Utdanningsdirektoratet

Eksamen

31.05.2011

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (18 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = 2\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \cos(2x)$

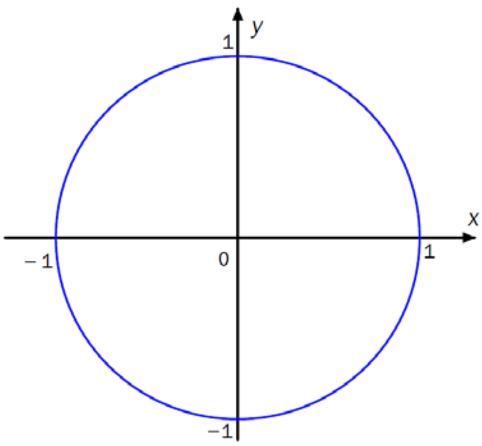
3) $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x}$

b) Bestem integrala

1) $\int x \cdot e^x \, dx$

2) $\int \frac{5x+3}{x^2-9} \, dx$

c) Figuren under viser ein sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.



Bruk eit geometrisk resonnement til å bestemme $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx$

Forklar korleis du har tenkt.

d) Vi har gitt to vektorar $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Forklar og teikne figurar som viser korleis vektorane kan liggje i forhold til kvarandre når

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

e) Vi har gitt punkta $A(1, 1, -1)$, $B(2, -1, 3)$ og $C(3, 2, 2)$
Vis ved rekning at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

f) Bevis formelen ved induksjon:

$$1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Oppgåve 2 (6 poeng)

a) Finn den generelle løysinga til differensiallikninga

$$y' - 2y = 5$$

der y er ein funksjon av x.

b)

1) Bestem konstanten i den generelle løysinga når du får vite at $y(0) = 2$

2) Bestem x når $y = \frac{49}{2}$. (Du kan få bruk for at $\ln 6 \approx 1,8$)

c) Grafen til y har ein tangent i punktet $(0, 2)$.

Finn likninga for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 3 (4 poeng)

Kjelde: www.bokstavbutikken.no (08.02.2011)

Ein fabrikk lagar skaft til eit kontorstempel. Skaftet ser ut som den omdreiingslekamen vi får når vi dreier grafen til f $360°$ om x-aksen, der

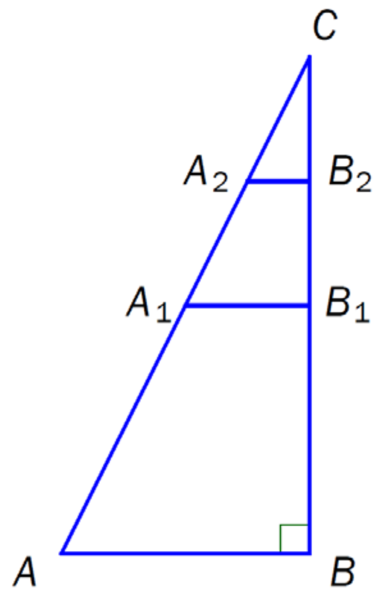
$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \ , \qquad x \in [0,\ 4]$$

a) Teikne grafen til f. Finn diameteren til skaftet der skaftet er breiast.

b) Bestem volumet av skaftet.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Vi skal sjå på ein rettvinkla trekant ABC der $AB = 8$ og $BC = 16$. Punktet A_1 halverer AC, A_2 halverer A_1C og så vidare. Punktet B_1 halverer BC, B_2 halverer B_1C og så vidare. Sjå skissa nedanfor.



a)

1) Forklar at summen av areala til trapesa ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$ og så vidare kan skrivast

$$48 + 12 + 3 + \cdots$$

2) Forklar at dette er ei geometrisk rekkje, og at rekkja konvergerer.

b) Finn summen til den uendelege rekkja, både ved å bruke formelen for sum av ei rekkje og ved å bruke eit geometrisk resonnement.

Oppgåve 5 (10 poeng)

Ei rett linje l er gitt ved parameterframstillinga

$$l:\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 3+t \\ z = 4+2t \end{cases}$$

a) Linja l skjer xy-planet i punktet A og xz-planet i B.

Rekne ut avstanden mellom A og B.

Ei anna rett linje m er gitt ved parameterframstillinga

$$m:\begin{cases} x = s \\ y = 1-s \\ z = 1+s \end{cases}$$

b) Vis at linjene l og m ikkje er parallelle.

To linjer i rommet som verken er parallelle eller skjer kvarandre, er *vindskeive*.
For vindskeive linjer gjeld denne setninga:

Når to linjer l og m er vindskeive, finst det eit punkt P på l og eit punkt Q på m slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m. Avstanden mellom l og m er definert som $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

c) Vi lèt P vere eit tilfeldig valt punkt på l og Q eit tilfeldig valt punkt på m.

Vis at vi kan skrive $\overrightarrow{PQ} = [s+2t-5,\ -s-t-2,\ s-2t-3]$

d) Finn koordinatane til P og Q når $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.

e) Finn avstanden mellom linjene l og m.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \quad , \qquad x \in [0,\ 24]$$

a) Teikne grafen til f. Les av amplituden og perioden til f.

b) Teikne forteiknslinja til f' og bruk denne linja til å finne eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

Lufttemperaturen g (målt i grader Celsius) gjennom eit sommardøgn er gitt ved

$$g(x) = 22 - 5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

der x er talet på timar etter midnatt.

c) Bestem høgaste og lågaste temperatur dette døgnet. På kva tidspunkt har vi kvar av desse temperaturane?

Oppgåve 7 (10 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x} \quad , \qquad x > 0$$

a) Teikne grafen til f.

b)

1) Vis at $f'(x) = 5\left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x}$. Kva for derivasjonsreglar har du brukt?

2) Teikne forteiknslinja til f'. Bruk denne linja til å finne ut kvar f veks, og kvar f minkar. Bestem eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c) Vis ved derivasjon at

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -5x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10x \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10\,\mathrm{e}^{-x} + C$$

d) Du får vite at $\lim\limits_{a\to\infty} (a^n \cdot \mathrm{e}^{-a}) = 0$ for $n \in \mathrm{R}$.

Bruk dette til å bestemme

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 2\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \cos(2x)$

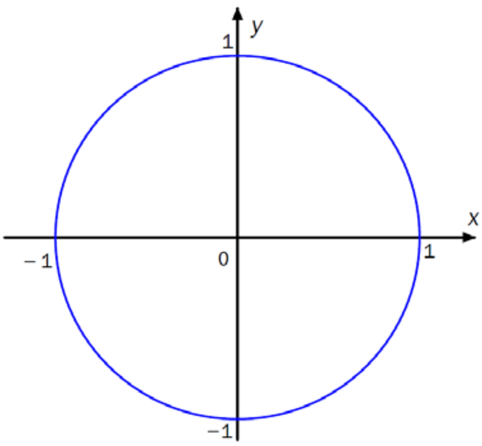
3) $h(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x}$

b) Bestem integralene

1) $\int x \cdot e^x \, dx$

2) $\int \dfrac{5x+3}{x^2-9} \, dx$

c) Figuren nedenfor viser en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.



Bruk et geometrisk resonnement til å bestemme $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx$

Forklar hvordan du har tenkt.

d) Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Forklar og tegn figurer som viser hvordan vektorene kan ligge i forhold til hverandre når

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

e) Vi har gitt punktene $A(1, 1, -1)$, $B(2, -1, 3)$ og $C(3, 2, 2)$

Vis ved regning at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

f) Bevis formelen ved induksjon:

$$1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Oppgave 2 (6 poeng)

a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y' - 2y = 5$$

der y er en funksjon av x.

b)

1) Bestem konstanten i den generelle løsningen når du får vite at $y(0) = 2$

2) Bestem x når $y = \frac{49}{2}$. (Du kan få bruk for at $\ln 6 \approx 1{,}8$)

c) Grafen til y har en tangent i punktet $(0, 2)$.

Finn likningen for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 3 (4 poeng)

Kilde: www.bokstavbutikken.no (08.02.2011)

En fabrikk lager skaft til et kontorstempel. Skaftet ser ut som det omdreiningslegemet vi får når vi dreier grafen til f $360°$ om x-aksen, der

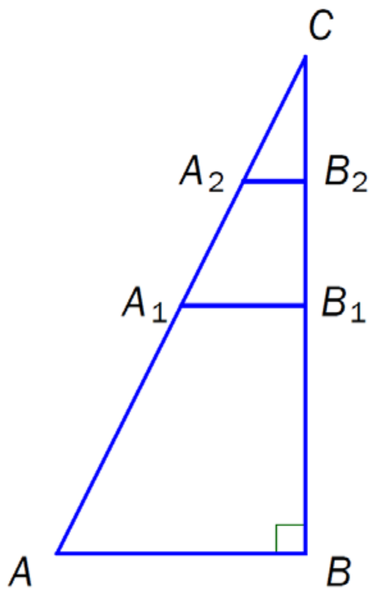
$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \quad , \qquad x \in [0, 4]$$

a) Tegn grafen til f. Finn diameteren til skaftet der skaftet er bredest.

b) Bestem volumet av skaftet.

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi skal se på en rettvinklet trekant ABC der $AB = 8$ og $BC = 16$. Punktet A_1 halverer AC, A_2 halverer A_1C og så videre. Punktet B_1 halverer BC, B_2 halverer B_1C og så videre. Se skissen nedenfor.



a)

1) Forklar at summen av arealene til trapesene ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$ og så videre kan skrives

$$48 + 12 + 3 + \cdots$$

2) Forklar at dette er en geometrisk rekke, og at rekken konvergerer.

b) Finn summen til den uendelige rekken, både ved å bruke formelen for sum av en rekke og ved å bruke et geometrisk resonnement.

Oppgave 5 (10 poeng)

En rett linje l er gitt ved parameterframstillingen

$$l:\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 3+t \\ z = 4+2t \end{cases}$$

a) Linjen l skjærer xy-planet i punktet A og xz-planet i B.

Regn ut avstanden mellom A og B.

En annen rett linje m er gitt ved parameterframstillingen

$$m:\begin{cases} x = s \\ y = 1-s \\ z = 1+s \end{cases}$$

b) Vis at linjene l og m ikke er parallelle.

To linjer i rommet som verken er parallelle eller skjærer hverandre, er *vindskeive*.
For vindskeive linjer gjelder denne setningen:

> *Når to linjer l og m er vindskeive, fins det et punkt P på l og et punkt Q på m slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m. Avstanden mellom l og m er definert som $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.*

c) Vi lar P være et tilfeldig valgt punkt på l og Q et tilfeldig valgt punkt på m.

Vis at vi kan skrive $\overrightarrow{PQ} = \left[s+2t-5,\ -s-t-2,\ s-2t-3\right]$

d) Finn koordinatene til P og Q når $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.

e) Finn avstanden mellom linjene l og m.

Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \quad , \qquad x \in [0,\ 24]$$

a) Tegn grafen til f. Les av amplituden og perioden til f.

b) Tegn fortegnslinjen til f' og bruk denne til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Lufttemperaturen g (målt i grader Celsius) gjennom et sommerdøgn er gitt ved

$$g(x) = 22 - 5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

der x er antall timer etter midnatt.

c) Bestem høyeste og laveste temperatur dette døgnet. På hvilke tidspunkter inntreffer disse temperaturene?

Oppgave 7 (10 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x} \quad , \qquad x > 0$$

a) Tegn grafen til f.

b)

1) Vis at $f'(x) = 5\left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x}$. Hvilke derivasjonsregler har du brukt?

2) Tegn fortegnslinjen til f'. Bruk denne til å finne ut hvor f vokser, og hvor f avtar. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Vis ved derivasjon at

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -5x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10x \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10\,\mathrm{e}^{-x} + C$$

d) Du får vite at $\lim\limits_{a \to \infty} (a^n \cdot \mathrm{e}^{-a}) = 0$ for $n \in \mathrm{R}$.

Bruk dette til å bestemme

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet