Utdanningsdirektoratet

Eksamen

26.05.2010

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar er tillatne.
Hjelpemiddel på del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du velje framgangsmåte sjølv. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil du òg kunne få noko utteljing ved å bruke ein alternativ metode.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det vil seie at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonen gitt ved $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

b) Bestem integrala

1) $\int 5x \cdot e^{2x} \, dx$

2) $\int \frac{6x}{x^2 - 1} \, dx$

c) Løys differensiallikninga

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \qquad y(0) = 2$$

d) 1) Bruk formlane

$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

til å vise

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}\left(\cos(u - v) + \cos(u + v)\right)$$

2) Bruk 1) til å finne eit uttrykk for $(\cos x)^2$. Bestem integralet

$$\int (\cos x)^2 \, dx$$

e) I denne oppgåva får du bruk for den generelle samanhengen

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Tabellen nedanfor viser nokre funksjonsverdiar for funksjonane f, g og h.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
–3	0	6	6
1	–2	$\frac{-7}{2}$	–4
2	24	28	22

Det blir i tillegg opplyst at $f(x) = g'(x)$ og $h(x) = g''(x)$.

Bruk tabellen og tilleggsopplysningane til å finne integrala

1) $\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int_{-3}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x$

Oppgåve 2

Vi har gitt punkta $A(3,0,-2)$, $B(0,2,0)$ og $C(1,-1,4)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

b) Finn ei likning for planet α som går gjennom punkta A, B og C.

Ei rett linje l går gjennom punktet $P(5,4,4)$ og står vinkelrett på planet α.

c) Vis at ei parameterframstilling for l er $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Finn skjeringspunktet mellom l og xz – planet.

Vi lèt Q vere eit vilkårleg punkt på linja l.

d) Bestem volumet av pyramiden $ABCQ$ uttrykt ved t.

e) Bestem koordinatane til Q slik at volumet av pyramiden $ABCQ$ blir 42.

Del 2

I del 2 vil vi følgje same tema i oppgåvene 3, 4, 5 og 6 alternativ I.
I nokre tilfelle kan resultat i éi oppgåve komme til nytte i andre oppgåver.

Vi presiserer likevel at oppgåvene kan løysast uavhengig av kvarandre.

Oppgåve 3

Du skal studere løysinga til differensiallikninga

$$y'' + \frac{2}{5}\,y' + \frac{26}{25}\,y = 0$$

a) Bruk løysinga til den karakteristiske likninga til å vise at den generelle løysinga til differensiallikninga er

$$y = e^{-0{,}2x} \cdot (C \sin x + D \cos x) \quad , \qquad \text{der } C \text{ og } D \text{ er konstantar.}$$

b) Du får oppgitt at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.
Forklar at løysinga av differensiallikninga då kan skrivast

$$y = 5e^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

(Du kan få bruk for at $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Oppgåve 4

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$, $x \in \langle 0,\, 15 \rangle$

a) Teikn grafen til f .

b) Bestem ved rekning nullpunkta til f .

c) Vis ved rekning at

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (2\cos x - 3\sin x)$$

d) Teikn forteiknslinja til $f'(x)$. Bruk den til å vise at funksjonsverdiane til toppunkta er $6{,}164$, $1{,}754$ og $0{,}499$.

e) Skriv $f(x)$ på forma

$$f(x) = A\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot \sin(x + \varphi) \ , \qquad \text{der } A \text{ og } \varphi \text{ er konstantar.}$$

Funksjonane p og q er gitt ved $p(x) = A e^{-0{,}2x}$ og $q(x) = -A e^{-0{,}2x}$, der A er konstanten du fann i punkt e) over.

f) Forklar at $q(x) \le f(x) \le p(x)$. Teikn grafane til p og q i same koordinatsystem som grafen til f .

Oppgåve 5

Vi vil studere fleire eigenskapar ved funksjonen

$$f(x) = 5\,e^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

når definisjonsmengda er $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

a) Forklar at det n-te nullpunktet til f kan skrivast på forma

$$x_n = 2{,}356 + (n-1)\cdot \pi \,, \qquad \text{der} \quad n \geq 1$$

b) Kva slags talfølgje dannar nullpunkta? Kor mange nullpunkt får vi dersom $x \in \langle 0,\, 30 \rangle$?

c) Dei tre første funksjonsverdiane til toppunkta på grafen til f er gitt i oppgåve 4 d). Alle desse dannar òg ei talfølgje. Vis at denne talfølgja er geometrisk, og finn det femte leddet i talfølgja.

Vi summerer y -koordinatane til alle toppunkta til høgre for origo.

d) Vil den rekkja vi får, konvergere når $x \to \infty$? Finn eventuelt summen av den uendelege rekkja.

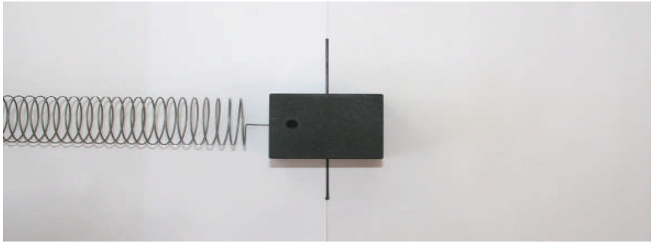
Oppgåve 6

Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
Dei to alternativa tel like mykje ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneheld delar av begge alternativa, vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

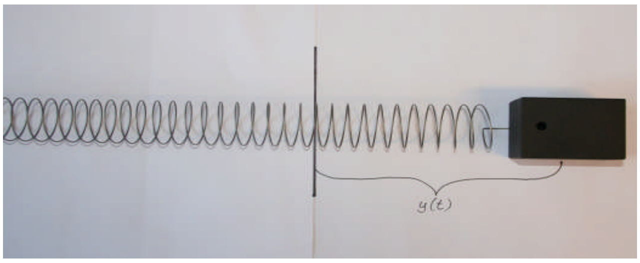
Eit lodd med masse m er festa i ei fjør som er festa i veggen. Når loddet er i ro, er det i likevektsstilling. Sjå figur 1.



Figur 1

Vi trekkjer loddet ut frå likevektsstillinga, gir det eit puff bort frå likevektsstillinga, og set dermed i gang ei svingerørsle fram og tilbake. Sjå figur 2 og figur 3.

Avstanden frå likevektsstillinga til loddet ved tidspunktet t er $y(t)$. Sjå figur 2.



Figur 2

Tida t er målt i sekund, og $y(t)$ er målt i desimeter.

Figur 3

I horisontal retning verkar to krefter på loddet:

* Ei kraft frå fjøra som er proporsjonal med $y(t)$
* Ei friksjonskraft frå underlaget som er proporsjonal med farten $v(t) = y'(t)$

Akselerasjonen til klossen er $a(t) = v'(t)$

Vi set $y(t) = y$, $v(t) = v$ og $a(t) = a$.

Newtons 2. lov vil då gi denne likninga

$$-b \cdot v - k \cdot y = m \cdot a$$

der b, k og m er positive konstantar.

a) Vis at denne likninga kan omformast til

$$y'' + \frac{b}{m}\, y' + \frac{k}{m}\, y = 0$$

Vi set $b = 1{,}0$ Ns/m , $k = 2{,}6$ N/m og $m = 2{,}5$ kg.

b) Vis at du får differensiallikninga

$$y'' + \frac{2}{5}\, y' + \frac{26}{25}\, y = 0$$

Bestem eit uttrykk for $y(t)$ når du får opplyst at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Forklar at det går like lang tid mellom kvar gong loddet passerer likevektsstillinga.

d) Vis at det maksimale utslaget y på same side av likevektsstillinga minkar med $71{,}5\,\%$ frå eitt utslag til det neste.

Alternativ II

Summen av dei n første ledda i ei rekkje er gitt ved

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\cdots+n$$

a) Forklar at $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Finn S_8.

Summen av dei n første ledda i ei anna rekkje er gitt ved

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+8+27+\cdots+n^3$$

b) Bruk digitalt verktøy til å undersøkje kor mange ledd rekkja må ha for at summen av rekkja skal vere større enn 15 000.

Det er blitt påstått at $1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Bevis formelen over ved induksjon. (Spørsmål c) tel som to delspørsmål.)

d) Forklar at

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du velge framgangsmåte selv. Hvis oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil du også kunne få noe uttelling for en alternativ metode.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan bruke fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen gitt ved $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

b) Bestem integralene

1) $\int 5x \cdot e^{2x}\ dx$

2) $\int \frac{6x}{x^2 - 1} dx$

c) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \qquad y(0) = 2$$

d) 1) Bruk formlene

$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

til å vise

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}\left(\cos(u - v) + \cos(u + v)\right)$$

2) Bruk 1) til å finne et uttrykk for $(\cos x)^2$. Bestem integralet

$$\int (\cos x)^2\ dx$$

e) I denne oppgaven får du bruk for den generelle sammenhengen

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Tabellen nedenfor viser noen funksjonsverdier for funksjonene f, g og h.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
-3	0	6	6
1	-2	$\frac{-7}{2}$	-4
2	24	28	22

Det opplyses i tillegg at $f(x) = g'(x)$ og $h(x) = g''(x)$.

Bruk tabellen og tilleggsopplysningene til å finne integralene

1) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$

2) $\int_{-3}^{1} h(x)\,dx$

Oppgave 2

Vi har gitt punktene $A(3,\,0,\,-2)$, $B(0,\,2,\,0)$ og $C(1,\,-1,\,4)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Finn en likning for planet α som går gjennom punktene A, B og C.

En rett linje l går gjennom punktet $P(5,\,4,\,4)$ og står vinkelrett på planet α.

c) Vis at en parameterframstilling for l er $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Finn skjæringspunktet mellom l og xz – planet.

Vi lar Q være et vilkårlig punkt på linjen l.

d) Bestem volumet av pyramiden $ABCQ$ uttrykt ved t.

e) Bestem koordinatene til Q slik at volumet av pyramiden $ABCQ$ blir 42.

Del 2

I del 2 vil vi følge samme tema i oppgavene 3, 4, 5 og 6 alternativ I.
I noen tilfeller kan resultater i én oppgave komme til nytte i andre oppgaver.

Det presiseres likevel at oppgavene kan løses uavhengig av hverandre.

Oppgave 3

Du skal studere løsningen til differensiallikningen

$$y'' + \frac{2}{5}\,y' + \frac{26}{25}\,y = 0$$

a) Bruk løsningen til den karakteristiske likningen til å vise at den generelle løsningen til differensiallikningen er

$$y = e^{-0,2x} \cdot \left(C\sin x + D\cos x\right) \quad , \qquad \text{der } C \text{ og } D \text{ er konstanter.}$$

b) Du får oppgitt at $y(0)=5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$.
Forklar at løsningen av differensiallikningen da kan skrives

$$y = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

(Du kan få bruk for at $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Oppgave 4

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$, $x \in \langle 0,\ 15 \rangle$

a) Tegn grafen til f .

b) Bestem ved regning nullpunktene til f .

c) Vis ved regning at

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (2\cos x - 3\sin x)$$

d) Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$. Bruk denne til å vise at funksjonsverdiene til toppunktene er $6{,}164$, $1{,}754$ og $0{,}499$.

e) Skriv $f(x)$ på formen

$$f(x) = A\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot \sin(x + \varphi) \ , \qquad \text{der } A \text{ og } \varphi \text{ er konstanter.}$$

Funksjonene p og q er gitt ved $p(x) = A e^{-0{,}2x}$ og $q(x) = -A e^{-0{,}2x}$, der A er konstanten du fant i punkt e) over.

f) Forklar at $q(x) \le f(x) \le p(x)$. Tegn grafene til p og q i samme koordinatsystem som grafen til f .

Oppgave 5

Vi vil studere flere egenskaper ved funksjonen

$$f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

når definisjonsmengden er $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

a) Forklar at det n-te nullpunktet til f kan skrives på formen

$$x_n = 2{,}356 + (n-1)\cdot \pi \,, \qquad \text{der} \quad n \geq 1$$

b) Hva slags tallfølge danner nullpunktene? Hvor mange nullpunkter får vi hvis $x \in \langle 0,\, 30 \rangle$?

c) De tre første funksjonsverdiene til toppunktene på grafen til f er gitt i oppgave 4 d). Alle disse danner også en tallfølge. Vis at denne tallfølgen er geometrisk, og finn det femte leddet i tallfølgen.

Vi summerer y-koordinatene til alle toppunktene til høyre for origo.

d) Vil den rekken vi får, konvergere når $x \rightarrow \infty$? Finn eventuelt summen av den uendelige rekken.

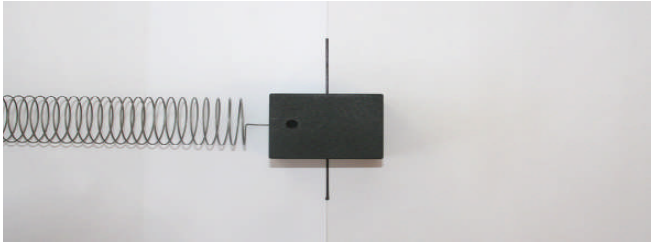
Oppgave 6

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

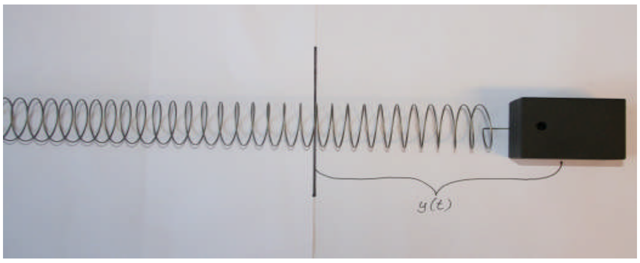
Et lodd med masse m er festet i en fjær som er festet i veggen. Når loddet er i ro, er det i likevektsstilling. Se figur 1.



Figur 1

Vi trekker loddet ut fra likevektsstillingen, gir det et puff bort fra likevektsstillingen, og setter dermed i gang en svingebevegelse fram og tilbake. Se figur 2 og figur 3.

Avstanden fra likevektsstillingen til loddet ved tidspunktet t er $y(t)$. Se figur 2.



Figur 2

Tida t er målt i sekunder, og $y(t)$ er målt i desimeter.

Figur 3

I horisontal retning virker to krefter på loddet:

* En kraft fra fjæra som er proporsjonal med $y(t)$
* En friksjonskraft fra underlaget som er proporsjonal med farten $v(t) = y'(t)$

Akselerasjonen til klossen er $a(t) = v'(t)$

Vi setter $y(t) = y$, $v(t) = v$ og $a(t) = a$.

Newtons 2. lov vil da gi følgende likning

$$-b \cdot v - k \cdot y = m \cdot a$$

der b, k og m er positive konstanter.

a) Vis at denne likningen kan omformes til

$$y'' + \frac{b}{m}\,y' + \frac{k}{m}\,y = 0$$

Vi setter $b = 1{,}0\ \text{Ns/m}$, $k = 2{,}6\ \text{N/m}$ og $m = 2{,}5\ \text{kg}$.

b) Vis at du får differensiallikningen

$$y'' + \frac{2}{5}\,y' + \frac{26}{25}\,y = 0$$

Bestem et uttrykk for $y(t)$ når du får oppgitt at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Forklar at det går like lang tid mellom hver gang loddet passerer likevektsstillingen.

d) Vis at det maksimale utslaget y på samme side av likevektsstillingen minker med $71{,}5\,\%$ fra ett utslag til det neste.

Alternativ II

Summen av de n første leddene i en rekke er gitt ved

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\cdots+n$$

a) Forklar at $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Finn S_8.

Summen av de n første leddene i en annen rekke er gitt ved

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 \;=\; 1+8+27+\cdots+n^3$$

b) Bruk digitalt verktøy til å undersøke hvor mange ledd rekken må ha for at summen av rekken skal være større enn 15 000.

Det er blitt påstått at $\quad 1+2^3+3^3+\cdots+n^3 \;=\; \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

c) Bevis formelen over ved induksjon. (Spørsmål c) teller som to delspørsmål.)

d) Forklar at

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \;=\; \left(1+2+3+\cdots+n\right)^2$$

(Blank side)

(Blank side)

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet