Utdanningsdirektoratet

Eksamen

04.06.2012

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (13 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = 3\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \sin x$

3) $k(x) = 5\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot x - 2\right) + 7$

b) Bestem integralet

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

c) Vis at

$$\int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = 2\ln 3$$

d) Løys differensiallikninga

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \quad y(0) = 8$$

e) Gitt rekkja

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots \qquad , \quad x > 0$$

1) Forklar at rekkja er geometrisk, og at ho konvergerer.

2) Vis at summen er gitt ved

$$S(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Vi har gitt vektorane $\vec{a} = [3, -1, 2]$ og $\vec{b} = [6, 4, 2]$

Rekn ut

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{b}$

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$

Oppgåve 3 (6 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = x \cdot e^x$$

a) Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$

b) Bestem koordinatane til botnpunkt og vendepunkt på grafen til f .

Det blir påstått at den n-te deriverte er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = (x + n) \cdot e^x$$

c) Bevis formelen for den n-te deriverte ved induksjon.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 4 (7 poeng)

Kjelde: www.micromatic.no (10.12.2011)

Ein automatisk straumbrytar for utelys skal programmerast. Lyset skal slåast på når det begynner å mørkne. Ein modell for dette tidspunktet er gitt ved

$$f(t) = 19 - 4\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot t\right)$$

der $f(t)$ er tidspunktet målt i timar etter midnatt og t er talet på dagar rekna frå nyttår. I denne modellen er det føresett at alle månader har 30 dagar.

a) Når begynner det å mørkne 25. mars, ifølgje modellen?

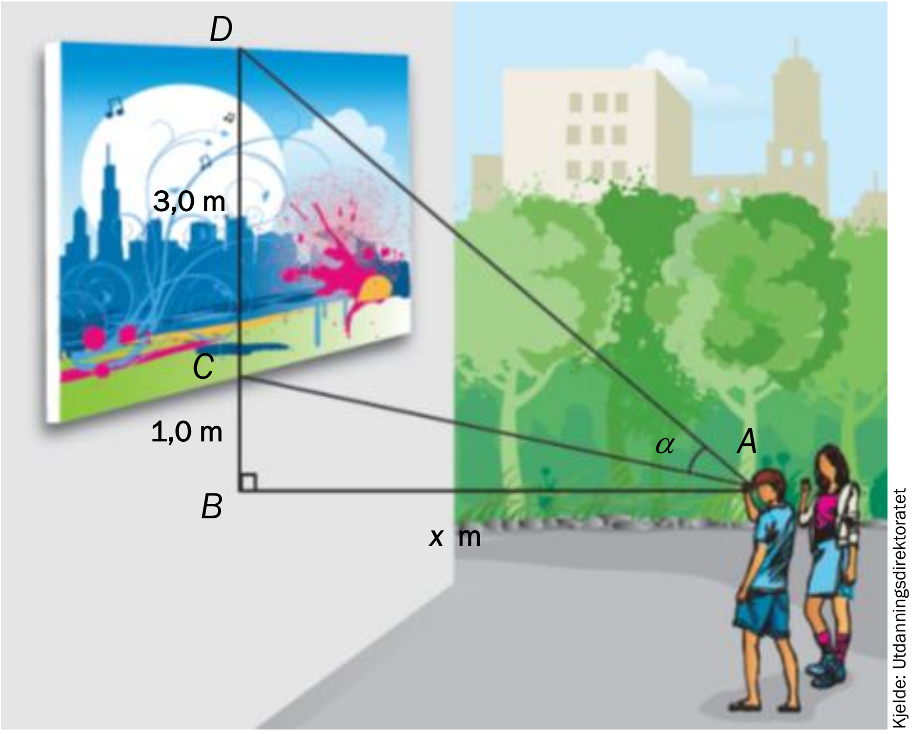
b) Teikn grafen til f. Bestem likevektslinja, amplituden og perioden til f.
Kva er gjennomsnittleg tidspunkt i løpet av året for når lyset blir slått på?

c) Bestem når på året lyset blir slått på klokka 18.00.

d) Bestem når på året dagslyset varer lengst ifølgje modellen.

Oppgåve 5 (8 poeng)

a) Bruk formlane for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ til å vise at $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$



Eit bilete har høgd $CD = 3{,}0$ m. Biletet heng på ein vegg slik at undersida av biletet er 1,0 m over augenivå hos personen i A (sjå skissa). Avstanden frå veggen til personen er $AB = x$.

På skissa er $\angle DAC = \alpha$, $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$. Vi set $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u-v)$

b) Bruk a) til å vise at

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$$

Vi ønskjer å bestemme avstanden x slik at synsvinkelen α blir størst mogleg.

c) Bestem største verdi for $f(x)$ og tilhøyrande verdi for x.

d) Bestem den største synsvinkelen α.

Oppgåve 6 (6 poeng)

Kjelde: www.tu.no/industri/article291230.ece (10.12.2011)

Ein rask fritidsbåt køyrer med farten 25 m/s da motoren plutseleg stansar. Båten blir bremsa ned i vatnet, og x sekund etter motorstansen er farten y m/s, og akselerasjonen er y' m/s^2.

I denne situasjonen gjeld differensiallikninga

$$y' = k \cdot y^2 \quad , \quad k < 0$$

a) Med det same motoren stansar, er akselerasjonen -12 m/s^2. Bestem konstanten k.
Vis at den generelle løysinga av differensiallikninga er

$$y = \frac{1}{0{,}02x + C}$$

der C er ein konstant.

b) Bestem konstanten C og farten til båten 3 s etter motorstansen.

Strekninga båten flyttar seg, er $s(x)$ meter etter motorstansen. Da gjeld:

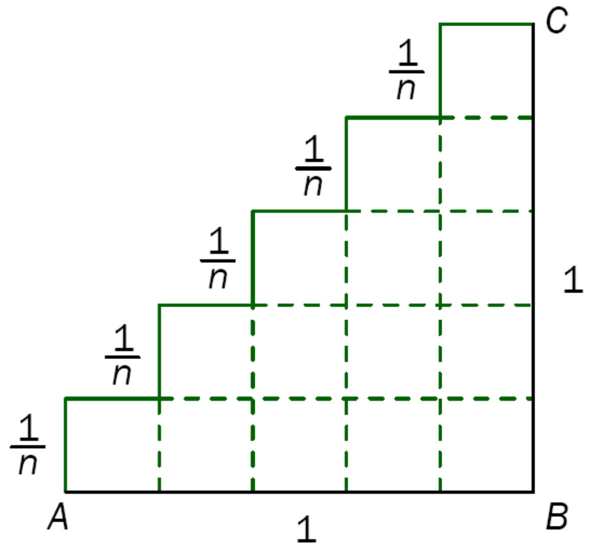
$$s' = y$$

c) Bestem kor langt båten flyttar seg i løpet av dei tre første sekunda etter motorstansen.

Oppgåve 7 (6 poeng)

Ein figur består av n søyler med kvadratiske ruter med side $\frac{1}{n}$. Den første søyla inneheld éi rute, den andre to ruter, og så vidare. Søyle nummer n inneheld n ruter.

Figuren nedanfor er teikna for $n=5$



a) Bestem arealet av figuren ovanfor.

b) Forklar at det samla arealet av n søyler er

$$S_n = 1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Vis at summen av rekkja kan skrivast $S_n = \frac{n+1}{2n}$

c) Bruk rekkja til å bestemme S_5. Kommenter svaret.

d) Vis at $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Bruk også eit geometrisk resonnement til å grunngi at svaret er riktig.

Oppgåve 8 (9 poeng)

I eit koordinatsystem er det gitt eit punkt $P(5, -1, 4)$ og eit plan

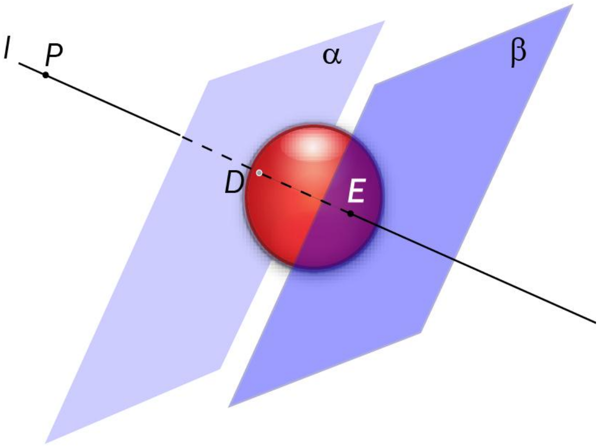
$$\alpha: \ 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Punkta $A(0, 0, 4)$, $B(2, 0, 0)$ og $C(1, 1, 4)$ ligg i eit anna plan β.

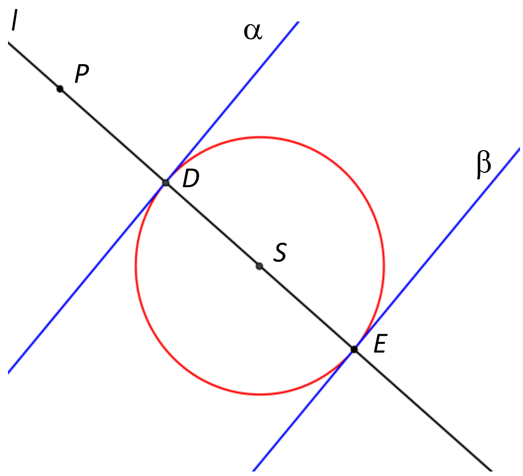
a) Bestem likninga til β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$

b) Rekn ut avstanden mellom plana α og β.

Plana α og β er begge tangentplan til ei kule. Sentrum S i kula og dei to tangeringspunkta D og E ligg på ei rett linje l gjennom punktet P. Sjå figurane nedanfor.



Figur 1: Kule og plan i rommet



Figur 2: Tverrsnitt av kule og plan

c) Set opp ei parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatane til D og E.

e) Bestem likninga til kula.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (13 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 3\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \sin x$

3) $k(x) = 5\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\cdot x - 2\right) + 7$

b) Bestem integralet

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx$$

c) Vis at

$$\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,dx = 2\ln 3$$

d) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \quad y(0) = 8$$

e) Gitt rekken

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots \qquad , \; x > 0$$

1) Forklar at rekken er geometrisk, og at den konvergerer.

2) Vis at summen er gitt ved

$$S(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Oppgave 2 (5 poeng)

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [3, -1, 2]$ og $\vec{b} = [6, 4, 2]$

Regn ut

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{b}$

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$

Oppgave 3 (6 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = x \cdot e^x$$

a) Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$

b) Bestem koordinatene til bunnpunkt og vendepunkt på grafen til f .

Det blir påstått at den *n*-te deriverte er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = (x + n) \cdot e^x$$

c) Bevis formelen for den *n*-te deriverte ved induksjon.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 4 (7 poeng)

Kilde: www.micromatic.no (10.12.2011)

En automatisk strømbryter for utelys skal programmeres. Lyset skal slås på når det begynner å mørkne. En modell for dette tidspunktet er gitt ved

$$f(t) = 19 - 4\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot t\right)$$

der $f(t)$ er tidspunktet målt i timer etter midnatt og t er antall dager regnet fra nyttår.
I denne modellen forutsettes det at alle måneder har 30 dager.

a) Når begynner det å mørkne 25. mars, ifølge modellen?

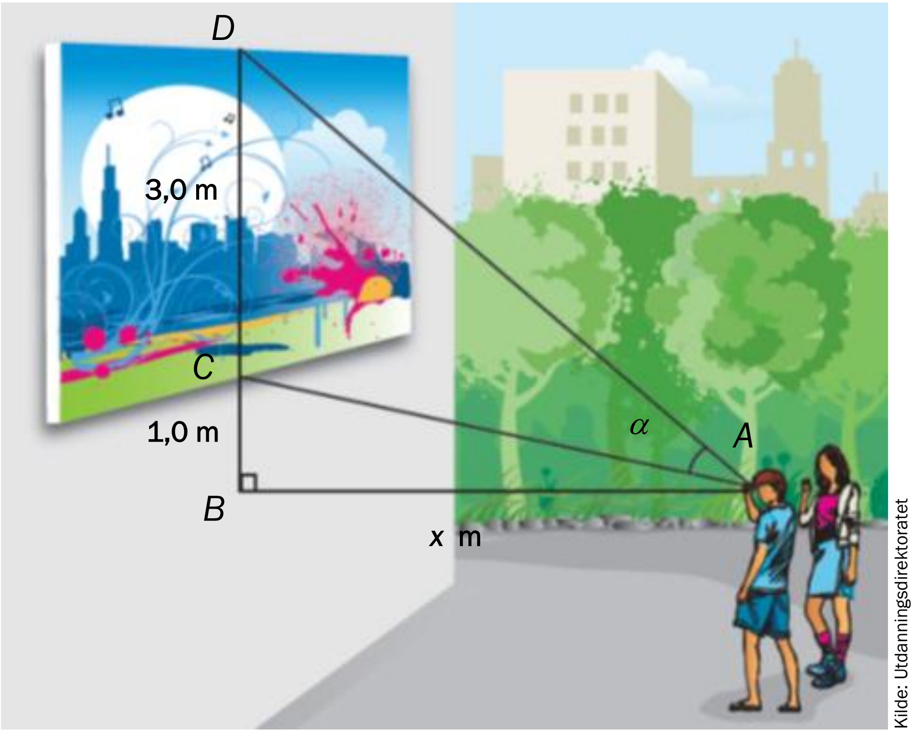
b) Tegn grafen til f. Bestem likevektslinjen, amplituden og perioden til f.
Hva er gjennomsnittlig tidspunkt i løpet av året for når lyset slås på?

c) Bestem når på året lyset slås på klokken 18.00.

d) Bestem når på året dagslyset varer lengst ifølge modellen.

Oppgave 5 (8 poeng)

a) Bruk formlene for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ til å vise at $\tan(u-v)=\dfrac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}$



Et bilde har høyde CD = 3,0 m. Bildet henger på en vegg slik at undersiden av bildet er 1,0 m over øyenivå hos personen i A (se skissen). Avstanden fra veggen til personen er $AB=x$.

På skissen er $\angle DAC=\alpha$, $\angle DAB=u$ og $\angle CAB=v$. Vi setter $f(x)=\tan(\alpha)=\tan(u-v)$

b) Bruk a) til å vise at

$$f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$$

Vi ønsker å bestemme avstanden x slik at synsvinkelen α blir størst mulig.

c) Bestem største verdi for $f(x)$ og tilhørende verdi for x.

d) Bestem den største synsvinkelen α.

Oppgave 6 (6 poeng)

Kilde: www.tu.no/industri/article291230.ece (10.12.2011)

En rask fritidsbåt kjører med farten 25 m/s da motoren plutselig stanser. Båten bremses ned i vannet, og x sekunder etter motorstansen er farten y m/s, og akselerasjonen er y' m/s^2.

I denne situasjonen gjelder differensiallikningen

$$y' = k \cdot y^2 \quad , \quad k < 0$$

a) Med det samme motoren stanser, er akselerasjonen -12 m/s^2. Bestem konstanten k. Vis at den generelle løsningen av differensiallikningen er

$$y = \frac{1}{0{,}02x + C}$$

der C er en konstant.

b) Bestem konstanten C og farten til båten 3 s etter motorstansen.

Strekningen båten forflytter seg, er $s(x)$ meter etter motorstansen. Da gjelder:

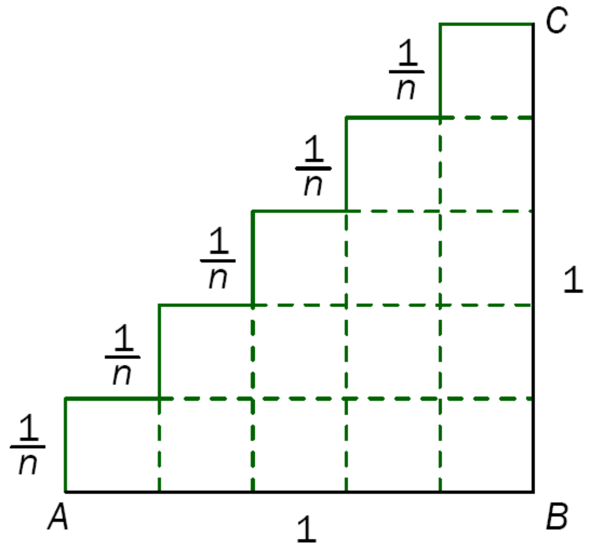
$$s' = y$$

c) Bestem hvor langt båten forflytter seg i løpet av de tre første sekundene etter motorstansen.

Oppgave 7 (6 poeng)

En figur består av n søyler med kvadratiske ruter med side $\frac{1}{n}$. Den første søylen inneholder én rute, den andre to ruter, og så videre. Søyle nummer n inneholder n ruter.

Figuren nedenfor er tegnet for $n = 5$



a) Bestem arealet av figuren ovenfor.

b) Forklar at det samlede arealet av n søyler er

$$S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Vis at summen av rekken kan skrives $S_n = \frac{n+1}{2n}$

c) Bruk rekken til å bestemme S_5. Kommenter svaret.

d) Vis at $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2}$

Bruk også et geometrisk resonnement til å begrunne at svaret er riktig.

Oppgave 8 (9 poeng)

I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5, -1, 4)$ og et plan

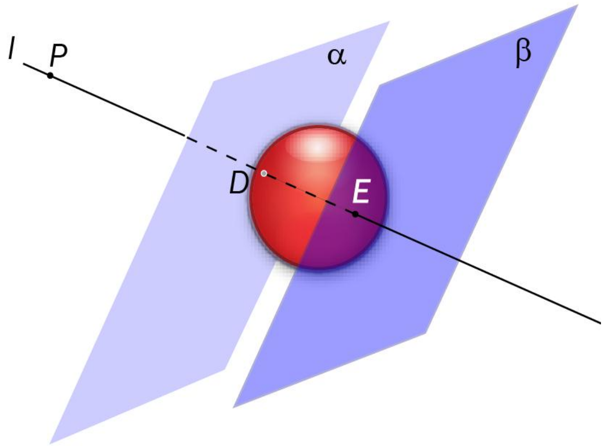
$$\alpha: \; 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Punktene $A(0, 0, 4)$, $B(2, 0, 0)$ og $C(1, 1, 4)$ ligger i et annet plan β.

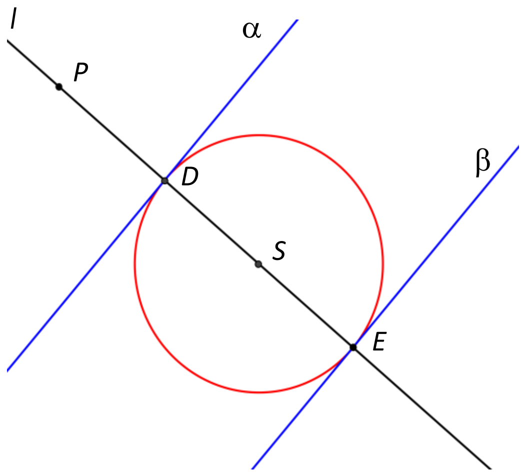
a) Bestem likningen til β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom punktet P. Se figurene nedenfor.



Figur 1: Kule og plan i rommet



Figur 2: Tverrsnitt av kule og plan

c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet