Eksamen Matematikk R2

21. mai 2013

Fasit / kort løsn. forslag

DEL 1

(1) a) $f'(x) = -3\sin x$

b) $g'(x) = 6\pi\cos(\pi x)$

c) $h'(x) = e^{2x}(9\cos 3x + 6\sin 3x)$

(2) a) $\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 - 4 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$ $\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2-4| + C$

b) delbrøkoppspalting $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ gir $\ln|x-2| + \ln|x+2| + C$
$= \ln|x^2-4| + C$

(3) a) $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1,-1,4)$

Areal av $\triangle ABC = \frac{1}{2}|(-1,-1,4)| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

Areal av $\triangle ABC = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

(4) Integrerende faktor e^{-3x^2} gir $y(x) = 2e^{3x^2}$

(5) a) $a_{16} = 31$, $S_{16} = 256$

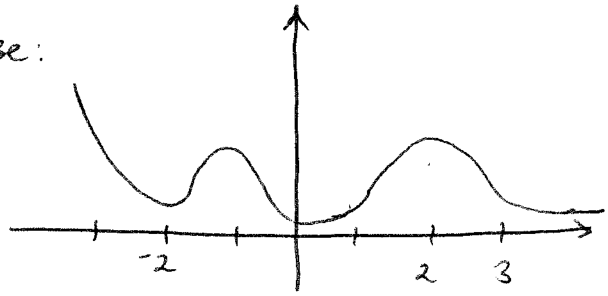
b) $a_{n+1} = a_n + 2$ for $n \geq 1$ $(a_1 = 1)$, dvs ~~ette~~ etterfølgende ledd i følgen har en fast differanse, så følgen er aritmetisk

$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ for $n \geq 1$

$S_n = n^2$

c) Minst 21 ledd

(6) Skisse:



(7) $P(1)$ ok

Anta $P(m)$ ok, $m \in \mathbb{N}$

$$P(m+1) = \underbrace{a\frac{k^m - 1}{k-1}}_{v/P(m)} + ak^m = a\frac{k^{m+1}-1}{k-1},$$ (NB! $k \neq 1$)

så $P(n)$ er sann for $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon

DEL 2

(1) a) La $y(t)$ være den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, målt i ml.

Vi antar at vekstfarten $y'(t)$ har to bidrag: en kontinuerlig tilførsel av medisin tilsvarende 8 ml i timen og en kontinuerlig utskilling av medisin (negativt bidrag) som på ethvert tidspunkt t tilsvarer 5 % av den totale medisinmengden $y(t)$. Det gir

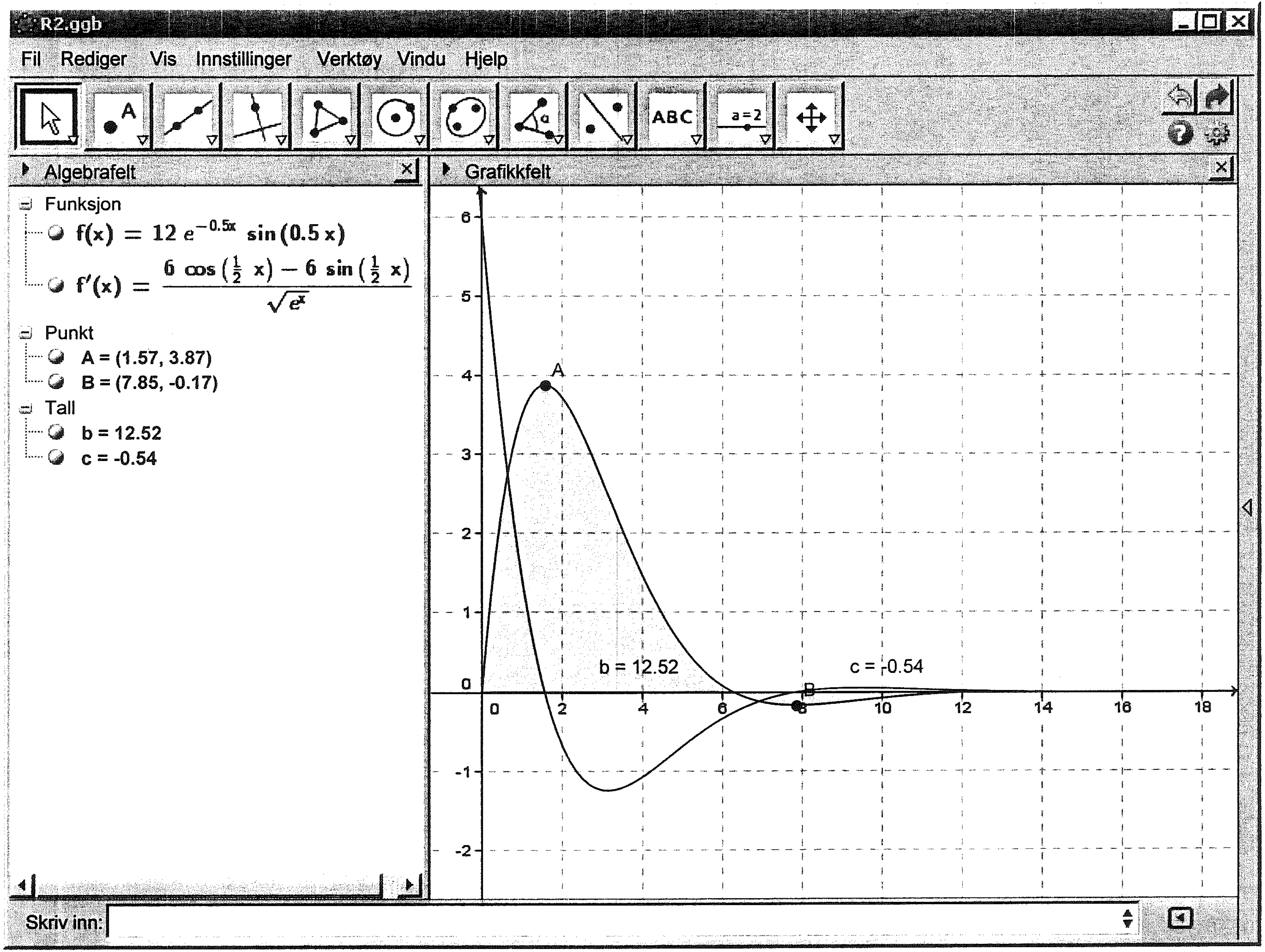
$$y' = 8 - 0{,}05y$$

b) Integrerende faktor $e^{0{,}05t}$ gir $y(t) = 160 + Ce^{-0{,}05t}$, $C \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0$ gir $C = -160$, så $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$

c) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 160$. Medisinmengden i kroppen vil nærme seg 160 ml etter lang tid.

Del 2, oppg. 2


R2.ggb
Fil Rediger Vis Innstillinger Verktøy Vindu Hjelp
Algebrafelt
Funksjon
$f(x) = 12\, e^{-0.5x} \sin(0.5\, x)$
$f'(x) = \dfrac{6 \cos\left(\frac{1}{2}\, x\right) - 6 \sin\left(\frac{1}{2}\, x\right)}{\sqrt{e^x}}$
Punkt
A = (1.57, 3.87)
B = (7.85, -0.17)
Tall
b = 12.52
c = -0.54
Grafikkfelt
A
B
b = 12.52
c = -0.54
Skriv inn:

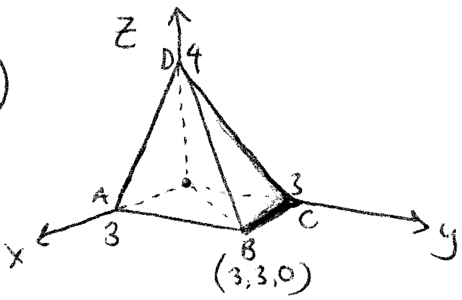
2 a) Se GeoGebrautskrift

b) toppunkt: $\left(\frac{\pi}{2}, 6\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$

bunnpunkt: $\left(\frac{5\pi}{4}, -6\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)$

c) $A = 12 + 24e^{-\pi} + 12e^{-2\pi}$ $\quad (\approx 13{,}06)$

3



a) Arealet av ABD:
Tar utgangspunkt i A. Arealet er $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AD}|$

$\vec{AB} = (0,3,0)$
$\vec{AD} = (-3,0,4)$
$\vec{AB} \times \vec{AD} = (12,0,9)$
Arealet av sideflaten ABD: $\frac{1}{2}|(12,0,9)| = \frac{1}{2}\sqrt{144+81} = \frac{15}{2}$

b) ABD ligger i planet α. $\vec{AB} \times \vec{AD}$ står normalt på α.
En normalvektor til α er dermed $\vec{n} = (4,0,3)$.

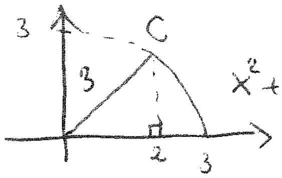
$\alpha: 4x + 3z = d$
$A(3,0,0)$ gir $d = 12$
$\alpha: 4x + 3z - 12 = 0$

c) Avstandsformel: $\frac{|d|}{|\vec{n}|}$ gir $\frac{12}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5}$

Eventuelt: lengden av projeksjonen av $\vec{OP}$ ned på $\vec{n}$, der $P \in \alpha$,
som gir $\frac{|\vec{OP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{12}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5}$

d) Vinkelen mellom to plan er lik vinkelen mellom normalvektorene. Planet som ABD ligger i har $\vec{n} = (4,0,3)$.
Vi regner ut normalvektoren til planet som BCD ligger i:
$\vec{BC} \times \vec{BD} = (0,12,9)$, som gir $\vec{n_2} = (0,4,3)$. Vinkelen v har $\cos v = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{9}{25}$, som gir $v \approx 68{,}9°$

4



$x^2+y^2=9$

a) $C(x,y)$ der $4+y^2=9$ og $\underline{x=2}$

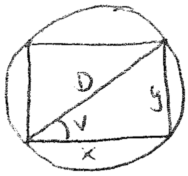
$y^2=5$

$\underline{y=\sqrt{5}}$ $\quad \underline{\underline{C(2,\sqrt{5})}}$

b) $\underline{\underline{V=\frac{10}{3}\pi}}$

c) $\underline{\underline{V=\frac{8}{3}\pi}}$

5



a) $O=2x+2y$, $x=D\cos v$, $y=D\sin v$

$\underline{\underline{O(v)=2D\cos v+2D\sin v}}$

$A(v)=D^2\cos v\sin v=\underline{\underline{\frac{1}{2}D^2\sin 2v}}$

b) $v=\frac{\pi}{4}$ gir maks for $O(v)$, dvs. når $x=y$; et kvadrat

$O(\frac{\pi}{4})=\underline{\underline{2D\sqrt{2}}}$

c) $v=\frac{\pi}{4}$ gir maks for $A(v)$, dvs. når $x=y$; et kvadrat

$A(\frac{\pi}{4})=\underline{\underline{\frac{1}{2}D^2}}$

6

a) Areal som fjernes:

$$A\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\dots\right)$$

$$=\frac{A}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{A}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)=A$$

Arealet av Sierpinski-trekanten er lik 0.

b) Omkrets av de svarte trekantene:

figur 2:  $3a/2$ $\quad \underbrace{\underbrace{\frac{a}{2}\cdot 3}_{3\text{ sider}}\cdot 3}_{3\text{ trekanter}}=3\cdot\frac{3}{2}a$

osv.

c) Omkrets i "figur n": $3\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot a$

Vi starter med $3a$.
For hvert trinn deler vi a i 2 og får 3 like "nye" sider, dvs. $\frac{3}{2}$ i hvert trinn

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^n a \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \text{siden } \frac{3}{2}>1$$

Omkretsen til Sierpinski-trekanten er uendelig.