Løsninger til eksamen i matematikk R2 våren 2016

DELPRØVE 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi bruker at $(\cos t)' = -\sin t)$, og vi bruker kjerneregelen ved at $(5x)' = 5$. Dette gir:

$$f'(x) = \big(2 \cdot \cos(5x)\big)' = 2 \cdot 5 \cdot (-\sin(5x))' = -10 \cdot \sin(5x)$$

b) Vi bruker produktregelen ved derivasjon, den deriverte av sinus og kjerneregelen på e^{-2x}. Dette gir:

$$g'(x) = e^{-2x} \cdot \cos x - 2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x = (\cos x - 2 \cdot \sin x) \cdot e^{-2x}$$

Oppgave 2

a) Vi regner ut som bestemt integral og husker at det ubestemte integralet til $1/x$ er ln-funksjonen. Vi får:

$$\int_1^e \frac{3}{x}\,dx = [3\ln|x|\,]_1^e = 3\ln e - 3\ln 1 = 3 - 0 = 3$$

b) Vi bruker delbrøkoppspalting. Siden $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ blir enkeltnevnerne $(x-1)$ og $(x+1)$. Vi multipliserer med (x^2-1) og får:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad A(x+1) + B(x-1) = 2$$

Vi kan finne A og B ved å regne ut et likningssett eller ved å sette inn $x = \pm 1$. Vi velger det siste og får:

$$x = 1 \text{ gir } 2A = 2 \quad \text{og} \quad x = -1 \text{ gir } -2B = 2. \text{ Da blir: } A = 1 \text{ og } B = -1$$

Dette gir da det ubestemte integralet:

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

Vi kan også ved hjelp av annen logaritmesetning skrive svaret:

$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Oppgave 3

a) Arealet A av flatestykket blir:

$$A = \int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

b) Vi bruker blant annet produktregelen for derivasjon og finner den deriverte D:

$$D = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C\right)' = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\sin x \cdot (-\sin x) + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos x\right)$$

Vi åpner parentesen og bruker enhetsformelen med $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Det gir:

$$D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2} \cdot (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

Dermed er formelen bevist.

c) Volumformelen for omdreiningslegeme gir $V = \pi \cdot \int_0^\pi (\sin^2 x)\,dx$. Dette gir:

$$V = \pi \cdot [(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x)_0^\pi = \pi \cdot \big((\frac{1}{2}) \cdot \pi - 0) - (0 - 0)\big) = \frac{1}{2} \cdot \pi^2$$

Oppgave 4

a) Vi har en geometrisk rekke siden hvert ledd er lik det foregående multiplisert med det konstante tallet $\frac{1}{2}$. Vi bruker formelen for S_n med $a_1 = \frac{1}{2}$ og $k = \frac{1}{2}$. Vi multipliserer tellerne med hverandre og nevnerne med hverandre og får:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{1 - 2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Vi skriver om til brøkeksponenter og bruker produktregelen for potenser:

$$P_(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdots x^{\frac{1}{2^n}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = x^{S_n} = x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

c) Vi har $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) = 1$. Da blir $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x^1 = x$

Oppgave 5

a) Vi løser først likningen $\cos 2x = 0$ generelt. Det gir:

$$2x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Nullpunktene er de løsningene som ligger i definisjonsintervallet $D_f = \langle 0, 2\pi \rangle$. Vi finner dem ved å velge $n = 0$ og $n = 1$ for løsningsskaren med pluss og ved å velge $n = 1$ og $n = 2$ for løsningsskaren med minus. Nullpunktene blir:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}, \quad x = \frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

b) Vi deriverer og får: $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin 2x) = -6 \sin 2x$.

Den deriverte har nullpunkter for $2x = n \cdot \pi \quad \Leftrightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{2}$. I intervallet D_f gir dette x-verdiene: $x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad x = \frac{3\pi}{2}$.

Vi regner ut verdier av den deriverte mellom disse nullpunktene. Det gir:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = -6 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -6 \quad \text{og} \quad f'(\frac{3\pi}{4}) = -6 \sin\frac{3\pi}{2} = 6$$

Videre får vi: $f'(\frac{5\pi}{4}) = -6$ og $f'(\frac{7\pi}{4}) = 6$. På grunnlag av dette tegner vi fortegnslinje for å skille mellom toppunkter og bunnpunkter, og vi regner ut tilhørende funksjonsverdier. Vi får dette resultatet:

$$\text{Toppunkt}: \ (\pi, 3). \qquad \text{Bunnpunkter}: \ (\frac{\pi}{2}, -3) \ \text{og} \ (\frac{3\pi}{2}, -3)$$

c) Du skisserer en bølgefunksjon (lineær harmonisk svingning) med likevektslinje $y = 0$ og amplitude $A = 3$. Vi tegner inn nullpunktene, bunnpunktene og toppunktene. Til hjelp kan vi også tegne inn de randpunktene som ikke er med i D_f: $f(0) = 3$ og $f(2\pi) = 3$.

GeoR2geofil1.ggb inn her

Oppgave 6

Differensiallikningen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ har den integrerende faktoren $I(x) = e^{\int f(x)\,dx}$. Her får vi da: $I(x) = e^{\int(-x)\,dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Videre må vi regne ut integralet $\int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$. Vi gjør dette ved substitusjon med $u = -\frac{1}{2} \cdot x^2$. Dette gir $du = -x \cdot dx$. Vi får da:

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int e^u \cdot (-du) = -e^{-u} + C = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$$

Merk at vi ut fra dette har at $(e^{-\frac{1}{2}x^2})' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Vi løser likningen ved at vi først multipliserer med den integrerende faktoren $I(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Så bruker vi produktregelen "baklengs" på venstre side og deretter integrerer vi hver av sidene. Vi utnytter integrasjonsformelen og derivasjonsformelen som vi kom fram til ovenfor. Dette gir:

$$y' - xy = x$$

$$\Updownarrow \ \text{integrerende faktor } e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot y' - xe^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Updownarrow \ \text{produktregelen "baklengs"}$$

$$(e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot y)' = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Updownarrow \ \text{integrerer}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot y = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$\Updownarrow \ \text{multipliserer med } e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = -1 + C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Vi har at $y(0) = 1$. Det gir at: $1 = -1 + C \cdot e^0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2$.

Løsningen av differensiallikningen med tilleggskravet er: $y = -1 + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Oppgave 7

Vi finner $\overrightarrow{AB} = [3-1, 0-(-4), 5-1] = [2,4,4]$.

Vektoren $\vec{n}_\alpha$ må stå normalt på $\overrightarrow{AB}$ og da blir skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Det gir:

$$[2,4,4] \cdot [k,1,-k] = 0 \;\Rightarrow\; 2k+4+4(-k) = 0 \;\Rightarrow k = 2$$

En normalvektor til planet er da $\vec{n}_\alpha = [2,1,-2]$. Planet går gjennom punktet $A(1,-4,1)$, og likningen for α blir da:

$$2(x-1)+1\cdot(y+4)-2(z-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x+y-2z+4 = 0$$

b) I C er $x = y = 0$, og da gir planlikningen $-2z+4 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 2$.

Da blir punktet C: $(0,0,2)$.

c) Vi tar utgangspunkt i hjørnet A og ser på ABC som grunnflate og O som toppunktet i pyramiden. For volumet av en trekantet pyramide har vi da vektorformelen $V = \frac{1}{6}\cdot|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}|$.

Vi får $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [2,4,4]\times[-1,4,1] = [-12,-6,12]$.

Vi bruker volumformelen og skalarproduktformelen med $\overrightarrow{AO} = [-1,4,-1]$:

$$V = \frac{1}{6}\cdot|[-12,-6,12]\cdot[-1,4,-1]| = \frac{1}{6}\cdot|(12-24-12)| = 4$$

d) Radien OP er en linje l som står normalt på tangentplanet α. Da har den retningsvektor lik normalvektoren til α, det vil si $[2,1,-2]$, og den går gjennom origo. En parameterframstilling for l blir da:

$$\begin{bmatrix} x = & 0+2t \\ y = & 0+\;t \\ z = & 0-2t \end{bmatrix}$$

Punktet P er skjæringspunktet mellom l og planet α. Vi setter uttrykkene fra l inn i planlikningen og får:

$$2(2t)+t-2(-2t)+4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 9t = -4 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{4}{9}$$

Vi setter inn i parameterframstillingen og får koordinatene til P:

$$P: \left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

Oppgave 8

For $n = 1$ har vi påstanden: $P(1): \frac{k-1}{k-1} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$ som er sant.

Vi skriver opp påstanden for verdien n og for verdien $(n+1)$:

$$P(n): \quad \frac{k^n-1}{k-1} = 1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-2}+k^{n-1} \qquad (1)$$

$$P(n+1): \quad \frac{k^{n+1}-1}{k-1} = 1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-1}+k^n \qquad (2)$$

Vi vet at (1) er sann, og vi skal vise at (2) gjelder. Vi starter med høyre side i (2), og skriver den opp slik:

$$\overbrace{1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-2}+k^{n-1}}+k^n$$

Vi vet at (1) er sann. Av (1) har vi derfor at den første delen som er markert, er lik

$$\frac{k^n-1}{k-1}$$

Høyre side av (2) blir da:

$$\frac{k^n-1}{k-1}+k^n = \frac{k^n-1+k^n\cdot(k-1)}{k-1} = \frac{k^n-1+k^{n+1}-k^n}{k-1} = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

Dermed har vi regnet oss fram til venstre side av (2). Vi har vist at dersom (1) er sann, så er (2) sann. Siden formelen også gjelder for $n = 1$ er den generelt gyldig.

DELPRØVE 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi ser først av figuren at $0° < x < 90°$.

Lengden $L_1(x)$ av stigen fra bakken og opp berøringspunktet med gjerdet finner vi av den høyre trekanten:

$$\sin x = \frac{2{,}0}{L_1(x)} \quad \Leftrightarrow \quad L_1(x) = \frac{2}{\sin x}$$

Lengden $L_2(x)$ av stigen fra berøringspunktet og opp til veggen finner vi av den øverste trekanten. Her er den horisontale kateten lik 1,0 m. Vi får da:

$$\cos x = \frac{1{,}0}{L_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad L_2(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Lengden $L(x)$ er summen av $L_1(x)$ og $L_2(x)$ slik at vi har:

$$L(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin x}$$

b) Vi finner $L'(x)$ og setter $L'(x) = 0$. Vi regner i radianer og gjør om til grader til slutt. Ved derivasjonen bruker vi kjerneregelen med henholdsvis $u = \cos x$ og $u = \sin x$ i de to brøkene, og vi bruker derivasjonsformlene:

$$\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Ut fra dette finner vi $L'(x)$, setter $L'(x) = 0$ og kryssmultipliserer i likningen:

$$L'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2\cos x}{\sin^2 x} \;\Leftrightarrow\; \sin^3 x = 2 \cdot \cos^3 x$$

Vi dividerer med $\cos^3 x$ og løser den likningen vi får i tangens:

$$\tan^3 x = 2 \;\Leftrightarrow\; \tan x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \;\Leftrightarrow x = 0{,}8999 = 51{,}6°$$

Setter vi inn i $L(x)$, finner vi verdien 4,16.

Stigen er kortest mulig for $x = 51{,}6°$. Da er stigelengden 4,16 m. Den rekker da H meter oppover veggen. Vi finner H ved å bruke sinus i den store trekanten:

$$H = 4{,}16 \cdot \sin 51{,}6° \text{ m} = 3{,}26 \text{ m}$$

Oppgave 2

a) Likevektslinja er $y_0 = 12{,}5$ og amplituden er $A = 6{,}63$. Laveste verdi for sinus er -1, mens høyeste verdi er 1. Da har vi:

$$D(t)_{min.} = (-1) \cdot 6{,}63 + 12{,}5 = 5{,}83 \quad \text{og} \quad D(t)_{maks.} = 1 \cdot 6{,}63 + 12{,}5 = 19{,}13$$

Den korteste daglengden er 5,83 timer, og den lengste daglengden er 19,13 timer.

b) Figuren viser grafen. Samtidig har vi på figuren tegnet inn linja $y = 14$ for å finne svaret i punkt c.

GeoR2geofil2.ggb inn her

c) Av grafen ser vi at daglengden i Bergen er 14 timer for $x = 94$ (4. april) og for $x = 250$ (7. september).

d) Daglengden vokser raskest når den deriverte har maksimalpunkt, det vil si i det oppstigende vendepunktet. Vi finner $D''(t)$:

$$D'(t) = 6{,}63 \cdot 0{,}0172 \cdot \cos(0{,}0172t - 1{,}39) \Rightarrow D''(t) = -6{,}63 \cdot 0{,}172^2 \sin(0{,}0172t - 1{,}39)$$

Vi skal ha $D''(t) = 0$. Da må $\sin(0{,}0172t - 1{,}39) = 0 \Leftrightarrow 0{,}0172t - 1{,}39 = n \cdot \pi$. Vi ser av grafen at vi skal ha den minste positive løsningen. Daglengden vokser raskest når:

$$0{,}172t - 1{,}39 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1{,}39}{0{,}0172} \approx 81$$

Vi regnet ut den deriverte $D'(t)$ ovenfor. Vi setter $t = 81$ inn i den deriverte:

$$D'(81) = 6{,}63 \cdot 0{,}0172 \cdot \cos(0{,}0172 \cdot 81 - 1{,}39) = 0{,}114 \text{ timer/døgn}$$

Daglengden vokser raskest når $t = 81$ (det vil si 20. mars (vårjamdøgn)). Daglengden vokser da med:

$$0{,}114 \text{ timer/døgn} = 0{,}114 \cdot 60 = 6{,}8 \text{ minutter/døgn}$$

Oppgave 3

a) Vi har brukt CAS med kommandoen "Integralmellom" og deretter faktoriseringskommandoen. Dette framgår av figuren.

GeoR2fil3.ggb

I faktorisert form får vi: $T = -\frac{(a-b)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{6}$

b) I CAS har vi med $c = (a+b)/2$ definert AB som linja $p(x)$, AC som linja $q(x)$ og CB som linja $r(x)$. Vi bruker Integralmellom fra A til B og deretter fra C til B. Vi får to like uttrykk. Oppsettet ser slik ut:

GeoR2fil4.ggb

Vi har faktorisert uttrykkene ved hjelp av CAS, og vi legger dem så sammen. Dette gir:

$$S = -\frac{(a-b)^3}{16} - \frac{(a-b)^3}{16} = -\frac{(a-b)^3}{8} = \frac{(b-a)^3}{8}$$

c) Vi får til slutt forholdet ved å multiplisere med den omvendte brøken:

$$\frac{T}{S} = \frac{(b-a)^3}{6} : \frac{(b-a)^3}{8} = \frac{(b-a)^3}{6} \cdot \frac{8}{(b-a)^3} = \frac{4}{3}$$

Oppgave 4

a) Spredningsfarten y' er proporsjonal med antall som kjenner ryktet, (y), og antallet som ikke kjenner det, $(1200-y)$. Da kan vi skrive y' som en konstant multiplisert med produktet av disse to faktorene. Proporsjonalitetskonstanten skal vi sette til 0,0006. Vi får da denne differensiallikningen med t som avhengig variabel:

$$y' = 0{,}0006 \cdot y \cdot (1200 - y)$$

b) Vi løser dette som en separabel differensiallikning. Underveis får vi bruk for formelen:

$$\int \frac{1}{N \cdot (B-N)}\, dN = \frac{1}{B} \cdot \ln \frac{N}{B-N} + C \qquad (1)$$

Vi viser denne formelen ved delbrøkoppspaltingen:

$$\frac{1}{N \cdot (B-N)} = \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{B-N} \right)$$

Videre bruker vi sammen med annen logaritmesetning at for $0 < N < B$ gjelder:

$$\int \frac{dN}{N} = \ln N + C \quad \text{og at} \quad \int \frac{dN}{B-N} = -\ln(B-N) + C$$

Vi løser differensiallikningen som en separabel differensiallikning med $y' = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}0006 \cdot y \cdot (1200 - y)$$

$\Updownarrow$ Multipliserer med dt og integrerer

$$\int \frac{1}{y \cdot (1200-y)}\, dy = \int 0{,}0006\, dt$$

$\Updownarrow$ Bruker formel (1)

$$\frac{1}{1200} \cdot \ln \frac{y}{1200-y} = 0{,}0006t + C_1$$

$\Updownarrow$ Multipliserer med 1200 og tar $e^{()}$

$$\frac{y}{1200-y} = e^{1200C_1} \cdot e^{0{,}72t}$$

$\Updownarrow$ Multipliserer med$(1200-y)$.Lar $1200C_1 = C$

$$y = 1200 \cdot C \cdot e^{0{,}72t} - C \cdot e^{0{,}72t} \cdot y$$

$\Updownarrow$ Finner y av likningen

$$y = \frac{1200 \cdot C \cdot e^{0{,}72t}}{1 + C \cdot e^{0{,}72t}}$$

Vi har at $y(0) = 1$. Vi bruker det til å finne C. Det gir:

$$1 = \frac{1200C}{1+C} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + C = 1200C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{1199}$$

Vi får da løsningskurven:

$$y = \frac{\frac{1200}{1199} \cdot e^{0,72t}}{1 + \frac{1}{1199} \cdot e^{0,72t}} = \frac{1200 \cdot e^{0,72t}}{1199 + e^{0,72t}}$$

Vi skal ha $y = 600$ (halve bygda). Det gir:

$$\frac{1200 \cdot e^{0,72t}}{1199 + e^{0,72t}} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad e^{0,72t} = 0,5 \cdot (1199 + e^{0,72t})$$

Dette gir:

$$e^{0,72t} = 1199 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 1199}{0,72} = 9,85$$

Det tar nesten 10 dager før halve bygda kjenner ryktet.

NB! Her fins det flere alternative løsningsveier. Vi kan løse på klassisk måte, og så løse likningen grafisk med Geogebra. Men vi kan også bruke "LøsODE" i CAS og deretter løse likningen direkte i CAS ut fra det uttrykket vi har funnet der.