Utdanningsdirektoratet

Eksamen

29.11.2011

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x \cdot e^x$

2) $g(x) = 2\sin 2x$

3) $h(x) = 2\sin^2 x$

b) Bestem integrala

1) $\int x \cdot \cos x \, dx$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4} \, dx$

3) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \, dx$

c) Vi har gitt rekkja

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

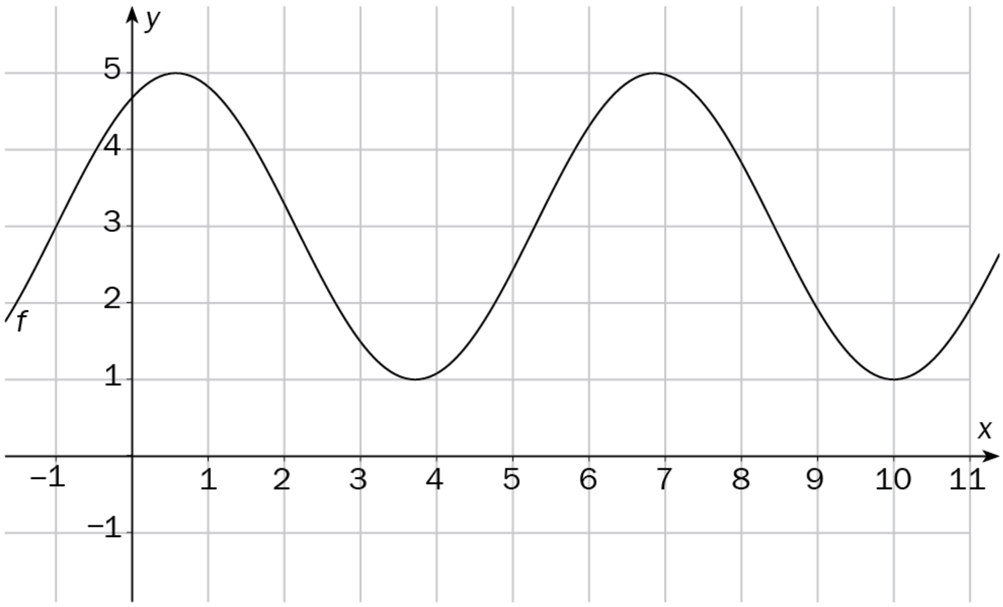
Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

d) Vi har gitt rekkja

$$1 + 7 + 19 + 37 + \cdots$$

Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

e) Grafen til ein trigonometrisk funksjon av typen $f(x) = a \cdot \sin\left(cx + \varphi\right) + d$ er gitt nedanfor.



1) Bruk grafen til å bestemme amplituden, perioden og likevektslinja til funksjonen.

2) Bestem eit funksjonsuttrykk for $f(x)$.

f) Løys differensiallikninga

$$y' - 3y = 5 \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

g) Vi har gitt punkta $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ og $C(7, 3, 5)$

1) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

2) Vis ved rekning at $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AB}$ og $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AC}$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4\sin\left(2x - 2\right) + 5$$

a) Teikne grafen til f når $x \in \left\langle 0,\ 2\pi \right\rangle$

b) Bruk funksjonsuttrykket og eigenskapar ved sinus til å forklare at maksimalverdien er lik 9. Bestem på same måte minimalverdien. Finn dei tilhøyrande x-verdiane.

c) Bestem parametrane a, c, φ og d når vi skriv funksjonsuttrykket på forma

$$f(x) = a \cdot \cos\left(cx + \varphi\right) + d\,.$$

Oppgåve 3 (8 poeng)

Vi har gitt den uendelege rekkja

$$2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots$$

a) Kva slags rekkje er dette? Grunngi svaret ditt.

b) Bestem konvergensområdet til rekkja.

c) Vis at summen av rekkja er $S\left(x\right) = \dfrac{2x}{x-1}$

d) Teikne grafen til $S\left(x\right)$

e) Løys likninga $S\left(x\right) = -1$ og $S\left(x\right) = 3$ både grafisk og ved rekning.

Oppgåve 4 (8 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 3 \quad \text{og} \quad g(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 3$$

a) Teikne grafane til f og g i same koordinatsystem.

b) Bestem koordinatane til skjeringspunkta mellom f og g ved rekning.

To område blir avgrensa av grafane til f og g.

c) Bestem areala til kvart av desse områda. Kommenter svaret ditt.

Vi har gitt funksjonen

$$h(x) = -x^3 + x^2 + cx + 3$$

Når $c > 0$, vil grafane til f og h avgrense to område.

d) Vis ved rekning at areala til desse to områda er like store.

Oppgåve 5 (6 poeng)

Likninga til ei kule er gitt ved

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 6z - 14 = 0$$

a) Vis at kula har sentrum i $\left(2,\ -3,\ 3\right)$. Bestem radien til kula.

Ei rett linje l gjennom sentrum er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

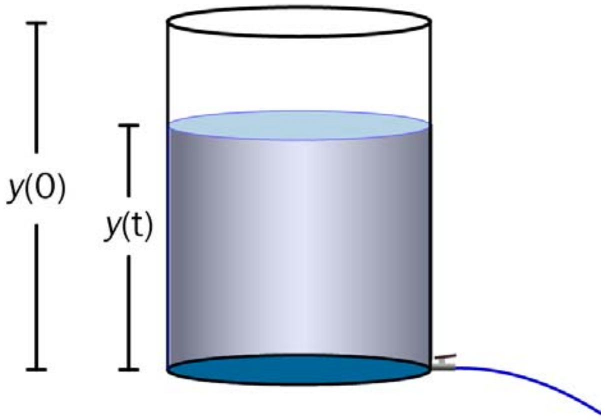
b) Bestem skjeringspunkta for l og kula.

Plana α og β tangerer kula i kvart sitt skjeringspunkt.

c) Bestem likningane til plana α og β.

Oppgåve 6 (7 poeng)

Ein tank inneheld vatn. Vi vil undersøke kor høgt vatnet står i tanken t minutt etter at vatnet har begynt å renne ut. Vi let vass-standen (vannhøgda) være $y(t)$.



Torricellis lov seier:

Vass-standen minkar med ein fart som er proporsjonal med kvadratrota av vass-standen.

a) Forklar at Torricellis lov gir differensiallikninga

$$y' = -k \cdot \sqrt{y} \quad , \text{ der } k > 0$$

b) Bruk metoden for løysing av separable differensiallikningar til å vise at den generelle løysinga til likninga i oppgåve 6 a) er gitt ved $y = \frac{1}{4}(-kt + C)^2$

Du får vite at $y(0) = h$ og $y(10) = \frac{h}{4}$

c) Vis at éi løysing for konstantane er $C = 2\sqrt{h}$ og $k = \frac{\sqrt{h}}{10}$

Bestem kor lang tid det tek før tanken er tom.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x \cdot e^x$

2) $g(x) = 2\sin 2x$

3) $h(x) = 2\sin^2 x$

b) Bestem integralene

1) $\int x \cdot \cos x \; dx$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4} \; dx$

3) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \; dx$

c) Vi har gitt rekken

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

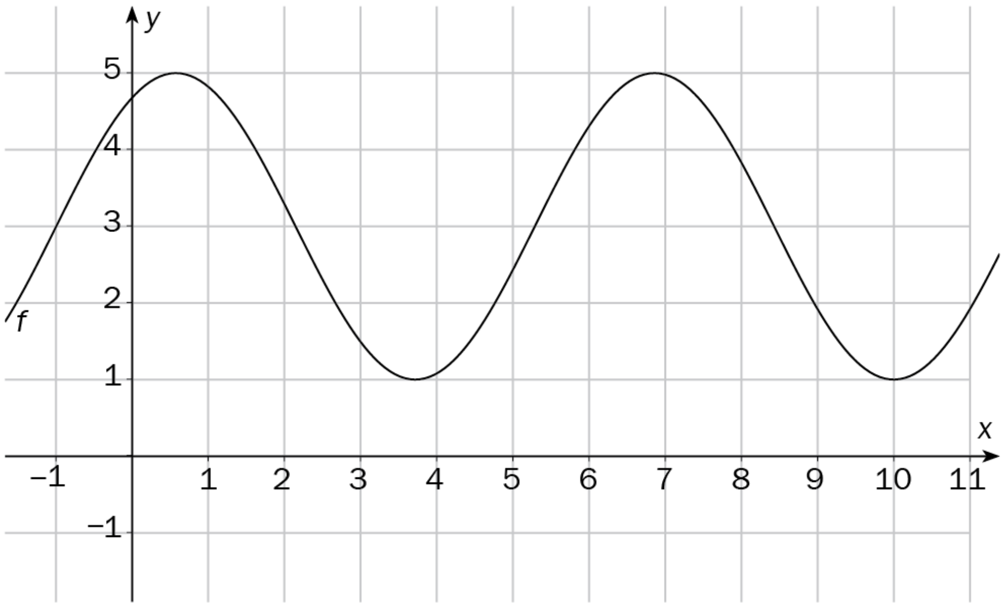
Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

d) Vi har gitt rekken

$$1 + 7 + 19 + 37 + \cdots$$

Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

e) Grafen til en trigonometrisk funksjon av typen $f(x) = a \cdot \sin\left(cx + \varphi\right) + d$ er gitt nedenfor.



1) Bruk grafen til å bestemme amplituden, perioden og likevektslinjen til funksjonen.

2) Bestem et funksjonsuttrykk for $f(x)$.

f) Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 5 \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

g) Vi har gitt punktene $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ og $C(7, 3, 5)$

1) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

2) Vis ved regning at $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AB}$ og $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AC}$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4\sin(2x - 2) + 5$$

a) Tegn grafen til f når $x \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$

b) Bruk funksjonsuttrykket og egenskaper ved sinus til å forklare at maksimalverdien er lik 9. Bestem på samme måte minimalverdien. Finn de tilhørende x-verdiene.

c) Bestem parametrene a, c, φ og d når vi skriver funksjonsuttrykket på formen

$$f(x) = a \cdot \cos(cx + \varphi) + d\ .$$

Oppgave 3 (8 poeng)

Vi har gitt den uendelige rekken

$$2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots$$

a) Hva slags rekke er dette? Begrunn svaret ditt.

b) Bestem konvergensområdet til rekken.

c) Vis at summen av rekken er $S(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

d) Tegn grafen til $S(x)$

e) Løs likningen $S(x) = -1$ og $S(x) = 3$ både grafisk og ved regning.

Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x)=x^2+3 \quad \text{og} \quad g(x)=-x^3+x^2+4x+3$$

a) Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem koordinatene til skjæringspunktene mellom f og g ved regning.

To områder blir avgrenset av grafene til f og g.

c) Bestem arealene til hvert av disse områdene. Kommenter svaret ditt.

Vi har gitt funksjonen

$$h(x)=-x^3+x^2+c\,x+3$$

Når $c>0$, vil grafene til f og h avgrense to områder.

d) Vis ved regning at arealene til disse to områdene er like store.

Oppgave 5 (6 poeng)

Likningen til en kule er gitt ved

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 6z - 14 = 0$$

a) Vis at kula har sentrum i $\left(2,\, -3,\, 3\right)$. Bestem radien til kula.

En rett linje l gjennom sentrum er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

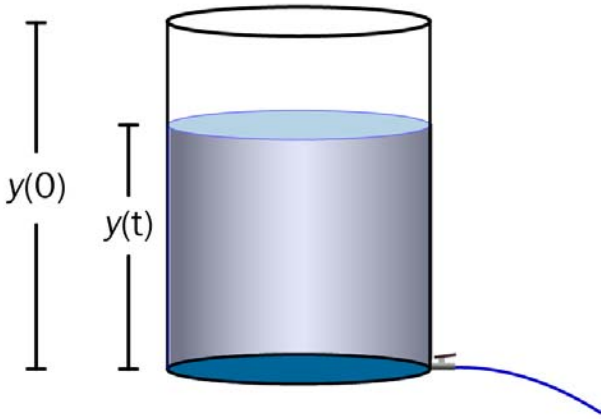
b) Bestem skjæringspunktene for l og kula.

Planene α og β tangerer kula i hvert sitt skjæringspunkt.

c) Bestem likningene til planene α og β.

Oppgave 6 (7 poeng)

En tank inneholder vann. Vi vil undersøke hvor høyt vannet står i tanken t minutter etter at vannet har begynt å renne ut. Vi lar vannstanden (vannhøyden) være $y(t)$.



Torricellis lov sier følgende:

Vannstanden avtar med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannstanden.

a) Forklar at Torricellis lov gir differensiallikningen

$$y' = -k \cdot \sqrt{y} \ , \ \text{der } k > 0$$

b) Bruk metoden for løsning av separable differensiallikninger til å vise at den generelle løsningen til likningen i oppgave 6 a) er gitt ved $y = \frac{1}{4}\left(-kt + C\right)^2$

Du får vite at $y(0) = h$ og $y(10) = \frac{h}{4}$

c) Vis at én løsning for konstantene er $C = 2\sqrt{h}$ og $k = \frac{\sqrt{h}}{10}$

Bestem hvor lang tid det tar før tanken er tom.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet