

Eksamen

20.05.2015

REA3024 Matematikk R2

Ny eksamensordning

Del 1:

3 timar (utan hjelpemiddel) /
3 timer (uten hjelpemidler)

Del 2:

2 timar (med hjelpemiddel) /
2 timer (med hjelpemidler)

Minstekrav til digitale verktøy på datamaskin:

- Grafteiknar/graftegner
- CAS

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar– vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: <ul style="list-style-type: none">• London Eye, en.wikipedia.org, www.saylor.org (01.12.2014)• Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = -3 \cos x$

b) $g(x) = \sin^2 x$

c) $h(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Rekn ut integrala

a) $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$

c) $\int x \cdot \ln x dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

a) Bruk ein integrasjonsmetode til å vise at $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

b) Løys differensiallikninga

$$y' + 2xy = 4x \quad , \quad y(0) = 8$$

Oppgåve 4 (3 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved

$$S(x) = 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots, \quad x \neq 0$$

- Bestem konvergensområdet til rekkja.
- Bestem x slik at $S(x) = 4$

Oppgåve 5 (6 poeng)

Punkta $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 1)$ er gitt.

- Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bestem arealet av $\triangle ABC$.
- Punkta A, B og C ligg i eit plan α . Bestem likningen for planet α .

Ein partikkel startar i origo $O(0, 0, 0)$. Etter tida t er partikkelen i eit punkt P gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = \left[t, \frac{t^2}{3}, -\frac{t}{4} \right], \quad t \geq 0$$

- Kor lang tid tek det f r partikkelen treffer planet α ? Bestem koordinatane til punktet der partikkelen treffer α .

Oppgåve 6 (2 poeng)

Ei talf lge $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = -1$ og $a_{n+1} = a_n + n - 1$

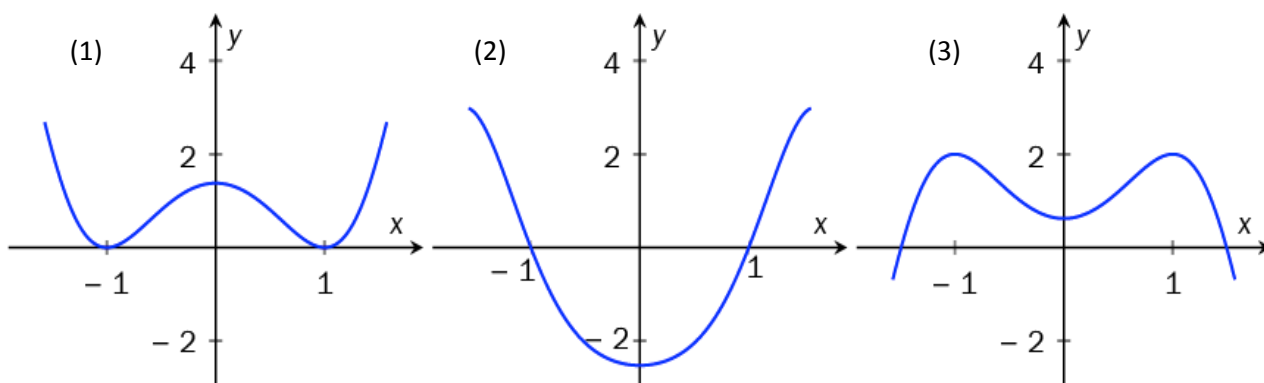
Bruk induksjon til å bevisе at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

Oppgave 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3 - 3 \cos(1 - x^2), \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- Bestem nullpunktene til f ved rekning.
- Bruk $f'(x)$ til å bestemme x -verdien til eventuelle topp- eller botnpunkt på grafen til f .
- Nedanfor er det teikna tre grafar. Éin av dei er grafen til f . Avgjer kva for ein det er. Grunngi svaret.



Oppgave 8 (4 poeng)

Ein trigonometrisk formel er gitt ved

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

- Bruk formelen til å bestemme eit uttrykk for $\cos(2x)$.
- Skriv uttrykket $\cos^4 x - \sin^4 x$ så enkelt som mogleg.

Oppgave 9 (2 poeng)

Løys likninga

$$\sin x + \cos x = 1, \quad x \in [0, 2\pi]$$

DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Roger planlegg ein sykkeltur. Han reknar med å kunne starte med farten 26 km/h. Etter kvart vil farten minke etter formelen

$$v(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

- $v(t)$ og $s(t)$ er begge funksjonar som er avhengige av tida t målt i timar
- $v(t)$ er farten målt i kilometer per time
- $s(t)$ er den tilbakelagde veglengda målt i kilometer

a) Bestem farten etter 125 km.

Formelen ovanfor kan vi skrive som differensiallikninga

$$s'(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

b) Bestem $s(t)$ når $s(0) = 0$.

c) Kor langt sykklar Roger den første timen? Kor lang tid bruker han på 125 km?

Oppgåve 2 (6 poeng)

Hjørna i ein pyramide $ABCP$ er $A(0,0,0)$, $B(1,0,-1)$, $C(1,1,0)$ og $P(t, 2t+1, t^2+2)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem eit uttrykk for volumet $V(t)$ av pyramiden.

b) Bestem koordinatane til P slik at $V(t) = \frac{7}{2}$.

c) Bestem koordinatane til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mogleg.

Oppgåve 3 (6 poeng)



London Eye er eit parisarhjul med diameter lik 135 m. Ein runde tek 30 min. Passasjerane går om bord i parisarhjulet frå ei plattform som ligg 2 m over bakkenivå.

Etter t min fr  ombordstiginga er ein passasjer $h(t)$ m over bakkenivå. Ein kan vise at

$$h(t) = -67,5 \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) + 69,5$$

- Bruk grafteiknar til å teikne grafen til h for $t \in [0, 30]$. Bestem grafisk n r passasjerer er 50 m over bakkenivå.
- Bestem vendepunkta på grafen til h . Forklar kva praktisk informasjon verdiane av $h'(7,5)$ og $h'(22,5)$ gir.

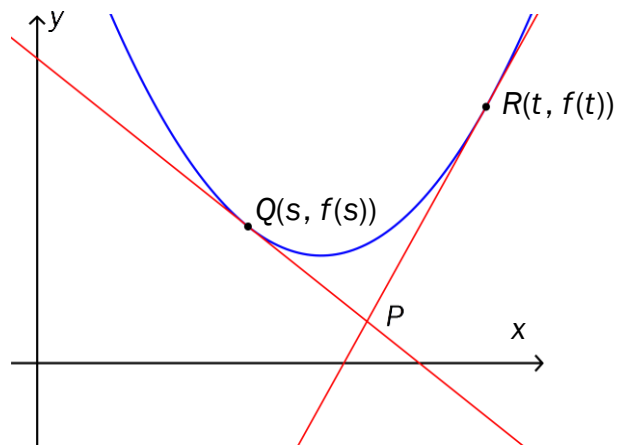
Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Tangentane i punkta $Q(s, f(s))$ og $R(t, f(t))$ skjær kvarandre i eit punkt P .

Sjå skisse 1.



Skisse 1

a) Vis at likningane for dei to tangentane er

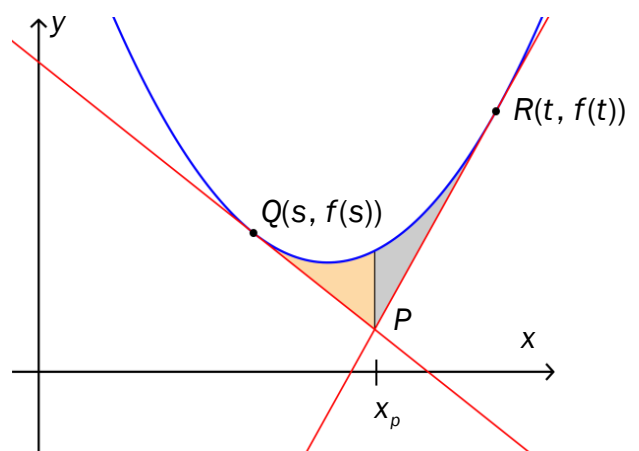
$$g(x) = (a + 2s)x + b - s^2 \quad \text{og} \quad h(x) = (a + 2t)x + b - t^2$$

b) Bruk CAS til å vise at x -koordinaten til punktet P er gitt ved $x_p = \frac{s+t}{2}$

Den vertikale linja $x = x_p$ deler området mellom grafen og tangentane i to område.

Sjå skisse 2.

c) Bruk CAS til å vise at areala av dei to områda er like store for alle verdier av a og b .



Skisse 2

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger– vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: <ul style="list-style-type: none">• London Eye, en.wikipedia.org, www.saylor.org (01.12.2014)• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = -3 \cos x$

b) $g(x) = \sin^2 x$

c) $h(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Regn ut integralene

a) $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$

c) $\int x \cdot \ln x dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Bruk en integrasjonsmetode til å vise at $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

b) Løs differensiallikningen

$$y' + 2xy = 4x \quad , \quad y(0) = 8$$

Oppgave 4 (3 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots, \quad x \neq 0$$

- Bestem konvergensområdet til rekken.
- Bestem x slik at $S(x) = 4$

Oppgave 5 (6 poeng)

Punktene $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 1)$ er gitt.

- Bestem $\vec{AB} \times \vec{AC}$. Bestem arealet av $\triangle ABC$.
- Punktene A, B og C ligger i et plan α . Bestem likningen for planet α .

En partikkel starter i origo $O(0, 0, 0)$. Etter tiden t er partikkelen i et punkt P gitt ved

$$\vec{OP} = \left[t, \frac{t^2}{3}, -\frac{t}{4} \right], \quad t \geq 0$$

- Hvor lang tid tar det før partikkelen treffer planet α ? Bestem koordinatene til punktet der partikkelen treffer α .

Oppgave 6 (2 poeng)

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = -1$ og $a_{n+1} = a_n + n - 1$

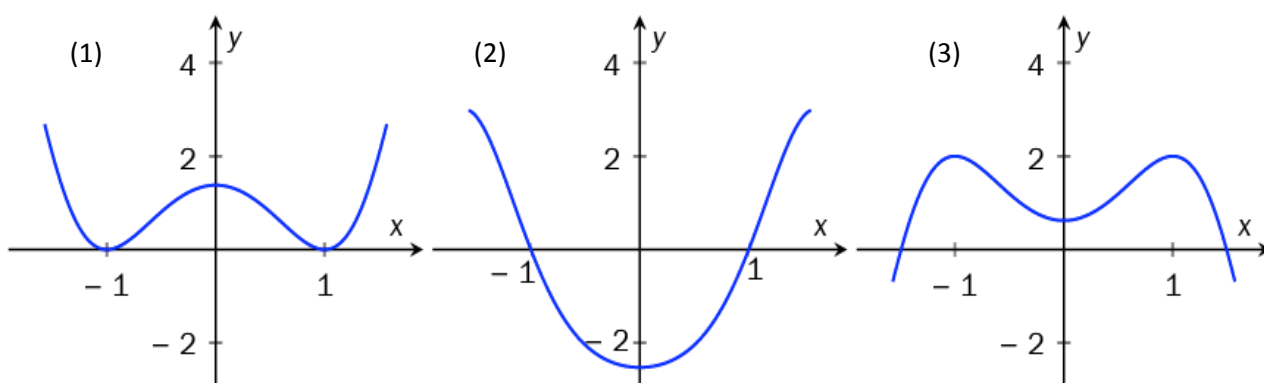
Bruk induksjon til å bevise at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

Oppgave 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3 - 3 \cos(1 - x^2), \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- Bestem nullpunktene til f ved regning.
- Bruk $f'(x)$ til å bestemme x -verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f .
- Nedenfor er det tegnet tre grafer. Én av dem er grafen til f . Avgjør hvilken. Begrunn svaret.



Oppgave 8 (4 poeng)

En trigonometrisk formel er gitt ved

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

- Bruk formelen til å bestemme et uttrykk for $\cos(2x)$.
- Skriv uttrykket $\cos^4 x - \sin^4 x$ så enkelt som mulig.

Oppgave 9 (2 poeng)

Løs likningen

$$\sin x + \cos x = 1, \quad x \in [0, 2\pi]$$

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Roger planlegger en sykkelturn. Han regner med å kunne starte med farten 26 km/h. Etter hvert vil farten avta etter formelen

$$v(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

- $v(t)$ og $s(t)$ er begge funksjoner som er avhengige av tiden t målt i timer
- $v(t)$ er farten målt i kilometer per time
- $s(t)$ er den tilbakelagte veilengden målt i kilometer

a) Bestem farten etter 125 km.

Formelen ovenfor kan vi skrive som differensiallikningen

$$s'(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

b) Bestem $s(t)$ når $s(0) = 0$.

c) Hvor langt sykler Roger den første timen? Hvor lang tid bruker han på 125 km?

Oppgave 2 (6 poeng)

Hjørnene i en pyramide $ABCP$ er $A(0,0,0)$, $B(1,0,-1)$, $C(1,1,0)$ og $P(t, 2t+1, t^2+2)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem et uttrykk for volumet $V(t)$ av pyramiden.

b) Bestem koordinatene til P slik at $V(t) = \frac{7}{2}$.

c) Bestem koordinatene til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig.

Oppgave 3 (6 poeng)



London Eye er et pariserhjul med diameter lik 135 m. En runde tar 30 min. Passasjerene går ombord i pariserhjulet fra en plattform som ligger 2 m over bakkenivå.

Etter t min fra ombordstigning er en passasjer $h(t)$ m over bakkenivå. Det kan vises at

$$h(t) = -67,5 \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) + 69,5$$

- Bruk graftegner til å tegne grafen til h for $t \in [0, 30]$. Bestem grafisk når passasjerer er 50 m over bakkenivå.
- Bestem vendepunktene på grafen til h .
Forklar hvilken praktisk informasjon verdiene av $h'(7,5)$ og $h'(22,5)$ gir.

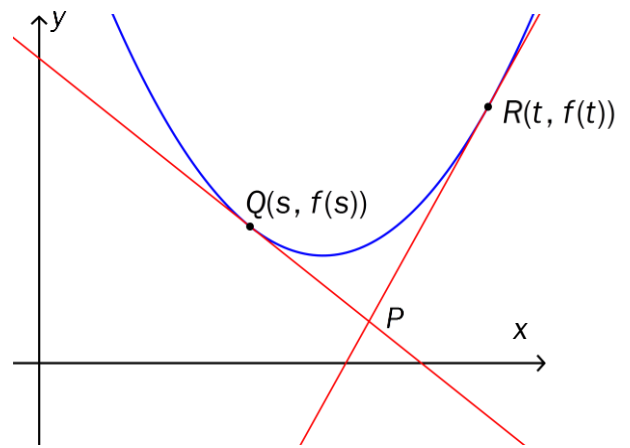
Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Tangentene i punktene $Q(s, f(s))$ og $R(t, f(t))$ skjærer hverandre i et punkt P .

Se skisse 1.



Skisse 1

a) Vis at likningene for de to tangentene er

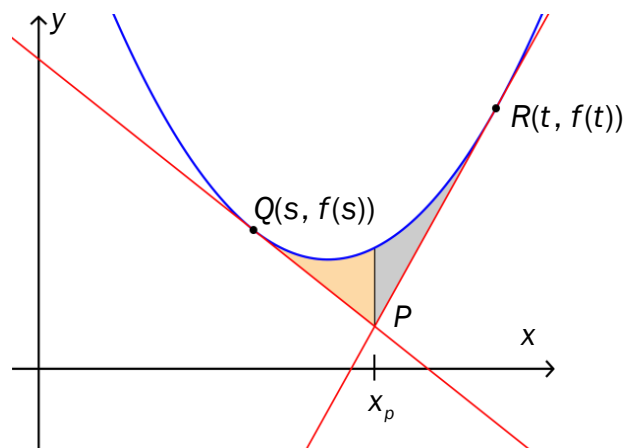
$$g(x) = (a+2s)x + b - s^2 \quad \text{og} \quad h(x) = (a+2t)x + b - t^2$$

b) Bruk CAS til å vise at x -koordinaten til punktet P er gitt ved $x_p = \frac{s+t}{2}$

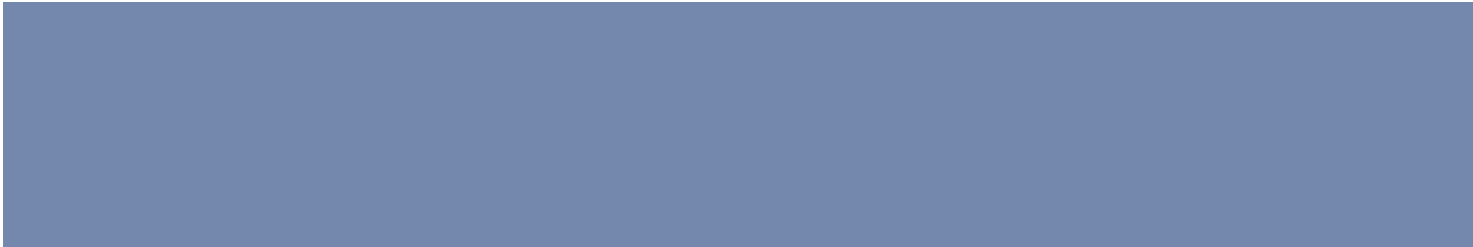
Den vertikale linjen $x = x_p$ deler området mellom grafen og tangentene i to områder.

Se skisse 2.

c) Bruk CAS til å vise at arealene av de to områdene er like store for alle verdier av a og b .



Skisse 2



Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no