Utdanningsdirektoratet

Eksamen

28.11.2014

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2\cos(3x)$

b) $g(x) = 5e^x \cdot \sin(2x)$

Oppgåve 2 (3 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (x^3 - 2x)\,dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

a) Løys differensiallikninga

$$y' - 2y = 3 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

b) Bestem likninga til tangenten i punktet $\left(0\,,\,\frac{5}{2}\right)$ på grafen til y.

Oppgåve 4 (4 poeng)

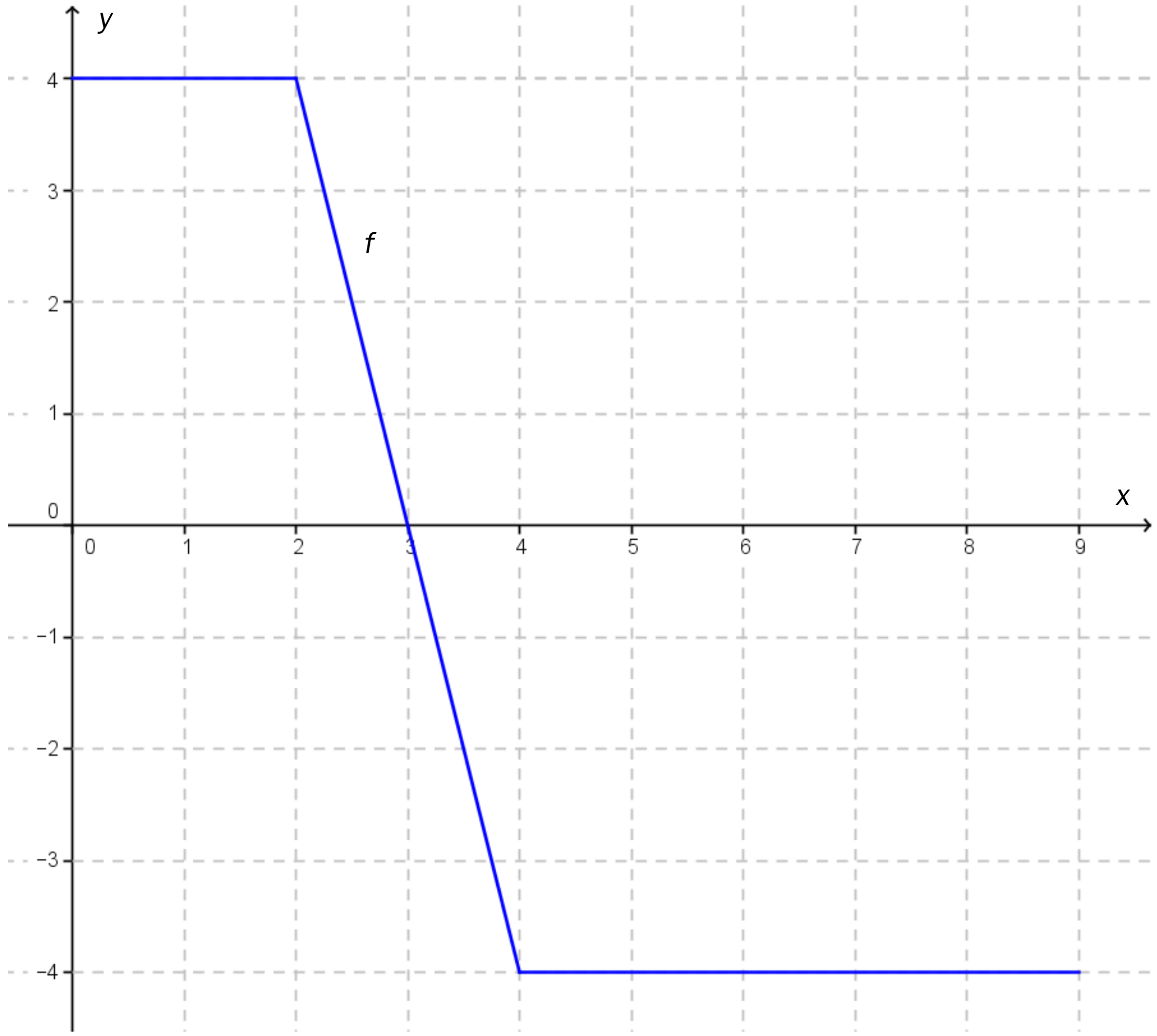
Punkta $A(0, 6, 6)$, $B(0, 0, 7)$ og $C(6, 0, 5)$ ligg i planet α.

a) Bestem likninga til α.

Eit punkt P ligg på linja gjennom punkta $O(0, 0, 0)$ og $A(0, 6, 6)$.

b) Bestem moglege koordinatar til P slik at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 42.

Oppgåve 5 (4 poeng)



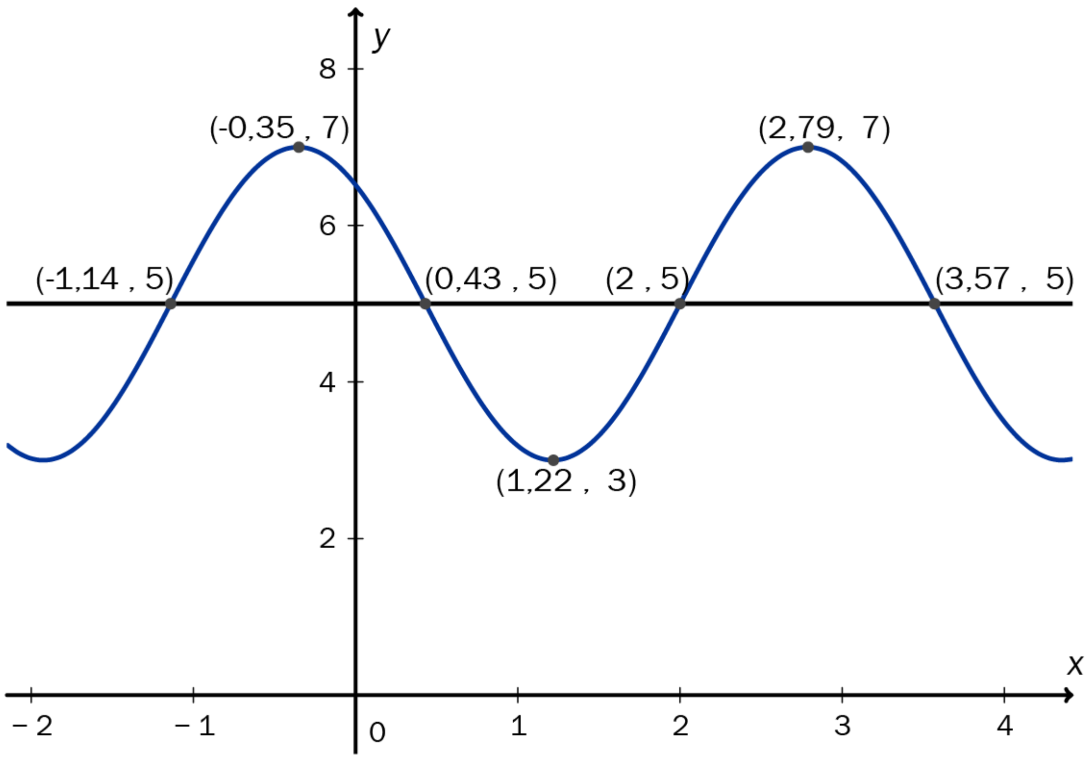
Figuren viser grafen til ein funksjon $f(x)$, der $x \in [0, 9]$.

La $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, der $t \in [0, 9]$

a) Bestem $g(2)$. Forklar at den største verdien til $g(t)$ er 10.

b) Bestem nullpunktet til g. Avgjer kva verdiar av t som gjer $g(t)$ negativ.

Oppgåve 6 (4 poeng)



Ovanfor ser du grafen til ein funksjon $f(x) = A\sin(cx + \varphi_1) + d$.

a) Bestem A, c, d og φ_1 ved hjelp av grafen og dei punkta som er markerte på grafen.
Skriv opp funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Grafen ovanfor kan også vere grafen til $g(x) = A\cos(cx + \varphi_2) + d$.
Skriv opp funksjonsuttrykket til $g(x)$.

Oppgåve 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

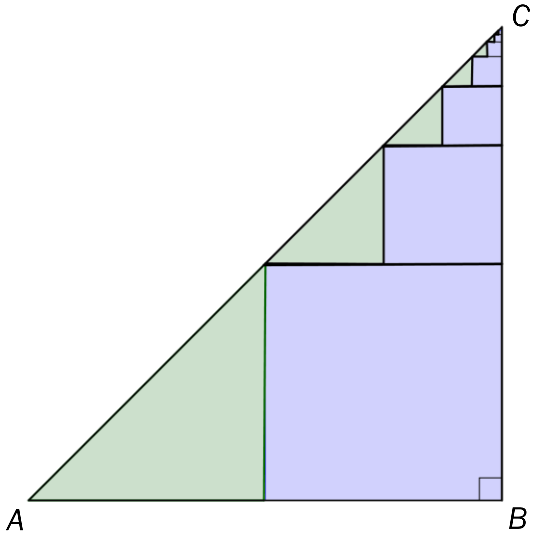
DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (8 poeng)

a) Vi har ei uendeleg geometrisk rekkje $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ som er konvergent.
Vis at summen S av rekkja kan skrivast

$$S = \frac{{a_1}^2}{a_1 - a_2}$$

Figuren nedanfor viser ein rettvinkla og likebeint $\triangle ABC$ der katetane har lengd 12. Inne i trekanten har vi ei rekkje kvadrat (markerte med blått på figuren). Det største kvadratet har side 6, det nest største har side 3, slik at sidene til kvadrata blir halverte i det uendelege.



b) Forklar at summen S av areala til kvadrata kan skrivast som ei uendeleg geometrisk rekkje. Bruk formelen i oppgåve a) til å bestemme S.

c) $\triangle ABC$ inneheld også uendeleg mange rettvinkla og likebeinte trekantar (markerte med grønt på figuren) der sidene også blir halverte frå gong til gong. Skriv summen av areala til desse trekantane som ei uendeleg geometrisk rekkje. Bestem denne summen.

d) Forklar korleis du kunne ha funne dei to summane i oppgåve b) og oppgåve c) ved hjelp av eit geometrisk resonnement.

Oppgåve 2 (8 poeng)

Ei differensiallikning er gitt ved

$$4y'' + 4y' + 5y = 0$$

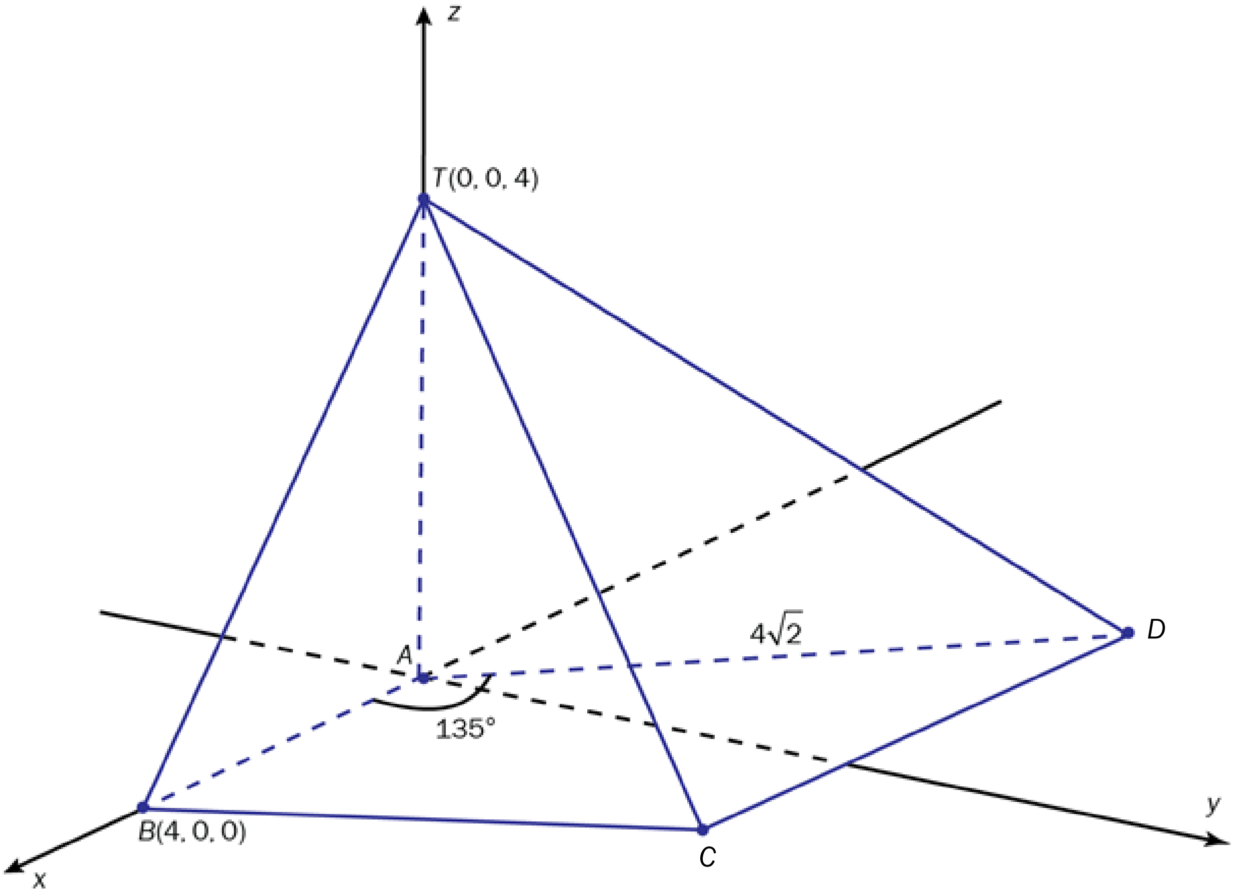
a) Set opp den karakteristiske likninga, løys denne og bruk løysinga til å bestemme eit generelt uttrykk for y.

b) Finn integrasjonskonstantane når du får vite at $y(0) = 3$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Teikn grafen til $y = f(x)$ for $x \in \left[0, 3\pi\right\rangle$.

d) Bestem eventuelle nullpunkt til f og koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f når $x \in \left[0, 3\pi\right\rangle$.

Oppgåve 3 (8 poeng)



Ein pyramide $ABCDT$ er gitt på figuren ovanfor. Pyramiden blir sett inn i eit tredimensjonalt koordinatsystem slik at koordinatane til A, B og T er gitt ved $A(0,\,0,\,0)$, $B(4,\,0,\,0)$ og $T(0,\,0,\,4)$. Punkta C og D ligg i xy-planet.

a) Vi set $\angle BAD = 135^\circ$ og $AD = 4\sqrt{2}$. Vis at D har koordinatane $(-4,\,4,\,0)$.

b) Punktet C er slik at $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vis at C har koordinatane $(2,\,4,\,0)$.

Punkta B, D og T ligg i eit plan α.

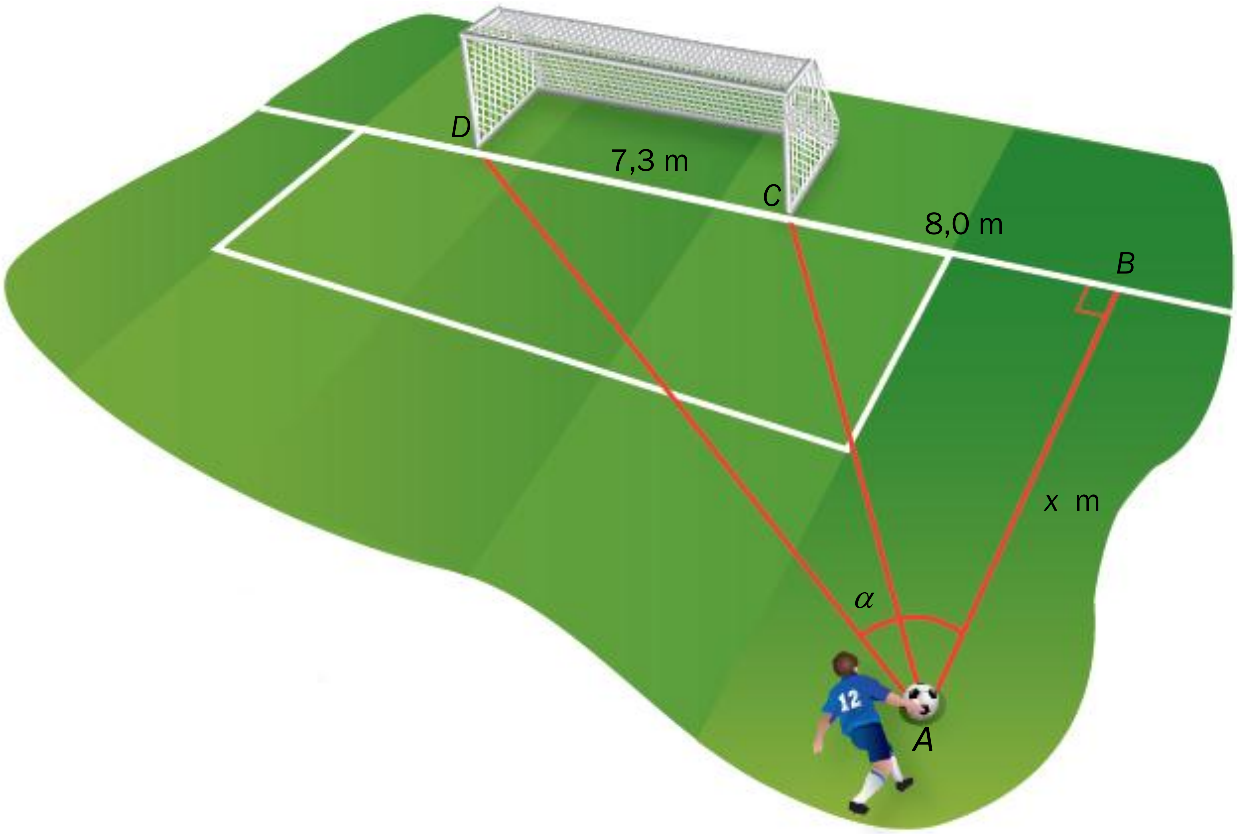
c) Vis at likninga for α er $x + 2y + z - 4 = 0$

Volumet av pyramiden $ABDT$ kallar vi V_1 og volumet av pyramiden $CBDT$ kallar vi V_2.

d) Bestem forholdet $\frac{V_1}{V_2}$.

Oppgåve 4 (6 poeng)

Eit fotballmål har lengda $CD = 7,3$ m. Ein fotballspelar spring med ballen langs linjestykket AB, slik figuren nedanfor viser. Punktet B ligg 8,0 m frå punktet C. Han vil skyte på mål når $\angle\alpha = \angle DAC$ er størst mogleg. $\angle\alpha$ er avhengig av lengda $x = AB$.



Vi set $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$ og lar $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u - v)$

a) Bruk formelen $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$ til å vise at $f(x) = \dfrac{7,3x}{x^2 + 122,4}$

b) Bestem den største verdien for $f(x)$ og tilhøyrande verdi for x.

Vi veit at α har sin største verdi når $\tan\alpha$ har sin største verdi.

c) Bestem α_{maks}.

Oppgåve 5 (6 poeng)

Eit plan α er gitt ved likninga

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likninga for den kuleflata som har sentrum i punktet $S(11,\ 2,\ -6)$ og som har α som tangentplan.

b) Bestem koordinatane til tangeringspunktet mellom kuleflata og planet α.

Eit plan β er gitt ved

$$2x + y - 2z = 0$$

Dette planet skjer kuleflata langs ein sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos(3x)$

b) $g(x) = 5e^{x} \cdot \sin(2x)$

Oppgave 2 (3 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^3 - 2x)\,dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x\,dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

b) Bestem likningen til tangenten i punktet $\left(0\,,\,\frac{5}{2}\right)$ på grafen til y.

Oppgave 4 (4 poeng)

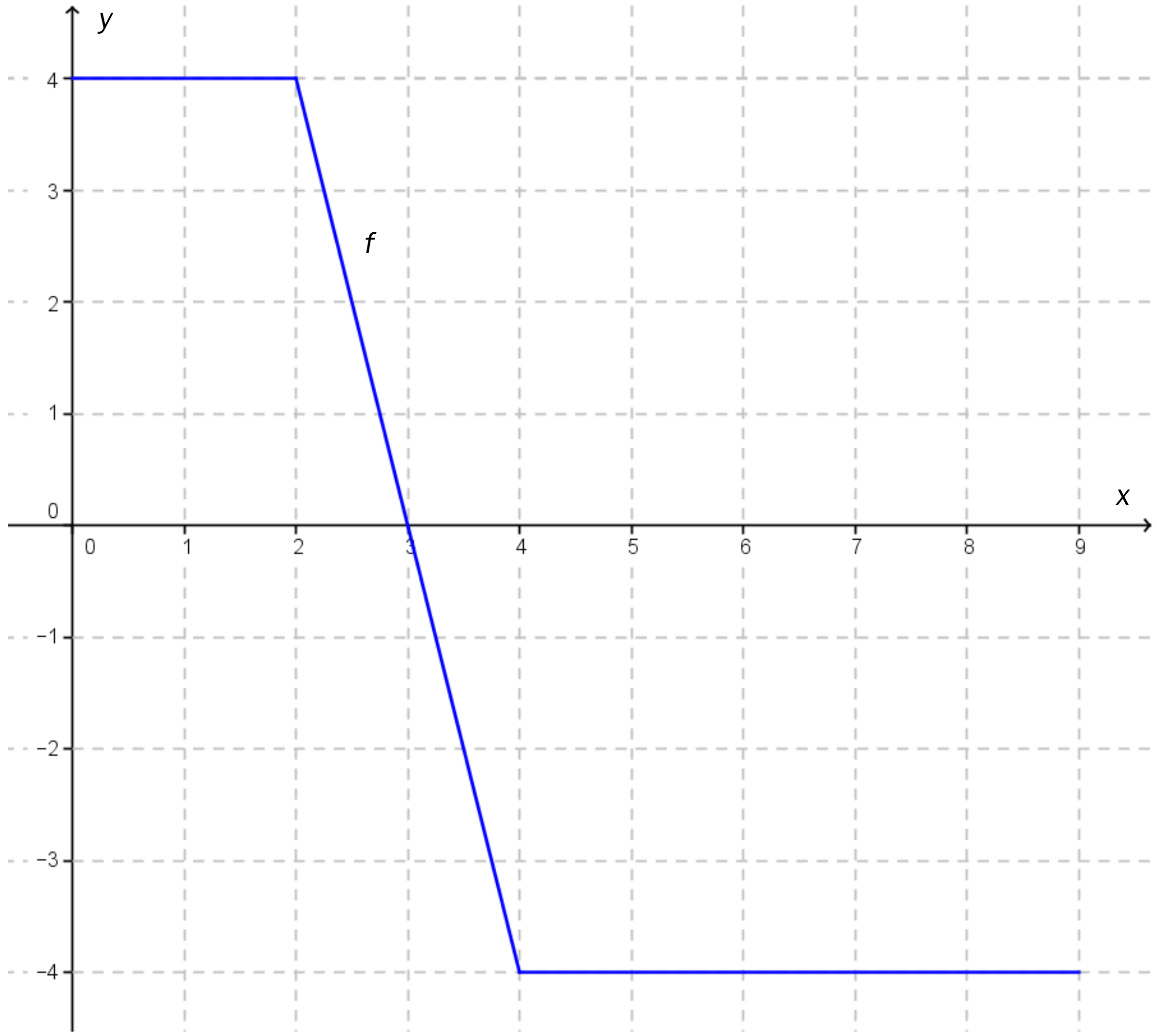
Punktene $A(0, 6, 6)$, $B(0, 0, 7)$ og $C(6, 0, 5)$ ligger i planet α .

a) Bestem likningen til α .

Et punkt P ligger på linjen gjennom punktene $O(0, 0, 0)$ og $A(0, 6, 6)$.

b) Bestem mulige koordinater til P slik at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 42.

Oppgave 5 (4 poeng)



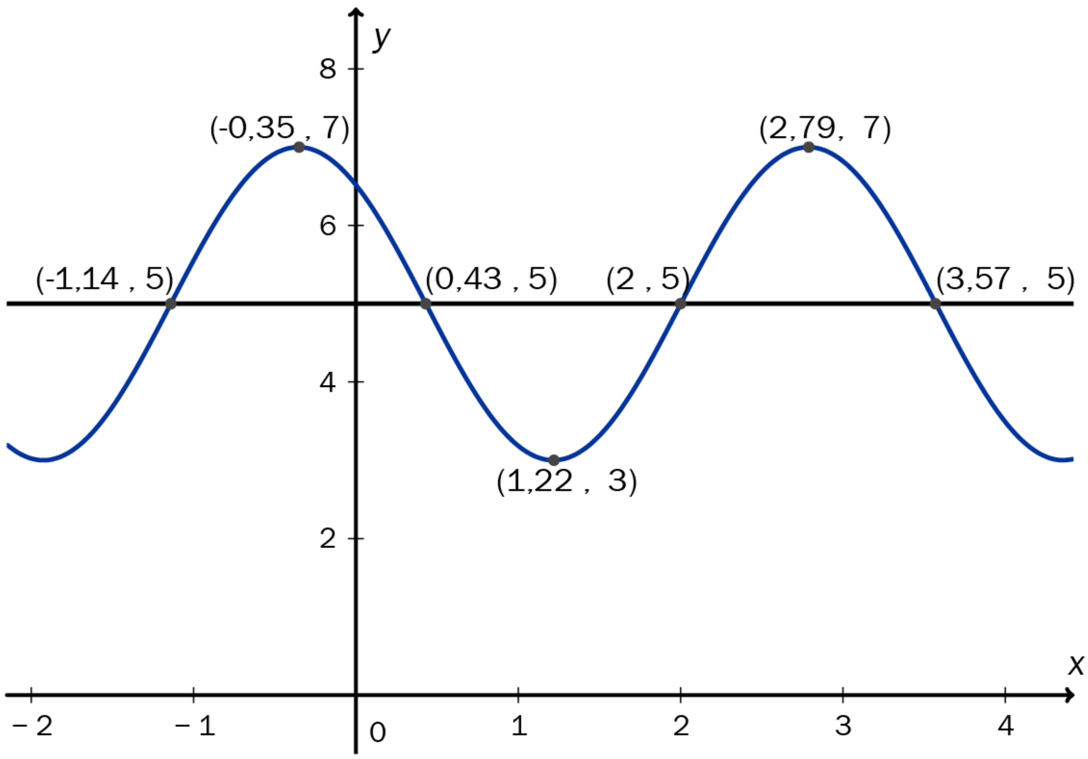
Figuren viser grafen til en funksjon $f(\mathrm{x})$, der $x \in [0, 9]$.

La $g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, der $t \in [0, 9]$

a) Bestem $g(2)$. Forklar at den største verdien til $g(t)$ er 10.

b) Bestem nullpunktet til g. Avgjør hvilke verdier av t som gjør $g(t)$ negativ.

Oppgave 6 (4 poeng)



Ovenfor ser du grafen til en funksjon $f(x) = A\sin(cx + \varphi_1) + d$.

a) Bestem A, c, d og φ_1 ved hjelp av grafen og de punktene som er markert på grafen.
Skriv opp funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Grafen ovenfor kan også være grafen til $g(x) = A\cos(cx + \varphi_2) + d$.
Skriv opp funksjonsuttrykket til $g(x)$.

Oppgave 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

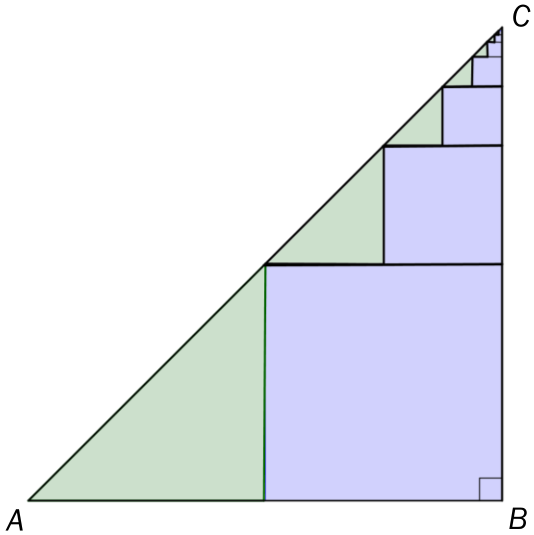
DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

a) Vi har en uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ som er konvergent.
Vis at summen S av rekken kan skrives

$$S = \frac{{a_1}^2}{a_1 - a_2}$$

Figuren nedenfor viser en rettvinklet og likebeint $\triangle ABC$ der katetene har lengde 12. Inne i trekanten har vi en rekke kvadrater (markert med blått på figuren). Det største kvadratet har side 6, det nest største har side 3, slik at sidene til kvadratene blir halvert i det uendelige.



b) Forklar at summen S av arealene til kvadratene kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk formelen i oppgave a) til å bestemme S.

c) $\triangle ABC$ inneholder også uendelig mange rettvinklete og likebeinte trekanter (markert med grønt på figuren) der sidene også halveres fra gang til gang. Skriv summen av arealene til disse trekantene som en uendelig geometrisk rekke. Bestem denne summen.

d) Forklar hvordan du kunne ha funnet de to summene i oppgave b) og oppgave c) ved hjelp av et geometrisk resonnement.

Oppgave 2 (8 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$4y'' + 4y' + 5y = 0$$

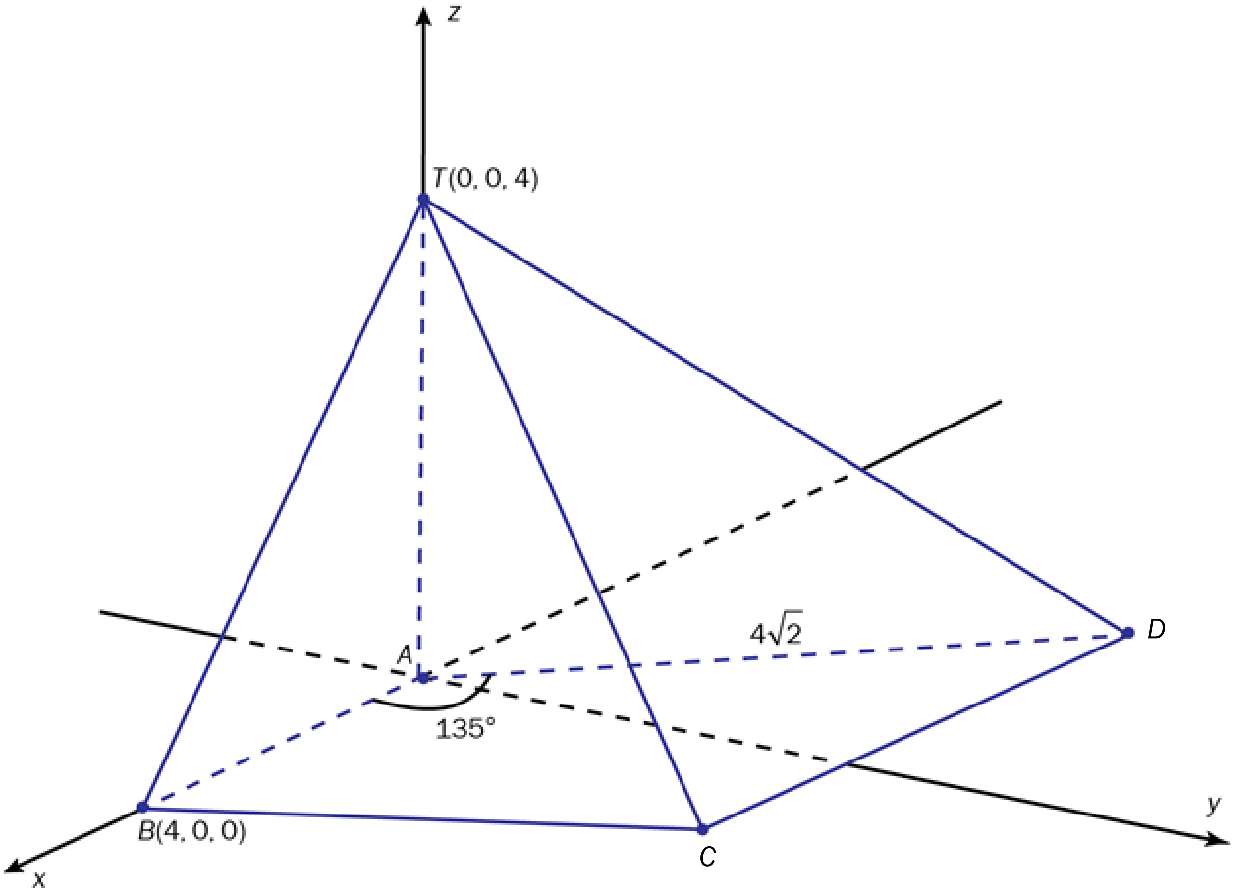
a) Sett opp den karakteristiske likningen, løs denne og bruk løsningen til å bestemme et generelt uttrykk for y.

b) Finn integrasjonskonstantene når du får vite at $y(0) = 3$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Tegn grafen til $y = f(x)$ for $x \in \left[0,\ 3\pi\right\rangle$.

d) Bestem eventuelle nullpunkter til f og koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f når $x \in \left[0,\ 3\pi\right\rangle$.

Oppgave 3 (8 poeng)



En pyramide $ABCDT$ er gitt på figuren ovenfor. Pyramiden settes inn i et tredimensjonalt koordinatsystem slik at koordinatene til A, B og T er gitt ved $A(0,\,0,\,0)$, $B(4,\,0,\,0)$ og $T(0,\,0,\,4)$. Punktene C og D ligger i xy-planet.

a) Vi setter $\angle BAD = 135^\circ$ og $AD = 4\sqrt{2}$. Vis at D har koordinatene $(-4,\,4,\,0)$.

b) Punktet C er slik at $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vis at C har koordinatene $(2,\,4,\,0)$.

Punktene B, D og T ligger i et plan α.

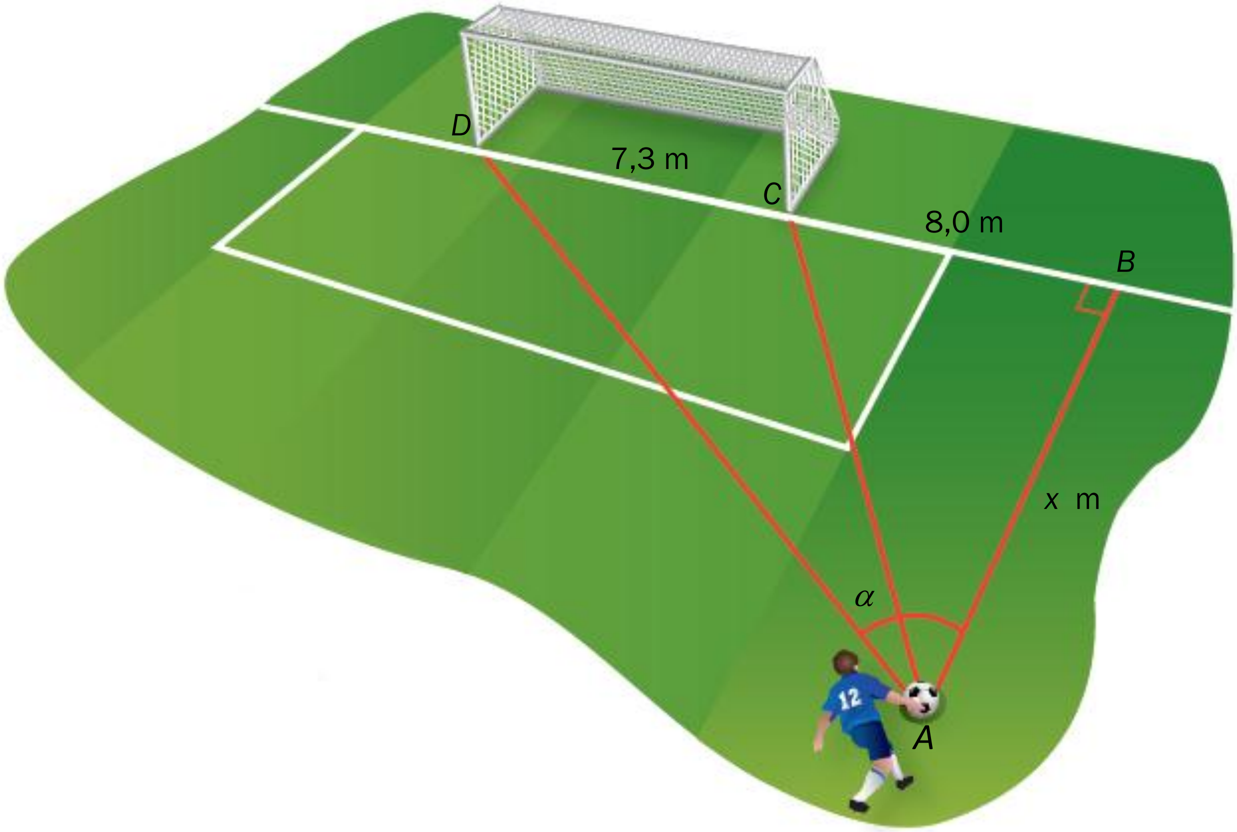
c) Vis at likningen for α er $x + 2y + z - 4 = 0$

Volumet av pyramiden $ABDT$ kalles V_1 og volumet av pyramiden $CBDT$ kalles V_2.

d) Bestem forholdet $\frac{V_1}{V_2}$.

Oppgave 4 (6 poeng)

Et fotballmål har lengde $CD = 7{,}3$ m. En fotballspiller løper med ballen langs linjestykket AB, slik figuren nedenfor viser. Punktet B ligger 8,0 m fra punktet C. Han vil skyte på mål når $\angle\alpha = \angle DAC$ er størst mulig. $\angle\alpha$ avhenger av lengden $x = AB$.



Vi setter $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$ og lar $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u - v)$

a) Bruk formelen $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$ til å vise at $f(x) = \dfrac{7{,}3x}{x^2 + 122{,}4}$

b) Bestem den største verdien for $f(x)$ og tilhørende verdi for x.

Vi vet at α har sin største verdi når $\tan\alpha$ har sin største verdi.

c) Bestem α_{maks}.

Oppgave 5 (6 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11, 2, -6)$ og som har α som tangentplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2z = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet