Utdanningsdirektoratet

# Eksamen

20.05.2009

## REA3024 Matematikk R2



Nynorsk/Bokmål

# Nynorsk

| **Eksamensinformasjon** | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timar:<br>Del 1 skal leverast inn etter 2 timar.<br>Del 2 skal leverast inn etter 5 timar. |
| **Hjelpemiddel på Del 1:** | Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar |
| **Hjelpemiddel på Del 2:** | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. |
| **Bruk av kjelder:** | Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal oppgivast på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må oppgi forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur.<br><br>Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal heile adressa og nedlastingsdato oppgivast. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med www.wikipedia.no. |
| **Vedlegg:** | Ingen |
| **Framgangsmåte:** | Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.<br><br>Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing. |
| **Rettleiing om vurderinga:** | Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du<br>– viser reknedugleik og matematisk forståing<br>– gjennomfører logiske resonnement<br>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar<br>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel<br>– vurderer om svar er rimelege<br>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar<br>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar |

Illustrasjonen på framsida er henta frå www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel sette Norge på verdskartet i matematikk.

# Del 1

## Oppgåve 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 2(\ln x + 1)^3$.

b) Gitt funksjonen $f(x) = x \cdot \cos x$.

1) Ligg grafen over eller under $x$ - aksen når $x = \pi$ ?

2) Stig eller fell grafen når $x = \pi$ ?

(Du kan få bruk for at $\sin\pi = 0$ og $\cos\pi = -1$.)

c) Bestem summen av den uendelege rekkja $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

d) Gitt punkta $A(2, 3, 7)$, $B(3, 5, 2)$, $C(1, 1, 5)$ og $D(3, 5, t)$.

1) Bestem ein verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

2) Undersøk om det finst ein verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

e) Løys differensiallikninga $y' + 4x \cdot y = 0$, der $y(0) = 5$.

f) Bestem integrala

1) $\int x \cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$

## Oppgåve 2

Vi har gitt punkta $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 1, 2)$ og $D(4, 1, -3)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Vis at arealet av trekanten $ABC$ er lik $\frac{3}{2}$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCD$.

c) Finn likninga for planet $\alpha$ som går gjennom punkta $A$, $B$ og $C$.

# Del 2

## Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi lage ein modell for temperaturen i vatnet i eit badekar. Badekaret er fylt med vatn som til å begynne med har temperaturen $38\ ^\circ\text{C}$. Romtemperaturen er konstant lik $21\ ^\circ\text{C}$.

Vi lèt $y(t)$ vere vasstemperaturen i gradar celsius etter $t$ timar.

a) Forklar kva $y'(t)$ fortel oss, og kvifor $y'(t)$ er negativ i denne oppgåva.

Vi antek at temperaturendringa per time er proporsjonal med differansen mellom vasstemperaturen $y(t)$ og romtemperaturen. Proporsjonalitetskonstanten er $k$.

b) Forklar at den differensiallikninga som beskriv denne problemstillinga, er

$$y' = k(y - 21)$$

c) Forklar kvifor $y(0) = 38$. Løys differensiallikninga ved rekning.

d) Etter 3 timar er vasstemperaturen $27\ ^\circ\text{C}$. Bruk dette til å bestemme $k$.

e) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

# Oppgåve 4

***Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.***
***Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.***

*(Dersom svaret inneheld delar av begge,*
*vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)*

## <u>Alternativ I</u>

Funksjonen $f$ er gitt ved $f(x) = 2 \cdot (\sin x)^2$.

a) Teikn grafen til $f$ når $x \in [0,\ 2\pi\rangle$.

b) Grafen er ei sinuskurve. Bruk grafen til å vise at vi tilnærma kan lese av at $f$ kan skrivast på forma

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

c) Bruk formelen for $\sin(u - v)$ til å vise at uttrykket i b) stemmer med $f(x) = 2 \cdot (\sin x)^2$.

d) Bestem ved rekning koordinatane til eventuelle topp-, botn- og vendepunkt på grafen til $f$ når $x \in \langle 3\pi, 4\pi\rangle$.

## <u>Alternativ II</u>

*I deler av denne oppgåva er det ein fordel å bruke digitalt verktøy.*

Gitt funksjonen $f(x) = 4 \cdot e^{-0{,}2x} \cdot \left(4\sin(2x) + 3\cos(2x)\right)$ når $x \in \langle 0,\ 5\pi\rangle$.

a) Skisser, eller ta ei utskrift av, grafen til $f$.

b) Finn nullpunkta, topp-, botn- og vendepunkta på grafen til $f$ når $x \in \langle 0,\ \pi\rangle$.

Funksjonsuttrykket til $f$ kan skrivast på forma $f(x) = K \cdot e^{-0{,}2x} \cdot \sin(2x + \varphi)$.

c) Finn konstantane $K$ og $\varphi$.

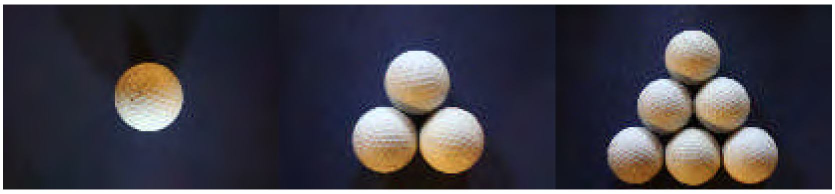
d) $y = f(x)$, der $f(x)$ er funksjonen ovanfor, er ei løysing av differensiallikninga

$$y'' + ay' + by = 0$$

Bestem konstantane $a$ og $b$.

## Oppgåve 5

Trekanttal kan illustrerast som talet på golfballar som dannar ein trekantfigur. Figuren nedanfor viser dei tre første trekanttala $a_1$, $a_2$ og $a_3$.



$S_n$ er summen av dei $n$ første trekanttala.

a) Skriv opp dei fem første trekanttala $a_1, a_2, a_3, a_4$ og $a_5$ og dei fem første summane $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$.

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+\cdots+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk regresjon på dei fem første summane $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$ til å finne eit tredjegradsuttrykk for $S_n$. Vis at tredjegradsuttrykket er ei tilnærming av

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Resultatet ovanfor gjeld i prinsippet berre for dei fem første summane $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$. Vi ønskjer å undersøkje om formelen gjeld for alle $n$- verdiar. Da må vi gjennomføre eit matematisk bevis.

d) Bruk induksjon til å bevise at formelen $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ er riktig.

# Bokmål

| **Eksamensinformasjon** | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.<br>Del 2 skal leveres inn etter 5 timer. |
| **Hjelpemidler på Del 1:** | Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler |
| **Hjelpemidler på Del 2:** | Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. |
| **Bruk av kilder:** | Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur.<br><br>Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med www.wikipedia.no. |
| **Vedlegg:** | Ingen |
| **Framgangsmåte:** | Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.<br><br>Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. |
| **Veiledning om vurderingen:** | Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du<br>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse<br>– gjennomfører logiske resonnementer<br>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner<br>– kan bruke hensiktmessige hjelpemidler<br>– vurderer om svar er rimelige<br>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar<br>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger |

Illustrasjonen på forsiden er hentet fra www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel satte Norge på verdenskartet i matematikk.

# Del 1

## Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 2(\ln x + 1)^3$.

b) Gitt funksjonen $f(x) = x \cdot \cos x$.

1) Ligger grafen over eller under $x$- aksen når $x = \pi$ ?

2) Stiger eller synker grafen når $x = \pi$ ?

(Du kan få bruk for at $\sin\pi = 0$ og $\cos\pi = -1$.)

c) Bestem summen av den uendelige rekka $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

d) Gitt punktene $A(2, 3, 7)$, $B(3, 5, 2)$, $C(1, 1, 5)$ og $D(3, 5, t)$.

1) Bestem en verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

2) Undersøk om det finnes en verdi for $t$ slik at $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

e) Løs differensiallikningen $y' + 4x \cdot y = 0$, der $y(0) = 5$.

f) Bestem integralene

1) $\int x \cdot \sin(2x)\,dx$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4}\,dx$

## Oppgave 2

Vi har gitt punktene $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 1, 2)$ og $D(4, 1, -3)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Vis at arealet av trekanten $ABC$ er lik $\frac{3}{2}$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCD$.

c) Finn likningen for planet $\alpha$ som går gjennom punktene $A$, $B$ og $C$.

# Del 2

## Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi lage en modell for temperaturen i vannet i et badekar. Badekaret er fylt med vann som til å begynne med har temperaturen $38\ ^\circ\text{C}$. Romtemperaturen er konstant lik $21\ ^\circ\text{C}$.

Vi lar $y(t)$ være vannets temperatur i grader celsius etter $t$ timer.

a) Forklar hva $y'(t)$ forteller oss, og hvorfor $y'(t)$ er negativ i denne oppgaven.

Vi antar at temperaturendringen per time er proporsjonal med differansen mellom vanntemperaturen $y(t)$ og romtemperaturen. Proporsjonalitetskonstanten er $k$.

b) Forklar at den differensiallikningen som beskriver denne problemstillingen, er

$$y' = k(y - 21)$$

c) Forklar hvorfor $y(0) = 38$. Løs differensiallikningen ved regning.

d) Etter 3 timer er vanntemperaturen $27\ ^\circ\text{C}$. Bruk dette til å bestemme $k$.

e) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

## Oppgave 4

***Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.***
***De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.***

*(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,*
*vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)*

### <u>Alternativ I</u>

Funksjonen $f$ er gitt ved $f(x) = 2 \cdot (\sin x)^2$.

a) Tegn grafen til $f$ når $x \in \left[0,\ 2\pi\right\rangle$.

b) Grafen er en sinuskurve. Bruk grafen til å vise at vi tilnærmet kan lese av at $f$ kan skrives på formen

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

c) Bruk formelen for $\sin(u - v)$ til å vise at uttrykket i b) stemmer med $f(x) = 2 \cdot (\sin x)^2$.

d) Bestem ved regning koordinatene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til $f$ når $x \in \left\langle 3\pi,\ 4\pi \right\rangle$.

### <u>Alternativ II</u>

*I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy.*

Gitt funksjonen $f(x) = 4 \cdot e^{-0,2x} \cdot \left(4\sin(2x) + 3\cos(2x)\right)$ når $x \in \left\langle 0,\ 5\pi \right\rangle$.

a) Skisser, eller ta en utskrift av, grafen til $f$.

b) Finn nullpunktene, topp-, bunn- og vendepunktene på grafen til $f$ når $x \in \left\langle 0,\ \pi \right\rangle$.

Funksjonsuttrykket til $f$ kan skrives på formen $f(x) = K \cdot e^{-0,2x} \cdot \sin(2x + \varphi)$.

c) Finn konstantene $K$ og $\varphi$.

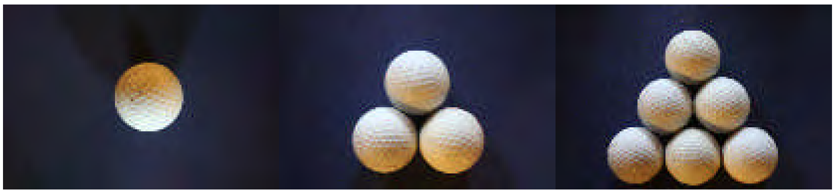
d) $y = f(x)$, der $f(x)$ er funksjonen ovenfor, er en løsning av differensiallikningen

$$y'' + ay' + by = 0$$

Bestem konstantene $a$ og $b$.

## Oppgave 5

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene $a_1$, $a_2$ og $a_3$.



$S_n$ er summen av de $n$ første trekanttallene.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene $a_1, a_2, a_3, a_4$ og $a_5$ og de fem første summene $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$.

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+\cdots+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk regresjon på de fem første summene $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$ til å finne et tredjegradsuttrykk for $S_n$. Vis at tredjegradsuttrykket er en tilnærming av

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Resultatet ovenfor gjelder i prinsippet bare for de fem første summene $S_1, S_2, S_3, S_4$ og $S_5$. Vi ønsker å undersøke om formelen gjelder for alle $n$- verdier. Da må vi gjennomføre et matematisk bevis.

d) Bruk induksjon til å bevise at formelen $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ er riktig.

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet