Utdanningsdirektoratet

Eksamen

21.05.2013

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. • Alle grafar og figurar (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 3\cos x$

b) $g(x) = 6\sin(\pi x) + 7$

c) $h(x) = 3e^{2x} \cdot \sin(3x)$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Bestem integralet $\int \frac{2x}{x^2 - 4}\,dx$ ved å bruke

a) variabelskifte

b) delbrøkoppspalting

Oppgåve 3 (4 poeng)

Punkta $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$ og $C(0, 0, 0)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bruk resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

b) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Bruk mellom anna dette resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

Oppgåve 4 (3 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y' = 6xy \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

Oppgåve 5 (5 poeng)

Ei rekkje er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

a) Bestem a_{16} og S_{16}

b) Forklar at rekkja er aritmetisk, og bruk dette til å finne eit uttrykk for a_n og S_n.

c) Bestem kor mange ledd rekkja minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgåve 6 (2 poeng)

Denne informasjonen er gitt om ein kontinuerleg funksjon f:

- $f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ for $x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$
- $f'(x) = 0$ for $x = -2$ og for $x = 2$
- $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og for $x = 3$

Lag ei skisse som viser korleis grafen til f kan sjå ut.

Oppgåve 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Ein pasient får 8 mL av ein medisin kvar time. Den totale mengda medisin i kroppen t timar etter at medisineringa starta, er $y(t)$ mL. I løpet av ein time skil kroppen ut 5 % av den totale medisinmengda.

a) Forklar at

$$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$$

b) Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

c) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 12\,e^{-0{,}5x} \cdot \sin(0{,}5x) \quad , \quad x \in \left[0,\, 4\pi\right]$$

a) Teikn grafen til f.

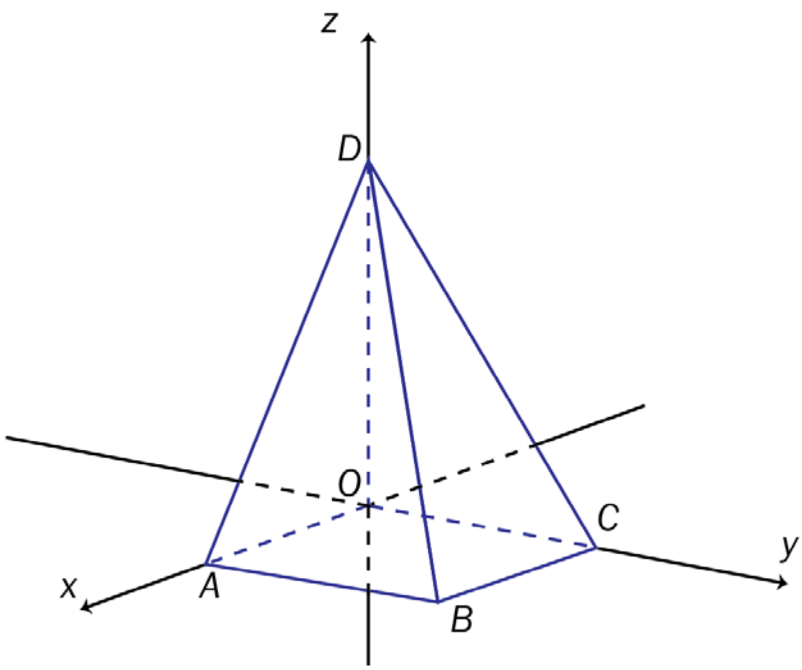
b) Bestem eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c) Bestem arealet som er avgrensa av grafen til f og x-aksen.

Oppgåve 3 (8 poeng)

Skissa nedanfor viser ein pyramide $OABCD$ som er plassert i eit romkoordinatsystem.

Hjørna i pyramiden er $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ og $D(0, 0, 4)$.



a) Bestem ved rekning arealet av sideflata ABD i pyramiden.

b) Sideflata ABD ligg i eit plan α.

Vis ved rekning at planet α har likninga

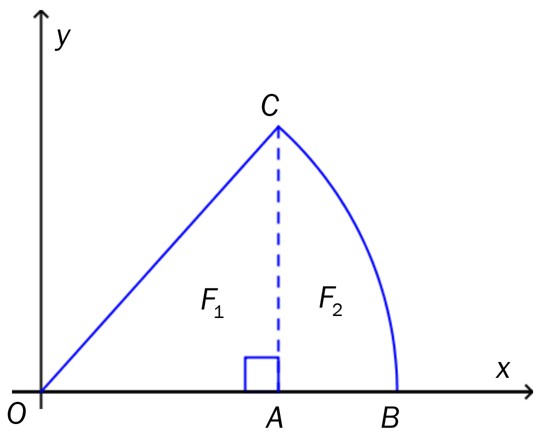
$$4x + 3z - 12 = 0$$

c) Bestem avstanden frå punktet O til planet α.

d) Bestem ved rekning vinkelen mellom dei to plana som sideflatene ABD og BCD ligg i.

Oppgåve 4 (6 poeng)

Figuren nedanfor viser ein sirkelsektor OBC der C ligg i første kvadrant. Bogen $\overset{\frown}{BC}$ er ein del av sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 9$. Punktet A har koordinatane $(2,\,0)$ og $\angle OAC = 90°$



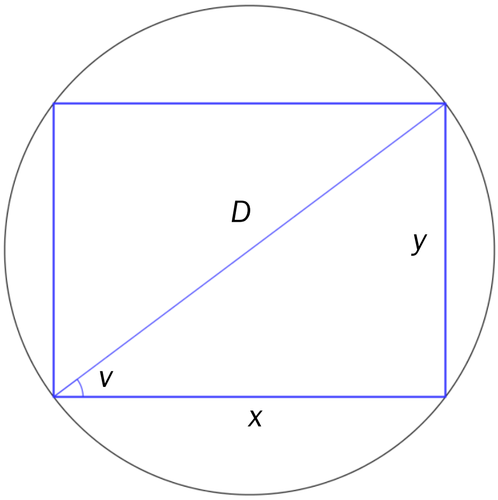
a) Vis at koordinatane til C er $(2, \sqrt{5})$.
Bestem likninga for den rette linja gjennom O og C.

b) Når flatestykket F_1 $(\triangle OAC)$ blir dreidd $360°$ om x-aksen, får vi ei kjegle.
Bestem volumet av denne kjegla ved hjelp av integralrekning.

c) Når flatestykket F_2 blir dreidd $360°$ om x-aksen, får vi eit kulesegment.
Bestem volumet av dette kulesegmentet ved hjelp av integralrekning.

Oppgåve 5 (6 poeng)

På figuren er eit rektangel med sider x og y skrive inn i ein sirkel. Sirkelen har diameteren D. $\angle v$ er vinkelen mellom x og D.



a) Forklar at omkretsen O til rektangelet kan skrivast som

$$O(v) = 2D\cos v + 2D\sin v$$

Bestem eit funksjonsuttrykk for arealet $A(v)$ av rektangelet.

b) Bruk $O'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst omkrets, er eit kvadrat.

Bestem den største omkretsen av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

c) Bruk $A'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst areal, også er eit kvadrat.

Bestem det største arealet av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Oppgåve 6 (6 poeng)

Sierpiński-trekanten, som har fått namnet sitt etter den polske matematikaren Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), lagar vi slik:

1. Vi startar med ein likesida, svart trekant har areal A. Sjå figur 1.

2. Midtpunktet på kvar av sidene i trekanten er hjørna i ein ny kvit, likesida trekant. Denne kvite trekanten fjernar vi. Vi står da igjen med tre likesida, svarte trekantar. Sjå figur 2.

3. Vi gjentek denne prosessen med kvar av dei svarte trekantane. Sjå figurane 3–5. Vi tenkjer oss at prosessen blir utført uendeleg mange gonger. Den «gjennomhola» figuren vi da står igjen med, blir kalla *Sierpiński-trekanten*.

Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4 Figur 5

Summen av areala som blir fjerna (dei kvite trekantane), er gitt ved rekkja

$$A\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\ldots\right)$$

a) Bestem summen av rekkja ovanfor.
Kva fortel svaret ditt om arealet av *Sierpiński-trekanten*?

b) Sidene i trekanten i figur 1 er lik a.

Forklar at omkretsane av dei svarte trekantane i figurane $2-5$ ovanfor er høvesvis

$$3\cdot\frac{3}{2}\cdot a\,,\quad 3\cdot\frac{9}{4}\cdot a\,,\quad 3\cdot\frac{27}{8}\cdot a \quad \text{og} \quad 3\cdot\frac{81}{16}\cdot a$$

c) Vi gjer prosessen som forklart i trinn 2 ovanfor n gonger. Forklar at omkretsen av dei svarte trekantane da er lik $3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot a$

Forklar at $3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot a \to \infty$ når $n\to\infty$

Kva fortel det om omkretsen til *Sierpiński-trekanten*?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\cos x$

b) $g(x) = 6\sin(\pi x) + 7$

c) $h(x) = 3e^{2x} \cdot \sin(3x)$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralet $\int \frac{2x}{x^2 - 4} \mathrm{d}x$ ved å bruke

a) variabelskifte

b) delbrøkoppspalting

Oppgave 3 (4 poeng)

Punktene $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$ og $C(0, 0, 0)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bruk resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

b) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Bruk blant annet dette resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

Oppgave 4 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' = 6xy \qquad \text{når} \quad y(0) = 2$$

Oppgave 5 (5 poeng)

En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

a) Bestem a_{16} og S_{16}

b) Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n.

c) Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgave 6 (2 poeng)

Følgende informasjon er gitt om en kontinuerlig funksjon f:

- $f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ for $x \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$
- $f'(x) = 0$ for $x = -2$ og for $x = 2$
- $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og for $x = 3$

Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Oppgave 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

En pasient får 8 mL av en medisin hver time. Den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, er $y(t)$ mL. I løpet av en time skiller kroppen ut 5 % av den totale medisinmengden.

a) Forklar at

$$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$$

b) Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

c) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 12\,e^{-0{,}5x} \cdot \sin(0{,}5x) \quad , \quad x \in [0,\, 4\pi]$$

a) Tegn grafen til f.

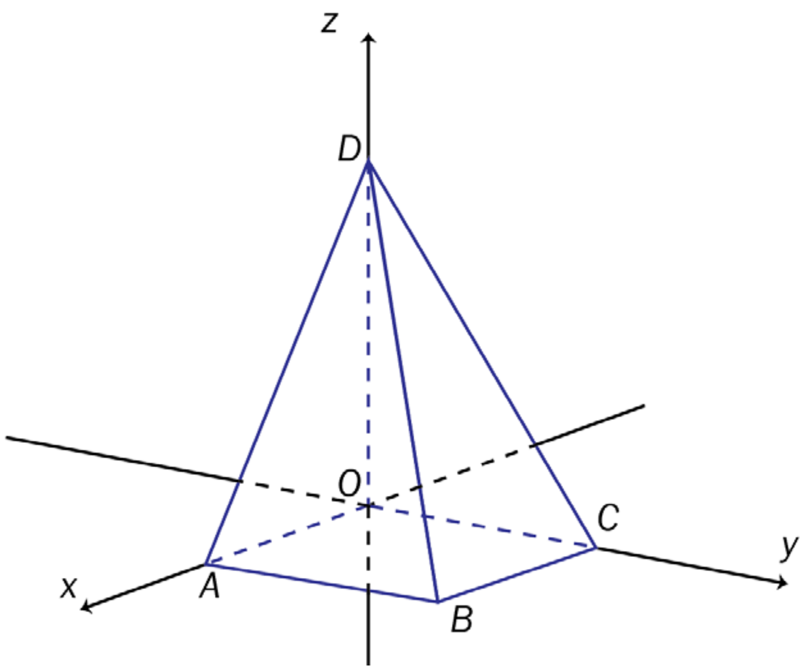
b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Bestem arealet som er begrenset av grafen til f og x-aksen.

Oppgave 3 (8 poeng)

Skissen nedenfor viser en pyramide $OABCD$ som er plassert i et romkoordinatsystem.

Hjørnene i pyramiden er $O(0,\,0,\,0)$, $A(3,\,0,\,0)$, $B(3,\,3,\,0)$, $C(0,\,3,\,0)$ og $D(0,\,0,\,4)$.



a) Bestem ved regning arealet av sideflaten ABD i pyramiden.

b) Sideflaten ABD ligger i et plan α.

Vis ved regning at planet α har likningen

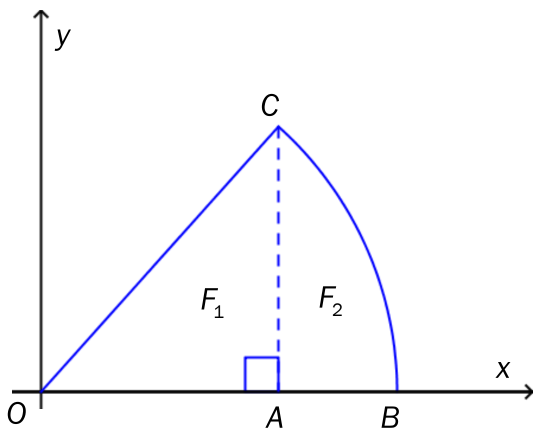
$$4x + 3z - 12 = 0$$

c) Bestem avstanden fra punktet O til planet α.

d) Bestem ved regning vinkelen mellom de to planene som sideflatene ABD og BCD ligger i.

Oppgave 4 (6 poeng)

Figuren nedenfor viser en sirkelsektor OBC der C ligger i første kvadrant. Buen $\overset{\frown}{BC}$ er en del av sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 9$. Punktet A har koordinatene $(2, 0)$ og $\angle OAC = 90°$



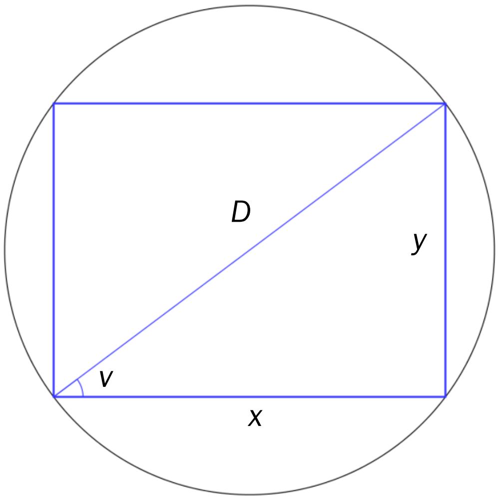
a) Vis at koordinatene til C er $(2, \sqrt{5})$.
Bestem likningen for den rette linjen gjennom O og C.

b) Når flatestykket F_1 ($\triangle OAC$) dreies $360°$ om x-aksen, får vi en kjegle.
Bestem volumet av denne kjeglen ved hjelp av integralregning.

c) Når flatestykket F_2 dreies $360°$ om x-aksen, får vi et kulesegment.
Bestem volumet av dette kulesegmentet ved hjelp av integralregning.

Oppgave 5 (6 poeng)

På figuren er et rektangel med sider x og y innskrevet i en sirkel. Sirkelen har diameteren D. $\angle v$ er vinkelen mellom x og D.



a) Forklar at omkretsen O til rektangelet kan skrives som

$$O(v) = 2D\cos v + 2D\sin v$$

Bestem også et funksjonsuttrykk for arealet $A(v)$ av rektangelet.

b) Bruk $O'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst omkrets, er et kvadrat.

Bestem den største omkretsen av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

c) Bruk $A'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst areal, også er et kvadrat.

Bestem det største arealet av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Oppgave 6 (6 poeng)

Sierpiński-trekanten, som har sitt navn etter den polske matematikeren Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), lages slik:

1. Vi starter med en likesidet, svart trekant som har areal A. Se figur 1.

2. Midtpunktet på hver av sidene i trekanten er hjørnene i en ny hvit, likesidet trekant. Denne hvite trekanten fjerner vi. Vi står da igjen med tre likesidede, svarte trekanter. Se figur 2.

3. Vi gjentar denne prosessen med hver av de svarte trekantene. Se figurene 3–5. Vi tenker oss at prosessen blir utført uendelig mange ganger. Den «gjennomhullede» figuren vi da står igjen med, kalles *Sierpiński-trekanten*.

Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4 Figur 5

Summen av arealene som fjernes (de hvite trekantene), er gitt ved rekken

$$A \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \dots \right)$$

a) Bestem summen av rekken ovenfor.
Hva forteller svaret ditt om arealet av *Sierpiński-trekanten*?

b) Sidene i trekanten i figur 1 er lik a.

Forklar at omkretsene av de svarte trekantene i figurene $2-5$ ovenfor er henholdsvis

$$3 \cdot \frac{3}{2} \cdot a \,, \quad 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot a \,, \quad 3 \cdot \frac{27}{8} \cdot a \quad \text{og} \quad 3 \cdot \frac{81}{16} \cdot a$$

c) Vi gjør prosessen som forklart i trinn 2 ovenfor n ganger. Forklar at omkretsen av de svarte trekantene da er lik $3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \cdot a$

Forklar at $3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \cdot a \to \infty$ når $n \to \infty$

Hva forteller dette om omkretsen til *Sierpiński-trekanten*?

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet