Eksamen våren 2015 – Løsninger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Oppgave 1

a $f(x) = -3\cos x$

$f'(x) = -3\cdot(-\sin x) = 3\sin x$

b $g(x) = \sin^2 x$

$g'(x) = 2\sin x\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

c $h(x) = x^3\cdot e^{-x}$

$h'(x) = (x^3)'\cdot e^{-x} + x^3\cdot(e^{-x})' = 3x^2\cdot e^{-x} + x^3\cdot(-e^{-x}) = (3-x)x^2\cdot e^{-x}$

Oppgave 2

a $$\int_1^2 (x^2+2x-3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 + 1^2 - 3\cdot 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{7}{3}$$

b $$\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$$

Vi ser at $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$, og benytter metoden med delbrøkoppspalting før vi integrerer.

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad | \cdot(x-2)(x+1)$$

$$3x = A(x+1) + B(x-2)$$

$x = 2$ gir $\quad 3\cdot 2 = A(2+1) + B(2-2) \Leftrightarrow 6 = 3A \Leftrightarrow A = 2$

$x = -1$ gir $\quad 3\cdot(-1) = A(-1+1) + B(-1-2) \Leftrightarrow -3 = -3B \Leftrightarrow B = 1$

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln|x-2| + \ln|x+1| + C$$

c $\int x\cdot\ln x\,dx$

$u'\cdot v \qquad u\cdot v \qquad u\cdot v'$

$$\int x\cdot\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Oppgave 3

a $$\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \int e^u\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \int\frac{1}{2}e^u\cdot u'\,dx = \int\frac{1}{2}e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

der $u = x^2$

$u' = 2x$

b $y' + 2xy = 4x \;,\; y(0) = 8$

Dette er en lineær første ordens differensiallikning, og vi finner først den generelle løsningen ved hjelp metoden med integrerende faktor.

$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2+C}$ Vi velger $C = 0$ og får e^{x^2} som integrerende faktor.

$$y' + 2xy = 4x$$

$$y'\cdot e^{x^2} + y\cdot e^{x^2}\cdot 2x = 4x\cdot e^{x^2}$$

$$\left(y\cdot e^{x^2}\right)' = 4x\cdot e^{x^2}$$

$$\int\left(y\cdot e^{x^2}\right)'dx = \int 4x\cdot e^{x^2}\,dx$$

$$y\cdot e^{x^2} + C_1 = 4\int x\cdot e^{x^2}\,dx$$

$$y\cdot e^{x^2} + C_1 = 4\cdot\frac{1}{2}e^{x^2} + C_2$$

$$y = 2 + Ce^{-x^2} \qquad \text{der } C = C_2 - C_1$$

Til slutt bruker vi initalbetingelsen $y(0) = 8$ for å bestemme C.

$$y(0) = 8$$

$$2 + Ce^{-0^2} = 8$$

$$C\cdot 1 = 8 - 2$$

$$C = 6$$

$$y = 2 + 6e^{-x^2}$$

Oppgave 4

a $S(x)=2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ldots\,,\quad x\neq 0$

Rekka er geometrisk og vi ser at $k=\frac{1}{x}$. For at rekka skal konvergere må vi ha at

$$k^2<1$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2<1$$
$$\frac{1}{x^2}<1 \qquad |\cdot x^2 \qquad x^2 \text{ er positiv når } x\neq 0.$$
$$x<-1 \;\vee\; x>1$$

Konvergensområdet til rekka er $\langle\leftarrow,-1\rangle\cup\langle 1,\rightarrow\rangle$.

b $S(x)=\frac{a_1}{1-k}=\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2x}{x-1}$

$$S(x)=4$$
$$\frac{2x}{x-1}=4$$
$$2x=4x-4$$
$$-2x=-4$$
$$x=2$$

Formelen $S(x)=\frac{2x}{x-1}$ forutsetter at rekke er konvergent. 2 er med i konvergensområdet, og derfor kan vi konkludere med at likningen $S(x)=4$ har løsningen $x=2$.

Oppgave 5

a $A=(3,0,0)$, $B=(0,4,0)$ og $C=(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AB}=[0-3,4-0,0-0]=[-3,4,0]$

$\overrightarrow{AC}=[0-3,0-0,1-0]=[-3,0,1]$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[-3,4,0]\times[-3,0,1]=[4\cdot 1-0\cdot 0,\,0\cdot(-3)-(-3)\cdot 1,\,-3\cdot 0-4\cdot(-3)]=[4,3,12]$

(I stedet for å bruke formelen, kan vi bruke skjemaet i læreboka som hjelpemiddel.)

$$F_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|[4,3,12]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2+12^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+9+144}=\frac{1}{2}\sqrt{169}=\frac{13}{2}$$

b En normalvektor for planet α må være parallell med $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Vi velger å bruke $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ som normalvektor for α. Vi benytter i tillegg punktet C for å finne planlikningen.

$$4(x-0)+3(y-0)+12(z-1)=0$$
$$4x+3y+12z-12=0$$

c $\overrightarrow{OP}=\left[t,\frac{t^2}{3},-\frac{t}{4}\right],\quad t\geq 0$

Koordinatene til P er de samme som posisjonsvektorens, og vi setter disse inn i planlikningen for å finne når partikkelen treffer planet.

$$4x+3y+12z-12=0$$
$$4t+3\cdot\frac{t^2}{3}+12\cdot\left(-\frac{t}{4}\right)-12=0$$
$$4t+t^2-3t-12=0$$
$$t^2+t-12=0$$
$$(t+4)(t-3)=0$$
$$t=-4 \;\vee\; t=3$$

Da bare den positive verdien kan brukes treffer partikkelen planet α ved tiden $t=3$.

$$\overrightarrow{OP}=\left[t,\frac{t^2}{3},-\frac{t}{4}\right]=\left[3,\frac{3^2}{3},-\frac{3}{4}\right]=\left[3,3,-\frac{3}{4}\right]$$

Partikkelen treffer α i punktet $\left(3,3,-\frac{3}{4}\right)$.

Oppgave 6

En tallfølge er gitt ved at $a_1=-1$ og $a_{n+1}=a_n+n-1$.

Vi skal bevise ved induksjon at $a_n=\frac{n(n-3)}{2}\,,\quad n\in\mathbb{N}$.

Ifølge definisjonen av tallfølgen er $a_1=-1$. Formelen gir $a_1=\frac{1\cdot(1-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Vi ser at formelen stemmer for $n=1$.

Vi vil vise at antakelsen om at formelen stemmer for a_t leder til at den også stemmer for a_{t+1}.

Det betyr at vi i utregningen nedenfor kan erstatte a_t med $\frac{t(t-3)}{2}$.

$$a_{t+1}=a_t+t-1=\frac{t(t-3)}{2}+\frac{2t}{2}-\frac{2}{2}=\frac{t^2-3t+2t-2}{2}=\frac{t^2-t-2}{2}=\frac{(t+1)(t-2)}{2}=\frac{(t+1)\left((t+1)-3\right)}{2}$$

Vi ser at $a_{t+1}=\frac{(t+1)\left((t+1)-3\right)}{2}$ hvis vi antar at $a_t=\frac{t(t-3)}{2}$.

Vi har vist at formelen stemmer for $n=1$, og vi har vist at antakelsen om at den stemmer for $n=t$ leder til at den også stemmer for $n=t+1$. Da må formelen stemmer for alle $n\in\mathbb{N}$.

Oppgave 7

$f(x) = 3 - 3\cos(1 - x^2)\ ,\quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0\\
3 - 3\cos(1 - x^2) &= 0\\
3 &= 3\cos(1 - x^2)\\
\cos(1 - x^2) &= 1\\
\cos^{-1} 1 &= 0\\
1 - x^2 &= 0 + k\cdot 2\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z}\\
x^2 &= 1 - k\cdot 2\pi x\\
x &= \pm\sqrt{1 - k\cdot 2\pi} \qquad \text{For at } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ må vi ha } k = 0.
\end{aligned}
$$

Nullpunktene til f er -1 og 1.

b $f'(x) = -3\cdot\left(-\sin(1 - x^2)\right)\cdot(1 - x^2)' = 3\sin(1 - x^2)\cdot(-2x) = -6x\sin(1 - x^2)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0\\
-6x\sin(1 - x^2) &= 0\\
-6x = 0 \ &\vee\ \sin(1 - x^2) = 0 \qquad \sin^{-1} 0 = 0\\
x = 0 \ &\vee\ 1 - x^2 = 0 + k\cdot 2\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z}\\
x = 0 \ &\vee\ x^2 = 1 - k\cdot 2\pi \qquad \text{For at } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ må vi ha } k = 0.\\
x = 0 \ &\vee\ x = \pm 1
\end{aligned}
$$

Vi tester med en tilfeldig valgt verdi i hver av de fire aktuelle intervallene.

$f'(-1{,}1) = -6\cdot(-1{,}1)\cdot\sin\left(1 - (-1{,}1)^2\right) = 6{,}6\cdot\sin(-0{,}21) < 0$

$f'(-0{,}9) = -6\cdot(-0{,}9)\cdot\sin\left(1 - (-0{,}9)^2\right) = 5{,}4\sin(0{,}19) > 0$

$f'(0{,}9) = -6\cdot 0{,}9\cdot\sin(1 - 0{,}9^2) = -5{,}4\sin(0{,}19) < 0$

$f'(1{,}1) = -6\cdot 1{,}1\cdot\sin\left(1 - 1{,}1^2\right) = -6{,}6\cdot\sin(-0{,}21) = 6{,}6\sin(0{,}21) > 0$

x - linje	$-\frac{\pi}{2}$		-1		0		1		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		- - -	0	———	0	- - -	0	———	

Vi ser at grafen til f har bunnpunkter for $x = -1$ og for $x = 1$ og toppunkt for $x = 0$.

c Graf (3) har -1, 0 og 1 som ekstremalpunkter, men ikke -1 og 1 som nullpunkter.

Graf (2) har -1 og 1 som nullpunkter og 0 som ekstremalpunkt, men mangler -1 og 1 som ekstremalpunkter.

Graf (1) er grafen til f fordi både nullpunktene, ekstremalpunktene og stigningen passer med det vi fant i oppgave a og b.

Oppgave 8

a $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

b $\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$
$= 1\cdot\cos(2x) = \cos(2x)$

Oppgave 9

$\sin x + \cos x = 1\ ,\quad x \in [0\,,2\pi]$

Venstre side kan skrives om i henhold til formelen $a\sin cx + b\cos cx = A\sin(cx + \varphi)$

$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$

φ skal ligge i samme kvadrant som punktet $(a\,,b)$, altså punktet $(1\,,1)$. Det oppnår vi om vi setter $k = 0$. Det gir $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$
\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= 1\ ,\quad x \in [0\,,2\pi]\\
\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1\\
\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\pi}{4}\\
x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \ &\vee\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\\
x = k\cdot 2\pi \ &\vee\ x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\\
L &= \left\{0\,, \frac{\pi}{2}\,, 2\pi\right\}
\end{aligned}
$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 1

a $v(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$

$v = 26 - 0,08 \cdot s = 26 - 0,08 \cdot 125 = 26 - 10 = 16$

Etter 125 km er farten 16 km/h.

b Vi løser differensiallikningen med CAS i GeoGebra med s som y og t som x.

	CAS
1	LøsODE[y'=26-0.08y,(0,0)]
	≈ $y = -325\,e^{-0.08x} + 325$

$s(t) = 325 - 325e^{-0,08t}$

c Vi fortsetter med CAS.

2	s(t):= 325 - 325 e^(-0.08 t)
	✓ $s(t) := 325 - 325\,e^{-0.08t}$
3	s(1)
	≈ 24.987
4	s(t)=125
	NLøs: $\{t = 6.069\}$
5	0.069*60
	≈ 4.14

Rad 3 viser at Roger den første timen sykler 25 km.

Radene 4 og 5 viser at Roger bruker 6 timer og 4 minutter på å sykle 125 km.

Oppgave 2

a $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,-1)$, $C = (1,1,0)$ og $P = (t, 2t+1, t^2+2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Vi løser oppgaven med CAS i GeoGebra.

	CAS
1	A:=(0,0,0)
	→ $A := (0,0,0)$
2	B:=(1,0,-1)
	→ $B := (1,0,-1)$
3	C:=(1,1,0)
	→ $C := (1,1,0)$
4	P:=(t,2t+1,t²+2)
	→ $P := (t, 2t+1, t^2+2)$
5	V(t):=1/6*|(Vektor[A, B]⊗Vektor[A, C])*Vektor[A, P]|
	→ $V(t) := \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}$

Rad 5 viser uttrykket for volumet av pyramiden.

b

6	V(t)=7/2
	Løs: $\{t = -4, t = 5\}$
7	(t, 2t + 1, t² + 2)
	ByttUt, t=-4: $(-4, -7, 18)$
8	(t, 2t + 1, t² + 2)
	ByttUt, t=5: $(5, 11, 27)$

Vi får to mulige svar for punktet P, og koordinatene vises i radene 7 og 8.

c

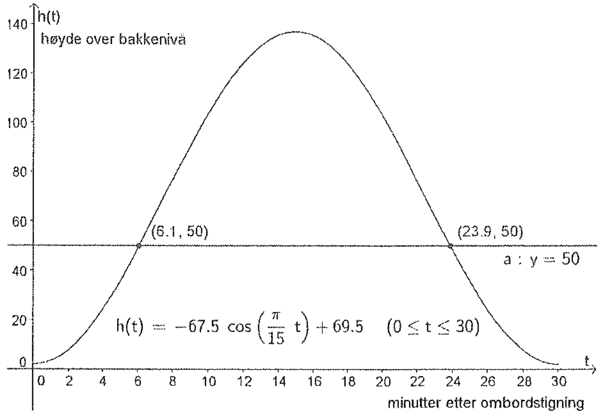
9	FullstendigKvadrat[V(t)]
	→ $\frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$
10	(t, 2t + 1, t² + 2)
	ByttUt, t=1/2: $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{4}\right)$

Siden V er en andregradsfunksjon kan vi skrive $V(t)$ som et fullstendig kvadrat slik vi gjør i rad 9, og da ser vi at $V(t)$ er minst mulig når $t = \frac{1}{2}$.

Koordinatene til P blir da som vist i rad 10.

Oppgave 3

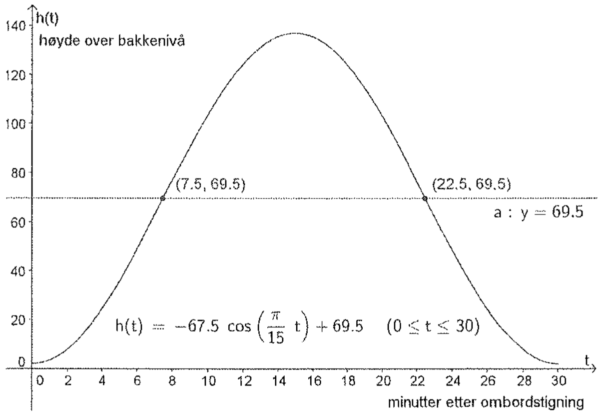
a Vi tegner grafen til h i grafikkfeltet i GeoGebra.



Vi finner koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen til h og linja $y = 50$ med kommandoen Skjæring mellom to objekt.

Passasjerene er 50 m over bakkenivå ca. 6 minutter og ca. 24 minutter etter ombordstigning.

b



Grafen til h beskriver en harmonisk svingning. For en slik graf framkommer vendepunktene som skjæringspunktene mellom grafen og likevektslinja. Vi ser av funksjonsuttrykket at likevektslinja er gitt ved likningen $y = 69,5$.

Skjæringspunktene finner vi med kommandoen Skjæring mellom to objekt.

Vendepunktene på grafen til h er (7,5 , 69,5) og (22,5 , 69,5).

$h'(7,5)$ gir den raskeste stigningen og $h'(22,5)$ gir den raskeste nedstigningen som passasjeren opplever i løpet av runden.

Oppgave 4

a

CAS

1	f(x):=x²+a*x+b $\rightarrow f(x) := x^2 + a\,x + b$
2	g(x):=Tangent[s, f] $\rightarrow g(x) := -s^2 + a\,x + 2\,s\,x + b$
3	h(x):=Tangent[t, f] $\rightarrow h(x) := -t^2 + a\,x + 2\,t\,x + b$

$$g(x) = -s^2 + ax + 2sx + b = ax + 2sx + b - s^2 = (a+2s)x + b - s^2$$
$$h(x) = -t^2 + ax + 2tx + b = ax + 2tx + b - t^2 = (a+2t)x + b - t^2$$

b I skjæringspunktet P er $g(x) = h(x)$, og vi løser likningen for å finne x_p.

4	g(x)=h(x) Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}\,s + \frac{1}{2}\,t\right\}$
5	1 / 2 s + 1 / 2 t Faktoriser: $\frac{s+t}{2}$
6	x_p:=(s + t) / 2 $\checkmark\ x_p := \frac{s+t}{2}$

Vi ser at $x_p = \dfrac{s+t}{2}$.

c

7	IntegralMellom[f, g, s, x_p] $\rightarrow -\frac{1}{24}\,s^3 + \frac{1}{8}\,s^2\,t - \frac{1}{8}\,s\,t^2 + \frac{1}{24}\,t^3$
8	IntegralMellom[f, h, x_p, t] $\rightarrow -\frac{1}{24}\,s^3 + \frac{1}{8}\,s^2\,t - \frac{1}{8}\,s\,t^2 + \frac{1}{24}\,t^3$
9	$7 / $8 $\rightarrow 1$

Vi ser at begge arealene avhenger av s og t, og ingen av dem avhenger av a eller b, og vi ser at arealene er like store.