

Eksamen

28.11.2013

REA3026 Matematikk S1

Eksamensinformasjon

Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarar framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet • Syltetøy: (dvortygirl, Flickr CC-BY-SA-2.0)

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgave 1 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem $f'(2)$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Løys likningane

a) $x(x+5) - 10 = 4$

b) $10^{3x} - 100000 = 0$

Oppgave 3 (2 poeng)

Løys likningssettet ved rekning

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y + x^2 = 4 \end{cases}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Ei rørsle skjer langs ei rett linje. Startfarten var v_0 , og akselerasjonen er konstant lik a . Etter tida t er farten v blitt $v = v_0 + at$.

a) Bestem ein formel for t uttrykt ved v , v_0 og a .

b) Kor lang tid tek det før farten v er blitt 25 når akselerasjonen $a = 3$ og startfarten $v_0 = 1$?

Oppgave 5 (4 poeng)

a) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{9^2 \cdot a^2 \cdot b^3}{(3ab^2)^2}$$

b) Vis at

$$\lg\left(\frac{a^2}{b^2}\right) + \lg\left(\frac{b^2}{a}\right) + \lg(a+b) = \lg(a^2+ab)$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Løys ulikskapen

$$x^2 + 2x \geq x + 6$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Figuren nedanfor viser eit utsnitt av tre påfølgjande rader av Pascals taltrekant.

	21	x		
		y	2x	
		126		

Bruk figuren til å bestemme x og y ved å setje opp og løyse eit likningssystem.

Oppgave 8 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

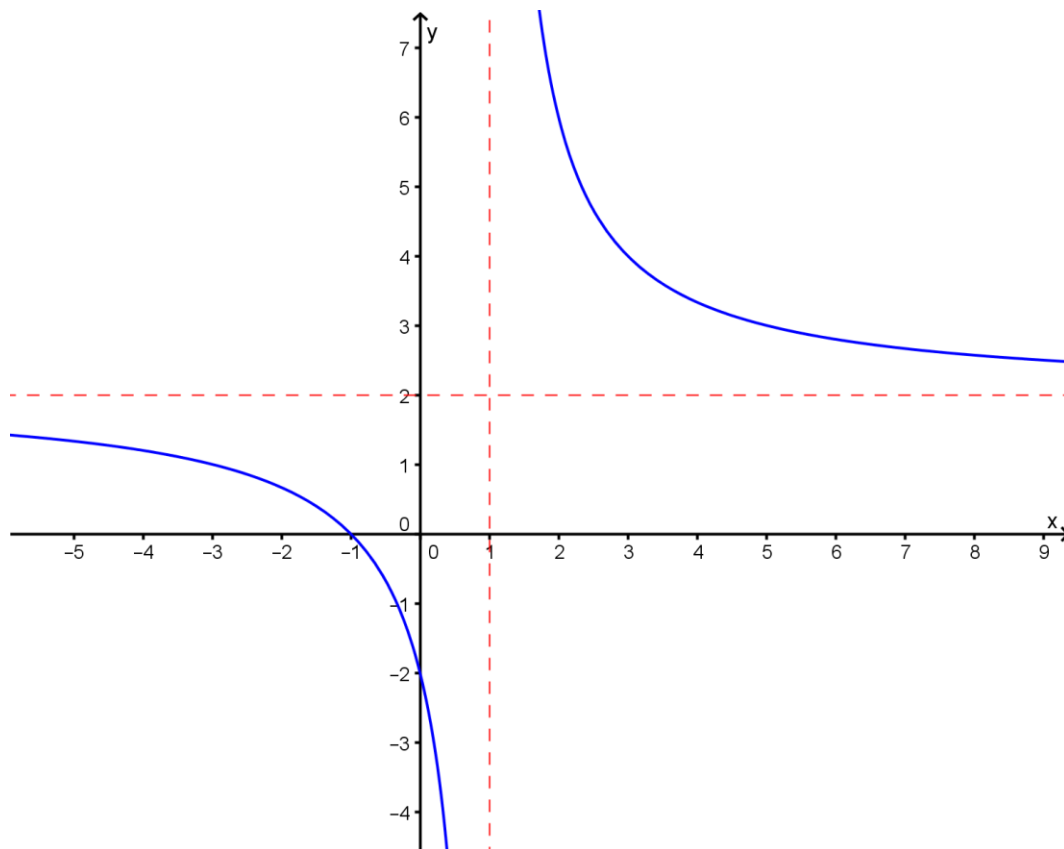
a) Bestem nullpunktene til f .

b) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f .

c) Lag ei skisse av grafen til f .

Oppgave 9 (2 poeng)

Grafen til funksjonen $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ er teikna nedanfor.



Bruk figuren til å bestemme verdiane til a , b og c .

Oppgave 10 (1 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 2x$.

DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

I ei eske ligg 50 lyspærer. Av dei er 7 defekte.

Du vel tilfeldig ut 10 lyspærer frå eska.

- a) Bestem sannsynet for at akkurat 2 av lyspærene er defekte.
- b) Bestem sannsynet for at du vel ut minst 3 defekte lyspærer.

Oppgåve 2 (5 poeng)

Ein fabrikk produserer lyspærer. Fabrikken garanterer at det er 75 % sannsyn for at ei lyspære vil lyse i 1000 h (timar).

Ein kunde kjøper 20 slike lyspærer.

- a) Bestem sannsynet for at akkurat 18 lyspærer lyser når det er gått 1000 h.
- b) Bestem sannsynet for at minst 15 lyspærer lyser i 1000 h.

Kunden ønskjer at det skal vere eit sannsyn på 95 % eller meir for at minst 15 av 20 lyspærer framleis lyser når det er gått 1000 h.

- c) Bestem kva for sannsyn kvar lyspære da må ha for å lyse i 1000 h.

Oppgåve 3 (2 poeng)

Vi har gitt likninga

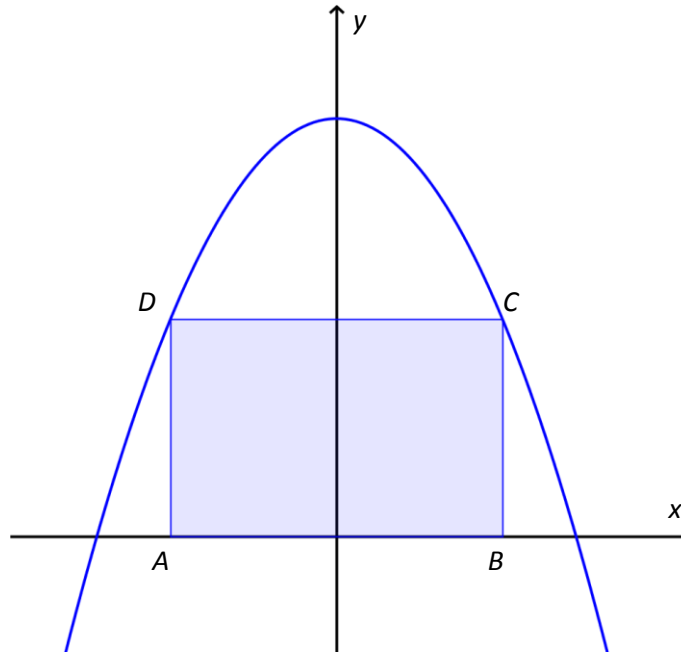
$$900 \cdot 1,10^x = 1500 \cdot k^x$$

Bestem k slik at $x = 10$ er ei løysing av likninga.

Oppgave 4 (8 poeng)

Figuren viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$



Under grafen og over x-aksen er det skrive inn eit rektangel $ABCD$ slik figuren viser. Punkta A og B ligg på x-aksen, og C og D ligg på grafen. Punktet B har førstekoordinaten x , der $x > 0$.

- a) Forklar at arealet F av rektangelet kan skrivast som ein funksjon av x gitt ved

$$F(x) = 12x - x^3$$

Bestem D_F .

- b) Det finst to verdiar av x som gjer at arealet av rektangelet blir lik 9. Bestem desse to verdiane.
- c) Bestem den verdien av x som gjer at arealet av rektangelet blir størst mogleg. Kva blir det største arealet?
- d) Bestem eit uttrykk for omkretsen av rektangelet. Bestem den verdien av x som gjer at omkretsen av rektangelet blir størst mogleg. Kommenter svaret.

Oppgave 5 (2 poeng)

- a) Avgjør om implikasjonen nedanfor er riktig.

$$x^2 < 4 \Rightarrow x > -2$$

- b) Avgjør om den motsette implikasjonen er riktig.

Oppgave 6 (8 poeng)

Eit bakeri lagar x kaker per dag, i tillegg til andre bakarvarer. Bakeriet har funne ut at dei totale kostnadene $K(x)$ i kroner ved kakeproduksjonen avheng av talet på kaker, slik tabellen viser.

Kaker x	0	50	90	150	180	250
Totale kostnader $K(x)$	0	900	1000	1100	1500	4400

- a) Bruk regresjon til å bestemme ein polynomfunksjon av tredje grad som passar best mogleg med tala i tabellen.

I resten av oppgåva vil vi bruke kostnadsfunksjonen K gitt ved

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 30x, \quad x \in [0, 250]$$

Bakeriet sel alle kakene for 15 kroner per stykk. Inntektsfunksjonen I er da gitt ved

$$I(x) = 15x$$

- b) Teikn grafane til K og I i same koordinatsystem.
Bestem kva for produksjonsmengder som gir overskot, og kva for mengder som gir underskot.
- c) Bruk derivasjon til å bestemme kor mange kaker som bør produserast dersom overskotet skal bli størst mogleg.

Kva er det største overskotet bakeriet kan oppnå per dag når vi berre ser på kakeproduksjonen?

Som eit ekstra tilbod til kundane vurderer bakeriet å setje ned prisen per kake.

- d) La prisen per kake vere p kroner. Bestem den minste verdien p kan ha dersom det skal vere mogleg å oppnå balanse mellom kostnader og inntekter.

Kor mange kaker bør lagast og seljast per dag når p har denne verdien?

Oppgave 7 (7 poeng)

Silje lagar to typar syltetøy.

Type 1 inneheld 90 % bær og 10 % sukker.

Type 2 inneheld 40 % bær og 60 % sukker.

Syltetøyet skal fyllast på glas, og eit fullt glas skal innehalde 1 kg syltetøy.

Ho har 20 kg bær og 5 kg sukker som ho skal lage syltetøy av.

a) Kor mange glas av kvar type må ho lage for å få brukt opp 20 kg bær og 5 kg sukker?

b) Ho kan selje syltetøyet av type 1 for 80 kroner per glas og syltetøyet av type 2 for 40 kroner per glas. Kva inntekt får ho i dette tilfellet?

Forklar ved å bruke lineær optimering at dette er den største inntekta ho kan oppnå.

Helsemyndigheitene foreslår å auke sukkerprisen slik at syltetøy av type 2 blir dyrast.

c) Når Silje skal lage meir syltetøy, kjøper ho bær for 30 kroner per kilogram. Det skal koste 5 kroner meir per glas å lage syltetøy av type 2 enn av type 1.

Undersøk kva prisen per kilogram sukker da må vere.



Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet • Syltetøy: (dvortygirl, Flickr CC-BY-SA-2.0)

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem $f'(2)$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Løs likningene

a) $x(x+5) - 10 = 4$

b) $10^{3x} - 100000 = 0$

Oppgave 3 (2 poeng)

Løs likningssettet ved regning

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y + x^2 = 4 \end{cases}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

En bevegelse foregår langs en rett linje. Startfarten var v_0 , og akselerasjonen er konstant lik a . Etter tida t er farten v blitt $v = v_0 + at$.

a) Bestem en formel for t uttrykt ved v , v_0 og a .

b) Hvor lang tid tar det før farten v er blitt 25 når akselerasjonen $a = 3$ og startfarten $v_0 = 1$?

Oppgave 5 (4 poeng)

a) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{9^2 \cdot a^2 \cdot b^3}{(3ab^2)^2}$$

b) Vis at

$$\lg\left(\frac{a^2}{b^2}\right) + \lg\left(\frac{b^2}{a}\right) + \lg(a+b) = \lg(a^2+ab)$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Løs ulikheten

$$x^2 + 2x \geq x + 6$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Figuren nedenfor viser et utsnitt av tre påfølgende rader av Pascals talltrekant.

		21	x		
			y	2x	
			126		

Bruk figuren til å bestemme x og y ved å sette opp og løse et likningssystem.

Oppgave 8 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

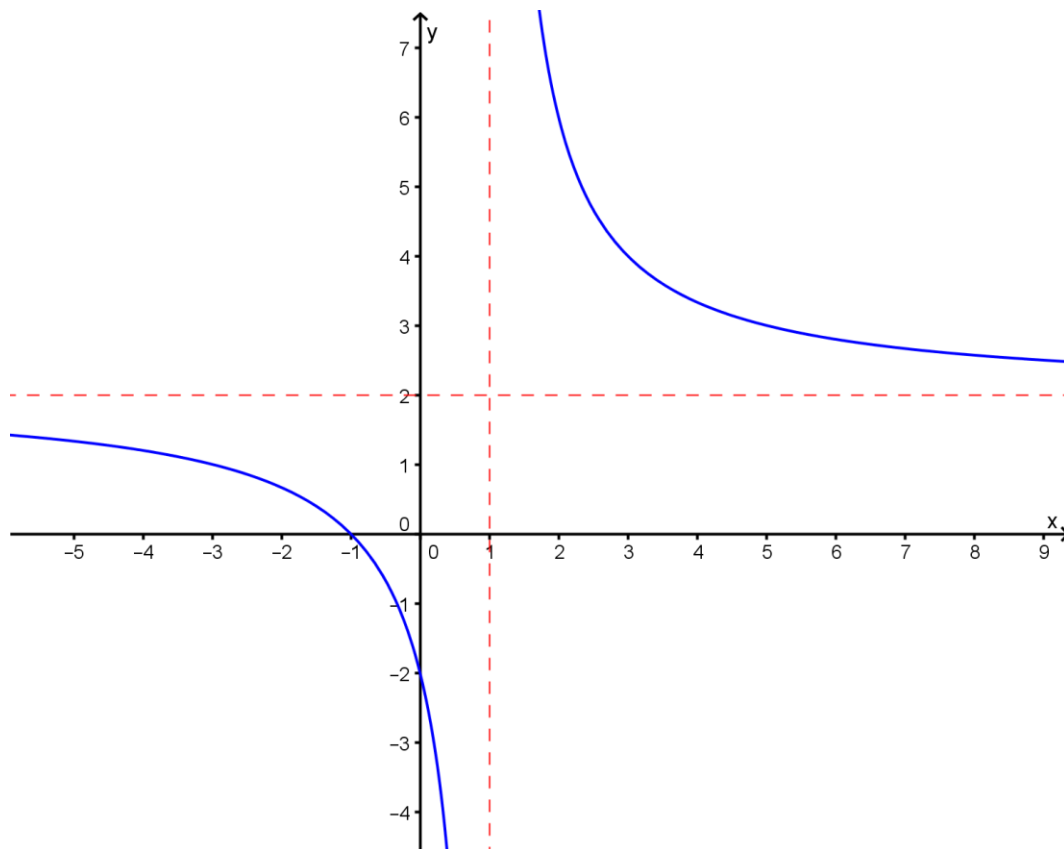
a) Bestem nullpunktene til f .

b) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

c) Lag en skisse av grafen til f .

Oppgave 9 (2 poeng)

Grafen til funksjonen $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ er tegnet nedenfor.



Bruk figuren til å bestemme verdiene til a , b og c .

Oppgave 10 (1 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 2x$.

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

I en eske ligger 50 lyspærer. Av disse er 7 defekte.

Du velger tilfeldig ut 10 lyspærer fra esken.

- a) Bestem sannsynligheten for at akkurat 2 av lyspærene er defekte.
- b) Bestem sannsynligheten for at du velger ut minst 3 defekte lyspærer.

Oppgave 2 (5 poeng)

En fabrikk produserer lyspærer. Fabrikken garanterer at det er 75 % sannsynlighet for at en lyspære vil lyse i 1000 h (timer).

En kunde kjøper 20 slike lyspærer.

- a) Bestem sannsynligheten for at akkurat 18 lyspærer lyser når det er gått 1000 h.
- b) Bestem sannsynligheten for at minst 15 lyspærer lyser i 1000 h.

Kunden ønsker at det skal være en sannsynlighet på 95 % eller mer for at minst 15 av 20 lyspærer fremdeles lyser når det er gått 1000 h.

- c) Bestem hvilken sannsynlighet hver lyspære da må ha for å lyse i 1000 h.

Oppgave 3 (2 poeng)

Vi har gitt likningen

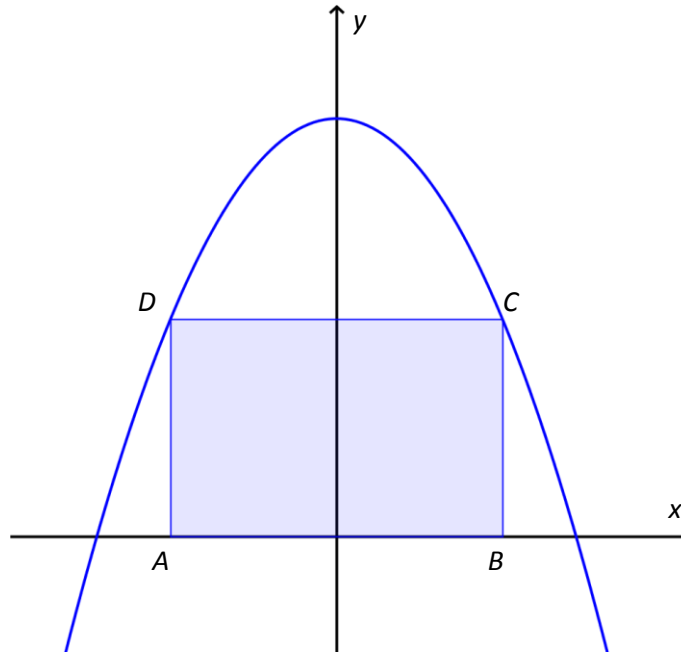
$$900 \cdot 1,10^x = 1500 \cdot k^x$$

Bestem k slik at $x = 10$ er en løsning av likningen.

Oppgave 4 (8 poeng)

Figuren viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$



Under grafen og over x-aksen er det skrevet inn et rektangel $ABCD$ slik figuren viser. Punktene A og B ligger på x-aksen, og C og D ligger på grafen. Punktet B har førstekoordinaten x , der $x > 0$.

- a) Forklar at arealet F av rektangelet kan skrives som en funksjon av x gitt ved

$$F(x) = 12x - x^3$$

Bestem D_F .

- b) Det fins to verdier av x som gjør at arealet av rektangelet blir lik 9. Bestem disse to verdiene.
- c) Bestem den verdien av x som gjør at arealet av rektangelet blir størst mulig. Hva blir det største arealet?
- d) Bestem et uttrykk for omkretsen av rektangelet. Bestem den verdien av x som gjør at omkretsen av rektangelet blir størst mulig. Kommenter svaret.

Oppgave 5 (2 poeng)

- a) Avgjør om implikasjonen nedenfor er riktig.

$$x^2 < 4 \Rightarrow x > -2$$

- b) Avgjør om den motsatte implikasjonen er riktig.

Oppgave 6 (8 poeng)

Et bakeri lager x kaker per dag, i tillegg til andre bakervarer. Bakeriet har funnet ut at de totale kostnadene $K(x)$ i kroner ved kakeproduksjonen avhenger av antall kaker, slik tabellen viser.

Antall kaker x	0	50	90	150	180	250
Totale kostnader $K(x)$	0	900	1000	1100	1500	4400

- a) Bruk regresjon til å bestemme en polynomfunksjon av tredje grad som passer best mulig med tallene i tabellen.

I resten av oppgaven vil vi bruke kostnadsfunksjonen K gitt ved

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 30x, \quad x \in [0, 250]$$

Bakeriet selger alle kakene for 15 kroner per stykk. Inntektsfunksjonen I er da gitt ved

$$I(x) = 15x$$

- b) Tegn grafene til K og I i samme koordinatsystem.
Bestem hvilke produksjonsmengder som gir overskudd, og hvilke som gir underskudd.
- c) Bruk derivasjon til å bestemme hvor mange kaker som bør produseres dersom overskuddet skal bli størst mulig.

Hva er det største overskuddet bakeriet kan oppnå per dag når vi bare ser på kakeproduksjonen?

Som et ekstra tilbud til kundene vurderer bakeriet å sette ned prisen per kake.

- d) La prisen per kake være p kroner. Bestem den minste verdien p kan ha dersom det skal være mulig å oppnå balanse mellom kostnader og inntekter.

Hvor mange kaker bør lages og selges per dag når p har denne verdien?

Oppgave 7 (7 poeng)

Silje lager to typer syltetøy.

Type 1 inneholder 90 % bær og 10 % sukker.

Type 2 inneholder 40 % bær og 60 % sukker.

Syltetøyet skal fylles på glass, og et fullt glass skal inneholde 1 kg syltetøy.

Hun har 20 kg bær og 5 kg sukker som hun skal lage syltetøy av.

a) Hvor mange glass av hver type må hun lage for å få brukt opp 20 kg bær og 5 kg sukker?

b) Hun kan selge syltetøyet av type 1 for 80 kroner per glass og syltetøyet av type 2 for 40 kroner per glass. Hvilken inntekt får hun i dette tilfellet?

Forklar ved å bruke lineær optimering at dette er den største inntekten hun kan oppnå.

Helsemyndighetene foreslår å øke sukkerprisen slik at syltetøy av type 2 blir dyrest.

c) Når Silje skal lage mer syltetøy, kjøper hun bær for 30 kroner per kilogram. Det skal koste 5 kroner mer per glass å lage syltetøy av type 2 enn av type 1.

Undersøk hva prisen per kilogram sukker da må være.



Blank side.

Blank side.



Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no