx - \varphi) + d \qquad \text{når} \qquad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

Her er a, c, d og φ konstantar.

Det blir opplyst at grafen til f har toppunkt i $(1, 6)$, og at det nærmaste botnpunktet er $(3, -1)$.

a) Forklar at grafen til f må ha toppunkt også i $(5, 6)$. Skriv koordinatane til eitt toppunkt og to botnpunkt til. Finn funksjonsuttrykket til f.

b) Kvar minkar funksjonen raskast?

c) Finn nullpunkta til funksjonen ved rekning.

d) Teikn grafen til f. Finn det samla arealet av flatestykka som er avgrensa av grafen til f og linja $y = 5$, og som ligg på oversida av linja.

Alternativ II

Vi har funksjonen

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad D_f = [0, 9]$$

a) Finn volumet av den omdreiingslekamen vi får dersom grafen til f blir dreia 360° om x-aksen.

Ei linje l er gitt ved likninga $y = k$, der k er ein konstant $k \in [0, 3]$.

b) Forklar at volumet av den omdreiingslekamen vi får når grafen til f blir dreia 360° om linja l, er gitt ved

$$V(k) = \pi \int_0^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - k\right)^2 \, dx$$

c) Finn $V(k)$.

d) Finn den verdien for k som gir det minste volumet.

Oppgåve 5

Ein ball med masse $m = 2\text{ kg}$ blir sleppt frå ei høgd $h = 30\text{ m}$. Vi set at luftmotstanden er proporsjonal med farten v. Frå tidlegare forsøk veit vi at den maksimale farten denne ballen kan oppnå når han fell, er 40 m/s. Vi lèt tyngdeakselerasjonen vere 10 m/s^2.

I denne oppgåva vil vi rekne utan nemning.

Bruker vi opplysningane ovanfor saman med Newtons 2. lov, får vi at farten v må tilfredsstille differensiallikninga

$$v' + \frac{1}{4}v = 10$$

der $v = v(t)$ er farten etter t sekund.

a) Forklar at $v(0) = 0$ og løys differensiallikninga.

Etter t sekund har ballen falle strekninga s gitt ved $s'(t) = v(t)$.

b) Finn eit uttrykk for $s(t)$.

c) Kor lang tid tek det før ballen treffer bakken? Kva er farten då?

I staden for å sleppe ballen kastar vi han vertikalt nedover med startfarten v_0.

d) Kva må v_0 vere for at ballen skal bruke 2 sekund før han treffer bakken?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Bruk av kilder:	Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med www.wikipedia.no.
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan bruke fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

b) Forklar hva det betyr at en vinkel er målt i radianer. Hvilken sammenheng er det mellom radianer og grader?

c) Løs differensiallikningen $y' + 2y = 3x$ når $y(0) = 3$

d) Vi har polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$ og faktoriser $f(x)$.

2) Vis at $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ kan skrives $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

3) Bestem integralet

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, dx$$

e) I en rekke er $a_1 = x - 1$, $a_2 = 2x$ og $a_3 = 4x + 8$. Bestem x slik at rekken blir geometrisk.

f) Summen av de n første leddene i en generell geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1\left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$

Bevis denne formelen ved induksjon.

Oppgave 2

Gitt punktene $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 3)$ og $C(2, 7, 5)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Punktene A, B og C ligger i planet α.

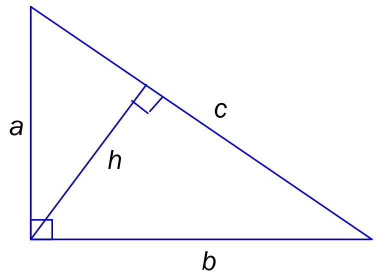
c) Finn likningen til planet α. Undersøk om punktet $D(2, 2, 3)$ ligger i planet α.

d) Bestem en parameterframstilling for en linje l som går gjennom punktet D, og som står vinkelrett på planet α. Finn skjæringspunktet S mellom l og α.

Del 2

Oppgave 3

Vi har en rettvinklet trekant med kateter a og b og hypotenus c. Høyden ned på hypotenusen kalles h. Se figuren til høyre.



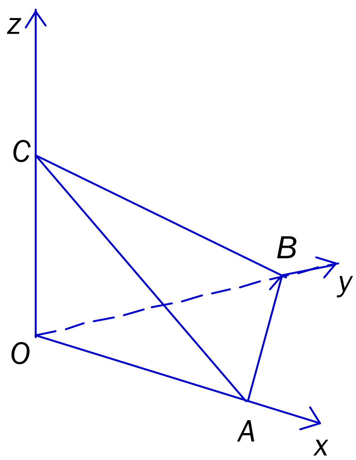
a) Forklar at $a \cdot b = c \cdot h$

Bruk Pytagoras' setning og vis at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Vi vil nå studere tetraederet *OABC*. Hjørnet O er plassert i origo, $A(a, 0, 0)$ på x-aksen, $B(0, b, 0)$ på y-aksen og $C(0, 0, c)$ på z-aksen. Se figuren nedenfor.

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ uttrykt ved a, b og c. Finn arealet av trekanten *ABC*.



En arealsetning som er oppkalt etter Pytagoras, sier at

$$F^2_{\triangle ABC} = F^2_{\triangle OAC} + F^2_{\triangle OBC} + F^2_{\triangle OAB}$$

Her betyr $F_{\triangle ABC}$ arealet av trekanten *ABC.* Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Kontroller at arealsetningen er riktig.

d) Avstanden fra O til $\triangle ABC$ kalles h. Forklar at vi kan skrive

$$F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2h}$$

e) Bruk c) og d) til å vise at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Oppgave 4

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge oppgavene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Vi vil studere en periodisk funksjon f gitt på formen

$$f(x) = a\cos(cx - \varphi) + d \qquad \text{når} \qquad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

Her er a, c, d og φ konstanter.

Det oppgis at grafen til f har toppunkt i $(1, 6)$, og at det nærmeste bunnpunktet er $(3, -1)$.

a) Forklar at grafen til f må ha toppunkt også i $(5, 6)$. Skriv koordinatene til ett toppunkt og to bunnpunkter til. Bestem funksjonsuttrykket til f.

b) Hvor avtar funksjonen raskest?

c) Finn nullpunktene til funksjonen ved regning.

d) Tegn grafen til f. Finn det samlede arealet av flatestykkene som er avgrenset av grafen til f og linjen $y = 5$, og som ligger på oversiden av linjen.

Alternativ II

Vi har funksjonen

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad D_f = [0\,,\,9]$$

a) Bestem volumet av det omdreiningslegemet vi får dersom grafen til f dreies 360° om x-aksen.

En linje l er gitt ved likningen $y = k$, der k er en konstant $k \in [0\,,\,3]$.

b) Forklar at volumet av det omdreiningslegemet vi får når grafen til f dreies 360° om linjen l, er gitt ved

$$V(k) = \pi \int_0^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - k\right)^2 \, dx$$

c) Finn $V(k)$.

d) Bestem hvilken verdi for k som gir det minste volumet.

Oppgave 5

En ball med masse $m = 2 \text{ kg}$ slippes fra en høyde $h = 30 \text{ m}$. Vi antar at luftmotstanden er proporsjonal med farten v. Fra tidligere forsøk vet vi at den maksimale farten denne ballen kan oppnå når den faller, er 40 m/s. Vi lar tyngdeakselerasjonen være 10 m/s^2.

I denne oppgaven vil vi regne uten benevning.

Bruker vi opplysningene ovenfor sammen med Newtons 2. lov, får vi at farten v må tilfredsstille differensiallikningen

$$v' + \frac{1}{4}v = 10$$

der $v = v(t)$ er farten etter t sekunder.

a) Forklar at $v(0) = 0$ og løs differensiallikningen.

Etter t sekunder har ballen falt strekningen s gitt ved $s'(t) = v(t)$.

b) Finn et uttrykk for $s(t)$.

c) Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken? Hva er farten da?

I stedet for å slippe ballen kaster vi den vertikalt nedover med startfarten v_0.

d) Hva må v_0 være for at ballen skal bruke 2 sekunder før den treffer bakken?

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet