

Eksamen

29.11.2013

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel– vurderer om svar er rimelege– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. <ul style="list-style-type: none">• Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 5x \cos x$

b) $g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$

Oppgave 2 (3 poeng)

Bestem integrala

a) $\int_0^1 2e^{2x} dx$

b) $\int 2x \cdot e^x dx$

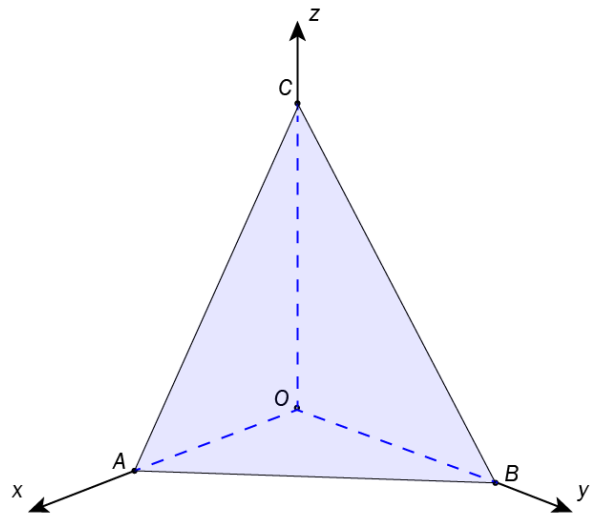
Oppgave 3 (5 poeng)

Gitt punkta $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$ og $O(0,0,0)$.

- Bestem $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ og $\vec{AB} \times \vec{AC}$.
- Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.
- Punkta A , B og C ligg i planet α .

Vis at likninga til planet α kan skrivast

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$



Oppgåve 4 (4 poeng)

a) Ei rekkje er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots$$

Forklar at dette er ei konvergent, geometrisk rekkje. Bestem summen av den uendelege rekkja.

b) Ei geometrisk rekkje er gitt ved

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekkja.

Oppgåve 5 (2 poeng)

Talet på individ i ein populasjon etter t timar kan beskrivast av funksjonen $N(t)$. Vi går ut frå at

$$N'(t) = 4t + 3 \quad \text{og} \quad N(0) = 800$$

Bestem talet på individ i populasjonen etter 10 h.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem koordinatane til eventuelle vendepunkt på grafen til f .

b) Bestem likninga for eventuelle vendetangentar på grafen til f .

Oppgåve 7 (3 poeng)

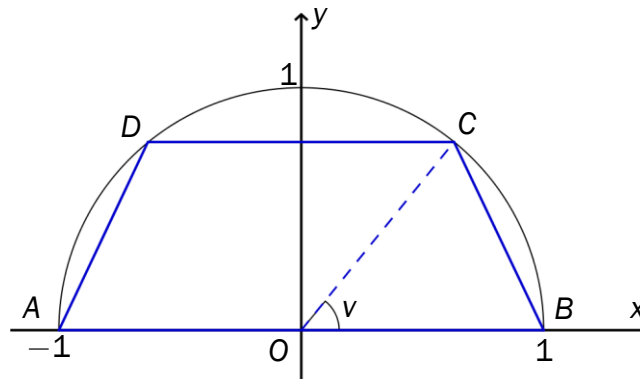
Bruk induksjon til å bevisse påstanden

$$P(n): \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)



Figuren ovanfor viser eit trapes $ABCD$ som er skrive inn i ein halvsirkel med radius 1.

- a) Forklar at arealet F av trapeset er gitt ved

$$F(v) = (1 + \cos v) \sin v$$

Kva for verdiar kan v ha?

- b) Bestem $\angle v$ ved rekning slik at arealet av trapeset blir størst mogleg.
Bestem arealet av det største trapeset.

Oppgåve 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 6]$$

- a) Teikn grafen til f .
- b) Bruk grafen til å vise at f er ein periodisk funksjon, og bestem perioden til f .
- c) Vis at

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$$

- d) Bruk uttrykket i oppgåve c) til å bestemme nullpunkta til f ved rekning når $x \in [0, 2]$.

Oppgave 3 (5 poeng)

Vi lèt K vere kapitalen i eit fond t år etter første innskot. Kvart år set vi inn 20 000 kroner i fondet. Avkastninga i fondet er 8 % per år.

Kapitalen i fondet veks slik differensiallikninga nedanfor viser

$$K'(t) = 0,08 \cdot K(t) + 20000$$

- Løys differensiallikninga. Finn eit uttrykk for $K(t)$ når $K(0) = 20\,000$.
- Bestem storleiken på kapitalen etter 20 år.
- Kor lang tid vil det gå før fondet aukar med 35 000 kroner per år ifølgje modellen ovanfor?

Oppgave 4 (6 poeng)

Ei uendeleg, geometrisk rekkje er gitt ved

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

Når $x \in (-1, 1)$, er $S(x) = \frac{1}{1-x}$

Det kan visast at $\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx$

- Forklar at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln(1-x) + C$$

Grunngi at $C = 0$.

- Set inn $x = \frac{1}{2}$ og vis at $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$

Det generelle leddet i rekkja ovanfor er $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Det kan visast at dei åtte første desimalane i $\ln 2$ er 0,69314718.

- Dersom vi summerer dei n første ledda $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i rekkja i oppgave b), får vi ein tilnæringsverdi for $\ln 2$.

Kor mange ledd må vi minst ta med for at vi skal få 6 korrekte desimalar?

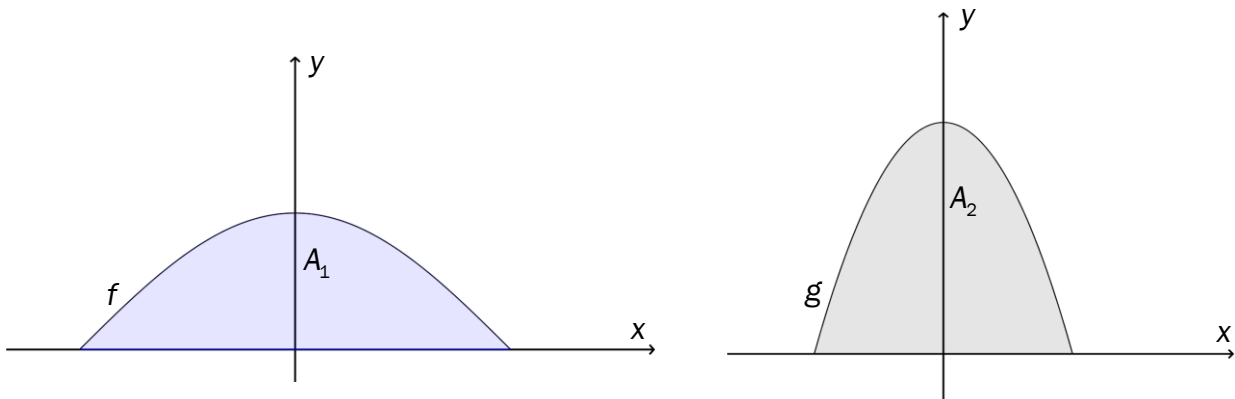
Oppgave 5 (7 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = 1 - k^2 \cdot x^2, \quad k > 0$$

Skisser av grafane til f og g er teikna nedanfor.



- Bestem nullpunktene til g uttrykt ved k .
- Bestem k slik at arealene A_1 og A_2 på figurane ovanfor er like store.
- Bruk formelen $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ til å vise at

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \quad (*)$$

Når vi dreier flatestykket med arealet A_1 360° om x -aksen, får vi ein omdreiingslekam med volum V_1 .

- Bruk formelen (*) i oppgave c) til å bestemme eit eksakt uttrykk for V_1 ved rekning.

Oppgåve 6 (7 poeng)

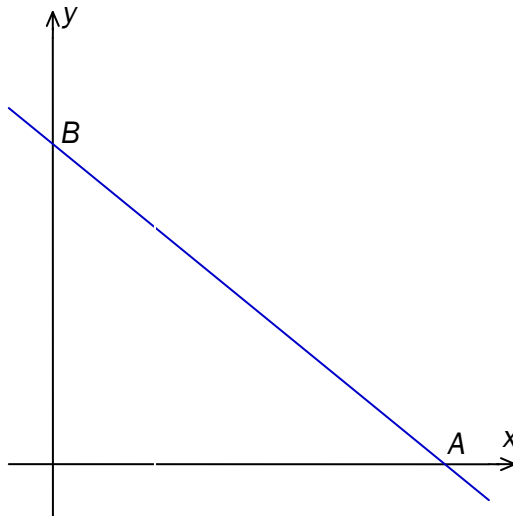
Ei rett linje i planet skj r koordinataksane i $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Sj  skissa nedanfor.

- a) Vis at likninga til linja kan skrivast

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

- b) Vis at dette også kan skrivast

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Eit plan α i rommet skj r koordinataksane i $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$.

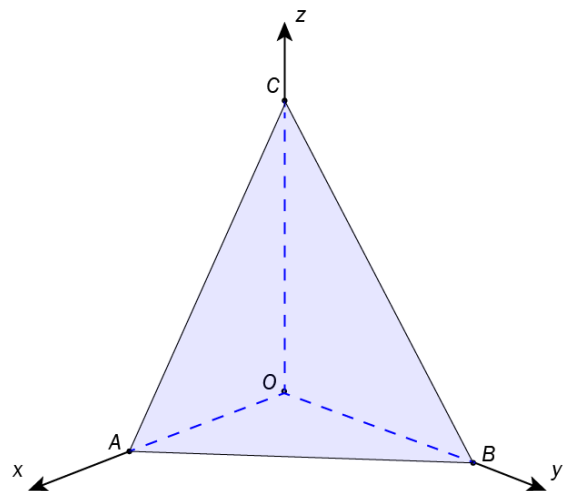
- c) Vis at normalvektoren til planet α er

$$\vec{n} = [bc, ac, ab]$$

- d) Vis at likninga til α kan skrivast

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- e) Planet β skj r x-aksen i $D(5, 0, 0)$ og y-aksen i $E(0, 4, 0)$. Planet er parallelt med z-aksen.



Forklar korleis vi kan bruke resultatet i oppgåve d) til å bestemme likninga for planet β .

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevnninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. <ul style="list-style-type: none">• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 5x \cos x$

b) $g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$

Oppgave 2 (3 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_0^1 2e^{2x} dx$

b) $\int 2x \cdot e^x dx$

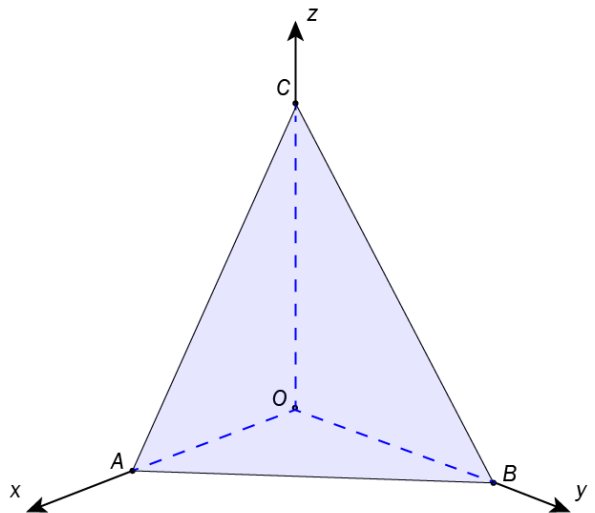
Oppgave 3 (5 poeng)

Gitt punktene $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$ og $O(0,0,0)$.

- Bestem $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ og $\vec{AB} \times \vec{AC}$.
- Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.
- Punktene A , B og C ligger i planet α .

Vis at likningen til planet α kan skrives

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$



Oppgave 4 (4 poeng)

a) En rekke er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

b) En geometrisk rekke er gitt ved

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

Oppgave 5 (2 poeng)

Antall individer i en populasjon etter t timer kan beskrives av funksjonen $N(t)$. Vi antar at

$$N'(t) = 4t + 3 \quad \text{og} \quad N(0) = 800$$

Bestem antall individer i populasjonen etter 10 h.

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f .

b) Bestem likningen for eventuelle vendetangenter på grafen til f .

Oppgave 7 (3 poeng)

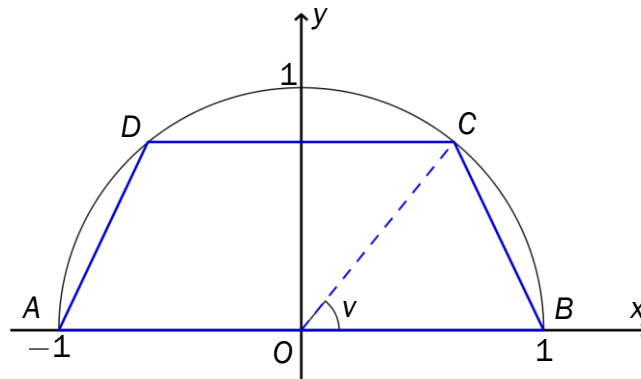
Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)



Figuren ovenfor viser et trapes $ABCD$ som er innskrevet i en halvsirkel med radius 1.

- a) Forklar at arealet F av trapeset er gitt ved

$$F(v) = (1 + \cos v) \sin v$$

Hvilke verdier kan v ha?

- b) Bestem $\angle v$ ved regning slik at arealet av trapeset blir størst mulig.
Bestem arealet av det største trapeset.

Oppgave 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 6]$$

- a) Tegn grafen til f .
- b) Bruk grafen til å vise at f er en periodisk funksjon, og bestem perioden til f .
- c) Vis at

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$$

- d) Bruk uttrykket i oppgave c) til å bestemme nullpunktene til f ved regning når $x \in [0, 2]$.

Oppgave 3 (5 poeng)

Vi lar K være kapitalen i et fond t år etter første innskudd. Hvert år setter vi inn 20 000 kroner i fondet. Avkastningen i fondet er 8 % per år.

Kapitalen i fondet vokser slik differensiallikningen nedenfor viser

$$K'(t) = 0,08 \cdot K(t) + 20000$$

- Løs differensiallikningen. Finn et uttrykk for $K(t)$ når $K(0) = 20\,000$.
- Bestem størrelsen på kapitalen etter 20 år.
- Hvor lang tid vil det gå før fondet øker med 35 000 kroner per år ifølge modellen ovenfor?

Oppgave 4 (6 poeng)

En uendelig, geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

Når $x \in (-1, 1)$, er $S(x) = \frac{1}{1-x}$

Det kan vises at $\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx$

- Forklar at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln(1-x) + C$$

Begrunn at $C = 0$.

- Sett inn $x = \frac{1}{2}$ og vis at $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$

Det generelle leddet i rekken ovenfor er $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Det kan vises at de åtte første desimalene i $\ln 2$ er 0,69314718.

- Dersom vi summerer de n første leddene $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i rekken i oppgave b), får vi en tilnæringsverdi for $\ln 2$.

Hvor mange ledd må vi minst ta med for at vi skal få 6 korrekte desimaler?

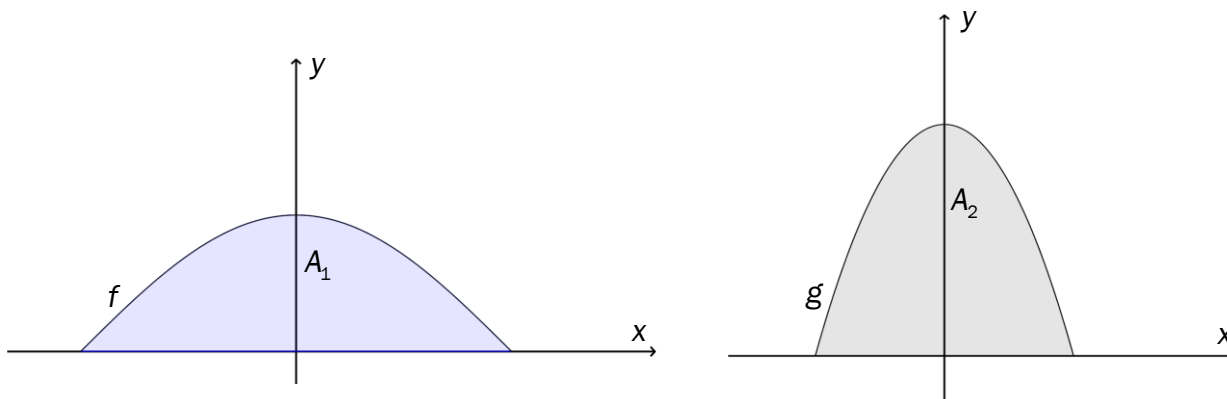
Oppgave 5 (7 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = 1 - k^2 \cdot x^2, \quad k > 0$$

Skisser av grafene til f og g er tegnet nedenfor.



- Bestem nullpunktene til g uttrykt ved k .
- Bestem k slik at arealene A_1 og A_2 på figurene ovenfor er like store.
- Bruk formelen $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ til å vise at

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \quad (*)$$

Når vi dreier flatestykket med arealet A_1 360° om x -aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_1 .

- Bruk formelen (*) i oppgave c) til å bestemme et eksakt uttrykk for V_1 ved regning.

Oppgave 6 (7 poeng)

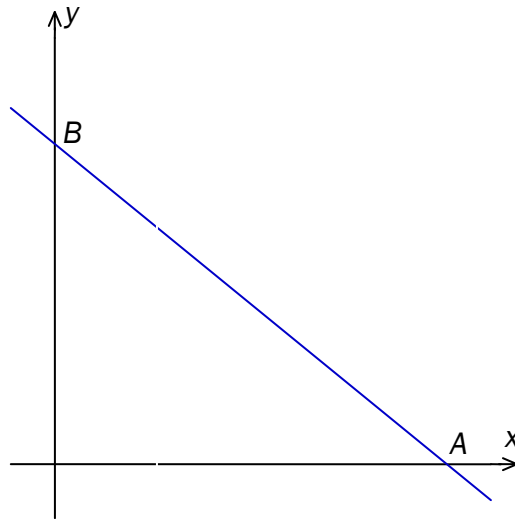
En rett linje i planet skjærer koordinataksene i $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Se skissen nedenfor.

- a) Vis at likningen til linjen kan skrives

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

- b) Vis at dette også kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Et plan α i rommet skjærer koordinataksene i $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$.

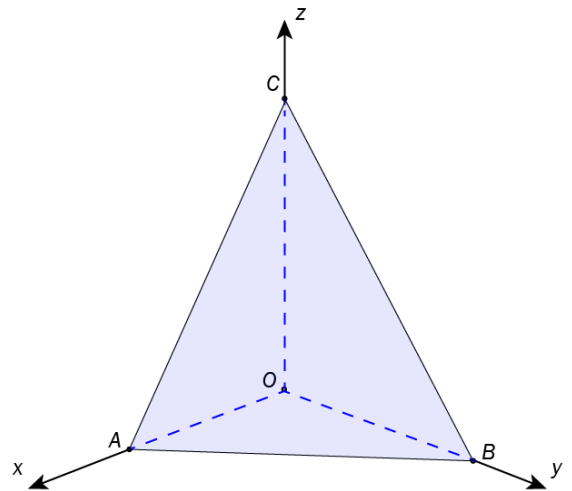
- c) Vis at normalvektoren til planet α er

$$\vec{n} = [bc, ac, ab]$$

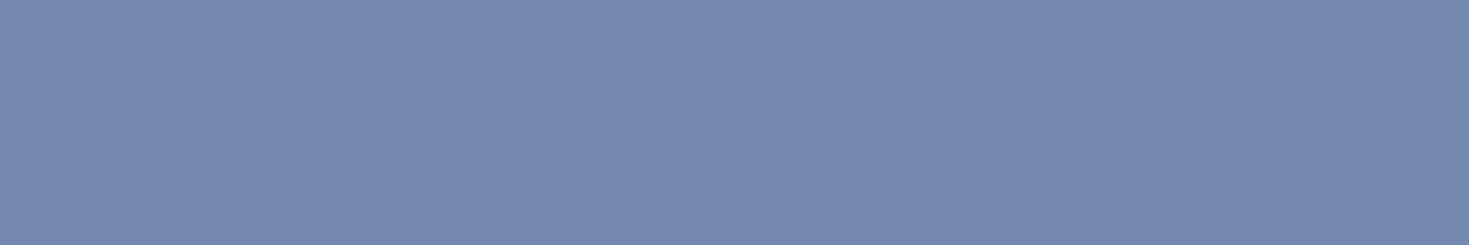
- d) Vis at likningen til α kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- e) Planet β skjærer x -aksen i $D(5, 0, 0)$ og y -aksen i $E(0, 4, 0)$. Planet er parallelt med z -aksen.



Forklar hvordan vi kan bruke resultatet i oppgave d) til å bestemme likningen for planet β .



Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no