S1 EKSAMEN VÅR 2013 LØSNING

Oppgave 1 a)

$$2\cdot \lg x + 3 = 5$$
$$2\cdot \lg x = 5-3$$
$$\frac{\cancel{2}\cdot \lg x}{\cancel{2}} = \frac{2}{2}$$
$$\lg x = 1$$
$$10^{\lg x} = 10^1$$
$$\underline{\underline{x = 10}}$$

b)

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$
$$2(x^2 + x - 6) = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$a=1,\ b=1,\ c=-6$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$
$$x = \frac{-1+5}{2} \lor x = \frac{-1-5}{2}$$
$$\underline{\underline{x = 2}} \lor \underline{\underline{x = -3}}$$

Oppgave 2

$$\begin{bmatrix} y = 6 - x^2 \\ y + 4 = -3x \end{bmatrix}$$

Setter inn:

$$6 - x^2 + 4 = -3x$$
$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$
$$a=-1,\ b=3,\ c=10$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}}{2 \cdot -1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{-2}$$

$$x = \frac{-3 + 7}{-2} \quad \vee \quad x = \frac{-3 - 7}{-2}$$

$$\underline{\underline{x = -2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = 5}}$$

$$x = -2: \quad y = 6 - (-2)^2 = 6 - 4 = \underline{2}$$

$$x = 5: \quad y = 6 - (5^2) = 6 - 25 = \underline{-19}$$

$$\underline{\underline{x = 2 \wedge y = 2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = 5 \wedge y = -19}}$$

Oppgave 3 a) $\frac{2^{-3} \cdot a^0 \cdot (a \cdot b)^2}{2^{-4} \cdot a^{-1} \cdot b^2} = 2^{-3+4} \cdot a^{0+2+1} \cdot b^{2-2} = 2^1 \cdot a^3 \cdot b^0 =$

$$\underline{\underline{2a^3}}$$

b) $\lg (a \cdot b)^2 - \lg \left(\frac{a^3}{b^2}\right) + \lg (a \cdot b^2)$

$= \lg a^2 + \lg b^2 - (\lg a^3 - \lg b^2) + \lg a + \lg b^2$

$= \lg a^2 + \lg b^2 - \lg a^3 + \lg b^2 + \lg a + \lg b^2$

$= 2 \cdot \cancel{\lg a} - 3 \cdot \cancel{\lg a} + \lg \cancel{a} + 2 \cdot \lg b + 2 \cdot \lg b + 2 \cdot \lg b$

$= 6 \cdot \lg b = \underline{\underline{\lg b^6}}$

Opgave 4 $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

a) Nullpunkt: $f(x)=0$ når $3x-1=0$

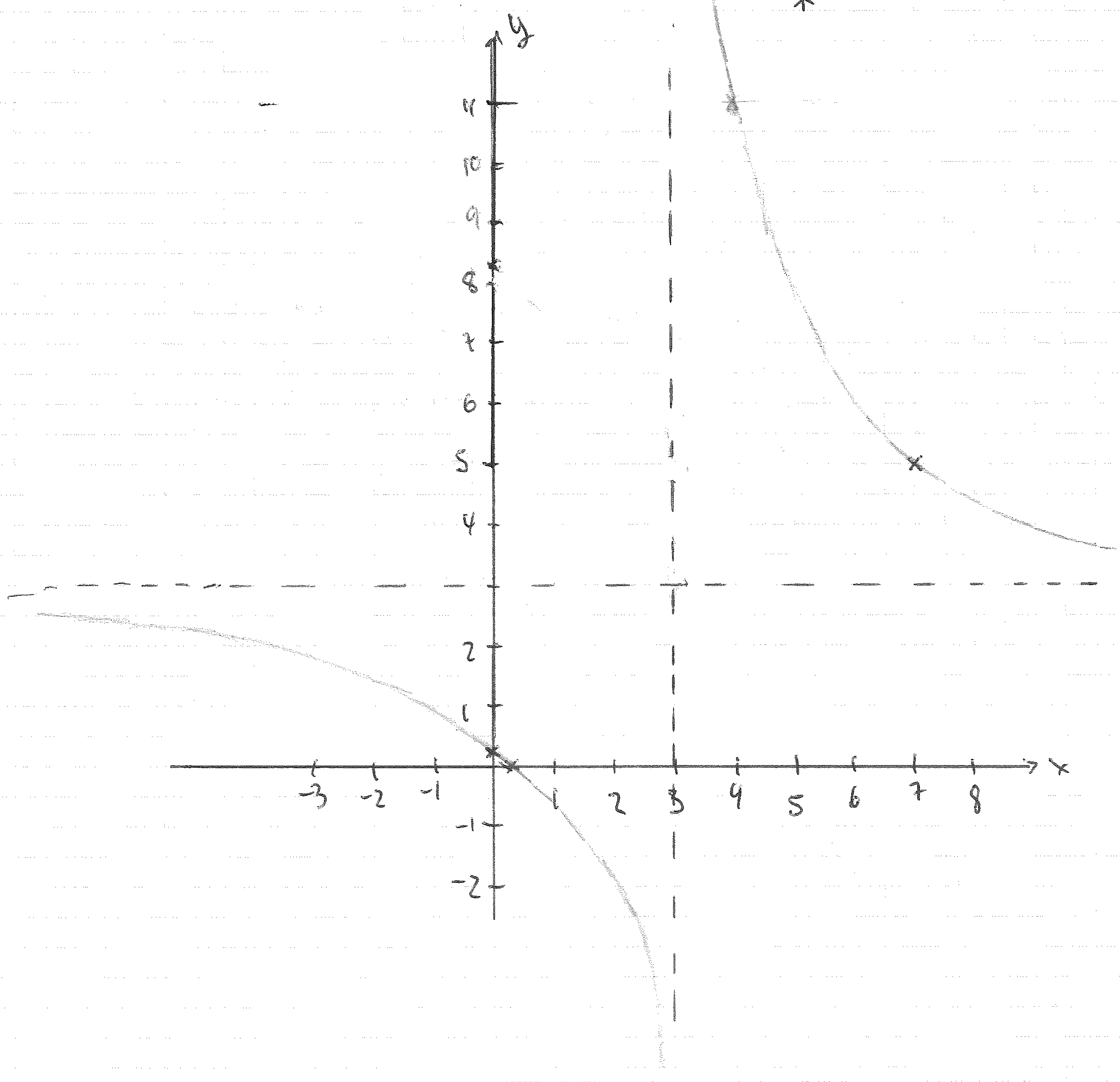
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}}$$

Skjæring med y-akse: $f(0) = \frac{3\cdot 0-1}{0-3} = \frac{-1}{-3} = \underline{\frac{1}{3}}$

Vertikal asymptote: Nevner $=0$ når $\underline{x=3}$

Horisontal asymptote: $x \to \infty$, $f(x) \to \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = \underline{3}$



b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 11}{7 - 4} = \frac{-6}{3} = \underline{-2}$

$f(x_2) = f(7) = \frac{3 \cdot 7 - 1}{7 - \cancel{3}} = \frac{21 - 1}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$f(x_1) = f(4) = \frac{3 \cdot 4 - 1}{4 - 3} = \frac{12 - 1}{1} = \frac{11}{1} = 11$

<u>Gjennomsnittlig vekstfhastighet fra x=4 til x=7 er -2</u>

Oppgave 5 a)

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

b) $\binom{2}{0} = 1$

$\binom{3}{1} = 3$

$\binom{5}{2} = 10$

$\binom{8}{3} = 56$

c)

	GUTT	JENTE	I ALT
I ALT	3	5	8
TREKKER	1	2	3

A: Vi trekker en gutt:

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3\cdot 10}{56} = \frac{30}{56} = \underline{\underline{\frac{15}{28}}}$$

d) Leser ut fra 9. rad i Pascals trekant; og finner at

$$28 = \binom{8}{2} \text{ og } 28 = \binom{8}{6}$$

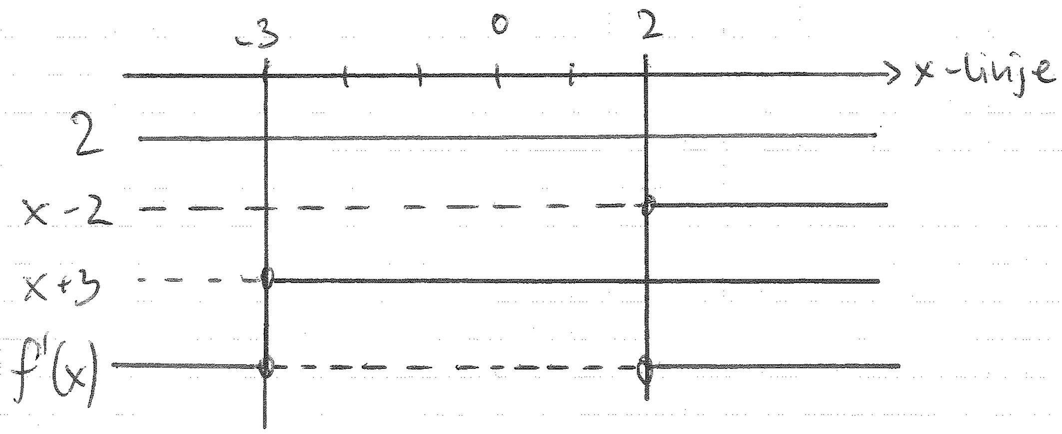
<u>Det kan være enten 2 eller 6 elever i komiteen</u>

Oppgave 6 a) $f'(x) = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^2 + 2\cdot x - 12\cdot 1$

$$f'(x) = \underline{2x^2 + 2x - 12}$$

b) $f'(x) = 0$. Vi faktoriserer $f'(x)$:

$$2(x^2 + x - 6) = \underline{2(x-2)(x+3)} \quad (\text{løst i 1b})$$



Grafen stiger for $x \in \langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$

Grafen synker for $x \in \langle -3, 2 \rangle$

Oppgave 7. Vet at strekning = fart · tid, så derfor er

$v \cdot t = 120$ for tog A.

Farten til tog B: 20 km/h ~~raskere~~ større enn A $= v + 20$

Tiden brukt av tog B: 1 time kortere enn A $= t - 1$

Dermed får vi:

$(v+20)\cdot(t-1) = 120$ for tog B

Setter $v = \frac{120}{t}$ inn i uttrykket for tog B:

$$\left(\frac{120}{t} + 20\right)\cdot(t-1) = 120 \quad | \cdot t$$

$$\left(\cancel{t}\cdot\frac{120}{\cancel{t}} + 20\cdot t\right)\cdot(t-1) = 120t$$

$$\cancel{120t} - 120 + 20t^2 - 20t - \cancel{120t} = 0$$

$$20t^2 - 20t - 120 = 0 \quad |:20$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$a=1,\ b=-1,\ c=-6:$

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$t = \frac{1+5}{2} \quad \vee \quad t = \frac{1-5}{2}$$

$\underline{t=3} \vee \underline{t=-2}$

$t=-2$ er ingen løsning fordi $t>0$ (t = tid)

$t=3$ gir $v = \frac{120}{3} = \underline{40}$ og $v+20 = 40+20 = \underline{60}$

Tog A har gjennomsnittshastighet lik 40km/t

Tog B har gjennomsnittshastighet lik 60km/t.

DEL 2

Oppgave 1 a) Binomisk sannsynlighet.

$p = 0.80$ $n = 70$ A: Eplet kan selges til vanlig forbruk.

$$P(X=60) = \binom{70}{60} \cdot 0.80^{60} \cdot 0.20^{10} = \underline{0.062}$$

Sannsynligheten er 0,062 for at 60 epler kan selges til vanlig forbruk.

b) $P(X \geq 60)$. Løst i GeoGebra, se utskrift.

c) Hypergeometrisk sannsynlighet.

	SORT A	SORT B	I ALT
I ALT	80	100	180
TREKKER	10	10	20

$$P(X=10) = \frac{\binom{80}{10} \cdot \binom{100}{10}}{\binom{180}{20}} = 0.163$$

Sannsynligheten er 0,163 for at kunden får 10 epler av hver sort.

Oppgave 2 a) Se utskrift.

b) $x = 3.8$, setter inn i $p(x)$:

$$p(3.8) = 1020 \cdot 0.89^{3.8} = 655$$

Lufttrykket ved Titicacasjøen er 655 hPa

c) $p(x) = 700$

Løser:

$$\frac{\cancel{1020} \cdot 0.89^x}{\cancel{1020}} = \frac{700}{1020}$$

$$0.89^x = 0.686$$

$$\lg 0.89^x = \lg 0.686$$

$$\frac{x \cdot \cancel{\lg 0.89}}{\cancel{\lg 0.89}} = \frac{\lg 0.686}{\lg 0.89}$$

$$x = 3.23$$

Vi er ca. 3,2 km over havet når lufttrykket er 700 hPa

Oppgave 3 a) Se utskrift

b) Skjæring med x-aksen (nullpunkter):

$$f(x) = 0:$$
$$x^4 - 4x^2 = 0$$
$$x^2(x^2-4) = 0$$

$$x^2 = 0 \lor x^2 - 4 = 0$$

$$\underline{x=0} \lor \underline{x=2} \lor \underline{x=-2}$$

<u>Skjæringspunktene med x-aksen er (0,0), (-2,0) og (2,0)</u>

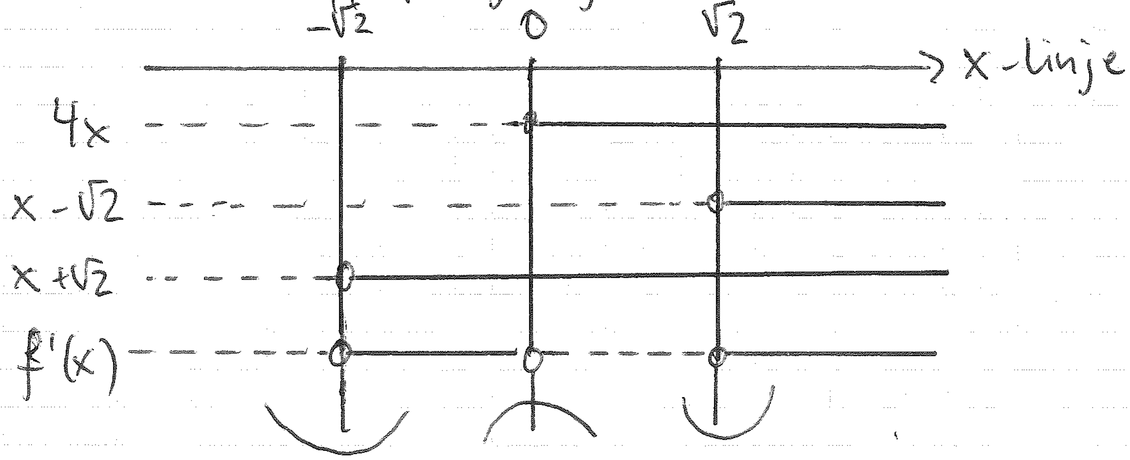
b) Skjæring med y-aksen:

$$f(0) = \underline{0}$$

<u>Skjæringspunktet med y-aksen er (0,0)</u>

c) $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Setter opp fortegnsskjema:



<u>f stiger når $x \in \langle -\sqrt{2}, 0\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \rightarrow \rangle$</u>

<u>f synker når $x \in \langle \leftarrow, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{2}\rangle$</u>

Toppunkt for $x=0$: $f(0)=0$.

Bunnpunkt for $x=-\sqrt{2}$: $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^4-4\cdot(\sqrt{2})^2=2^2-4\cdot2=\underline{-4}$

Bunnpunkt for $x=\sqrt{2}$: $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-4(\sqrt{2})^2=2^2-4\cdot2=\underline{-4}$

<u>Toppunktet til f er (0,0)</u>

<u>Bunnpunktene til f er $(-\sqrt{2},4)$ og $(\sqrt{2},4)$</u>

d) For at grafen til g skal gå gjennom bunnpunktene på grafen til f må $g(x)=f(x)$ når $x=-\sqrt{2}$ og $x=\sqrt{2}$ (fordi det er x-verdien til bunnpunktene til f).

Setter

$$g(-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})$$

$$a\cdot(\sqrt{2})^2=-4$$

$$\frac{a\cdot\cancel{2}}{2}=\frac{-4}{2}$$

$$\underline{a=-2}$$

Kontrollerer:

$$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$$

$$a\cdot(\sqrt{2})^2=-4$$

$$\frac{a\cdot\cancel{2}}{2}=\frac{-4}{2}$$

$$\underline{a=-2}$$

<u>$a=-2$, så $g(x)=-2x^2$</u>

e) Se utskrift.

Opegave 4 a)

	(x) GODLAKS	(y) GLADLAKS	GRENSE
STOFF A	300kg	600kg	20 000 kg
STOFF B	700kg	400kg	18 000 kg
PRODUKSJON	x	y	35 000 kg

* $x \geq 0$ og $y \geq 0$ fordi bedriften enten produserer noe, eller ingenting.

* $\frac{300x}{1000} + \frac{600y}{1000} \leq \frac{20\cancel{000}}{\cancel{1000}}$

  $\underline{0{,}3x + 0{,}6y \leq 20}$ (Målt i tonn)

* $\frac{700x}{1000} + \frac{400y}{1000} \leq \frac{18\cancel{000}}{\cancel{1000}}$

  $\underline{0{,}7x + 0{,}4y \leq 18}$ (Målt i tonn)

* $\underline{x + y \leq 35}$ (Målt i tonn)

Se utskrift for koordinatsystem.

b) Inntektsuttrykk:

$$z = 5000x + 8800y$$

Se utskrift for løsning.

Oppgave 5 a) Kostnader = $f(x) = 55 + 0{,}01x^2$

$$f(x) \le 200$$

$$55 + 0{,}01x^2 \le 200$$

$$0{,}01x^2 \le 200 - 55$$

$$\frac{\cancel{0{,}01}x^2}{\cancel{0{,}01}} \le \frac{145}{0{,}01}$$

$$x^2 \le 14500$$

Siden $x \ge 0$ (oppgaven handler om produksjon), er

$$x \le \sqrt{14500}$$

$$x \le 120{,}4$$

<u>Bedriften kan høyst produsere 120 enheter</u>

(Oppgaven kan også løses grafisk)

b) Se uttrykk for hvilke produksjonsmengder som gir overskudd.

$O(x) =$ Overskudd = Inntekt − Kostnad = $g(x) - f(x)$

$$= 1{,}6x - (55 + 0{,}01x^2)$$

$$= 1{,}6x - 55 - 0{,}01x^2$$

$$= -0{,}01x^2 + 1{,}6x - 55$$

$$O'(x) = -0{,}02x + 1{,}6$$

$$O'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-0{,}02}x}{\cancel{-0{,}02}} = \frac{-1{,}6}{-0{,}02}$$

$$\underline{x = 80}$$

Bedriften har størst overskudd når den produserer 80 enheter

$O(80) = -0.01 \cdot 80^2 + 1.6 \cdot 80 - 55 = 9$

Da er overskuddet lik 9

c) Når h tangerer grafen til f, så er inntekt lik kostnad. I tillegg øker inntekten like mye som kostnaden (fordi vekstfarten til f er lik stigningstallet til tangenten (h)). Da vil det være balanse mellom kostnad og inntekt

d) Dersom $p < f'(a)$ så øker kostnadene mer enn inntektene og vi har ikke balanse.
Dersom $p > f'(a)$ har vi balanse, men inntektene øker mer enn kostnadene så p kan settes lavere.
Derfor er minstepris $p = f'(a)$

(p er stigningstallet til h (tangenten til f) og dermed lik $f'(a)$ når h er tangenten til f)

$f'(a) = 1{,}48 \qquad f'(x) = 0.02x$

Setter $x = a$ og får

$$\frac{\cancel{0.02}x}{\cancel{0.02}} = \frac{1{,}48}{0.02}$$

$$\underline{x = 74}$$

Det produseres og selges 74 enheter når prisen er minst.

e) $0.01x^2 - px + 55 = 0$

$a = 0.01$, $b = -p$, $c = 55$

$$x = \frac{-(-p) \pm \sqrt{(-p)^2 - 4 \cdot 0.01 \cdot 55}}{2 \cdot 0{,}01}$$

Denne likningen har én løsning når uttrykket under rottegnet $= 0$. Løser derfor:

$$(-p)^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 55 = 0$$

$$p^2 - 2{,}2 = 0$$

$$p^2 = 2.2$$

$$p = \sqrt{2{,}2}$$

$$\underline{\underline{p \approx 1{,}48}}$$

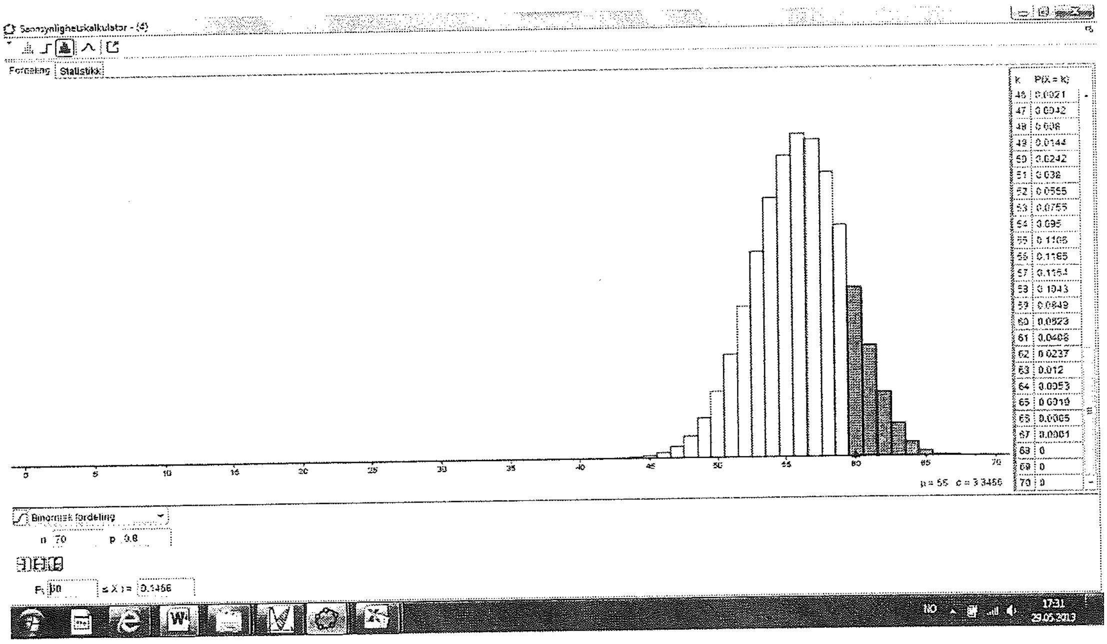
Dersom $p < 1{,}48$ er det ikke balanse (kostnad > inntekt)

og dersom $p > 1{,}48$ vil prisen kunne settes lavere og likevel

ha balanse.

Oppgave 1

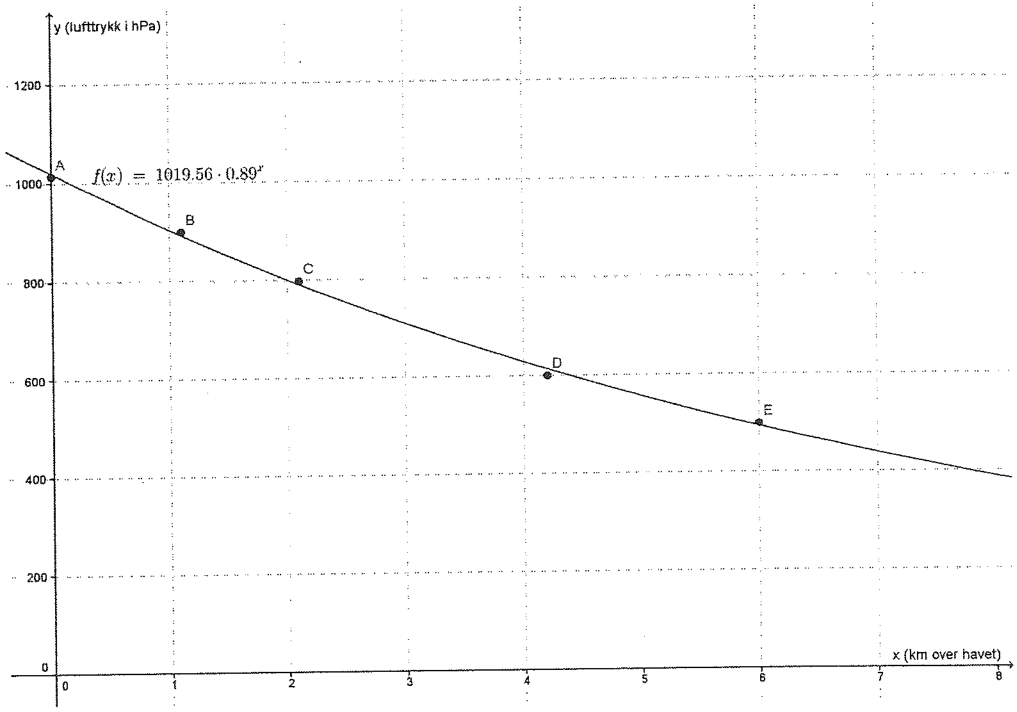
b)



Løser $P(X \geq 60)$ i sannsynlighetskalkulatoren. Finner $P(X \geq 60) = 0{,}147$

Oppgave 2

a)

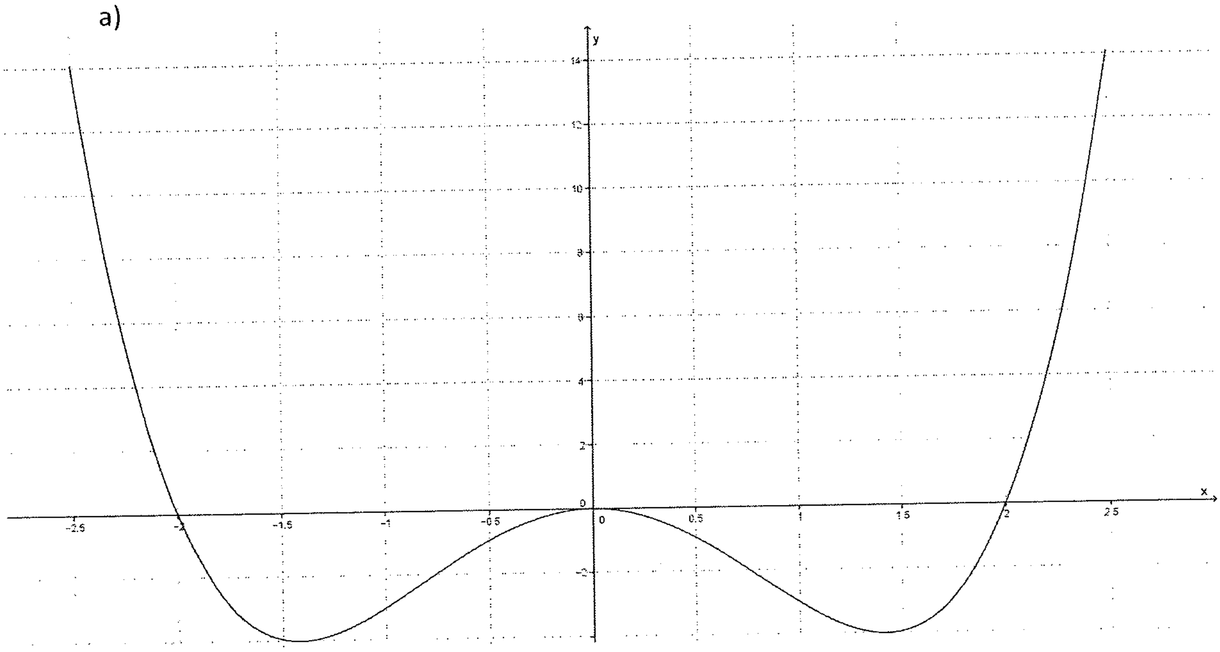


<u>$p(x) = 1020 \cdot 0{,}89^x$ er en modell som viser lufttrykket som funksjon av høyden x km over havet.</u>

Fremgangsmåte: Satte inn tallene i regneark, brukte RegEksp.

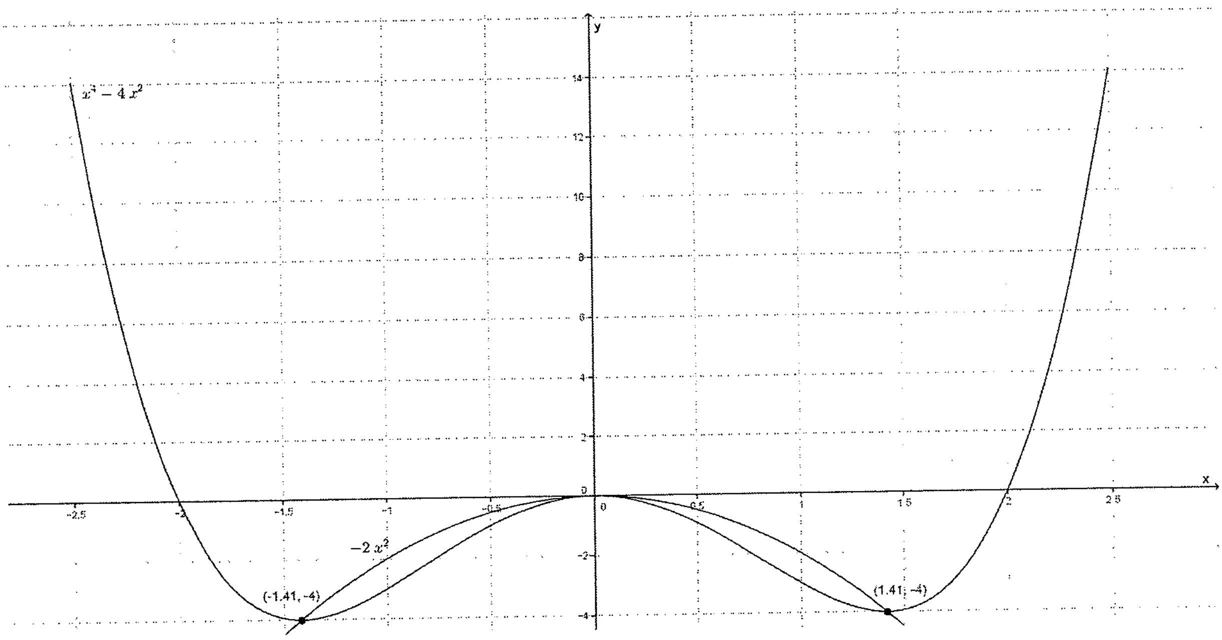
Oppgave 3

a)



$f(x) = x^4 - 4x^2$ tegnet for $x \in \langle -2{,}5\ , 2{,}5 \rangle$

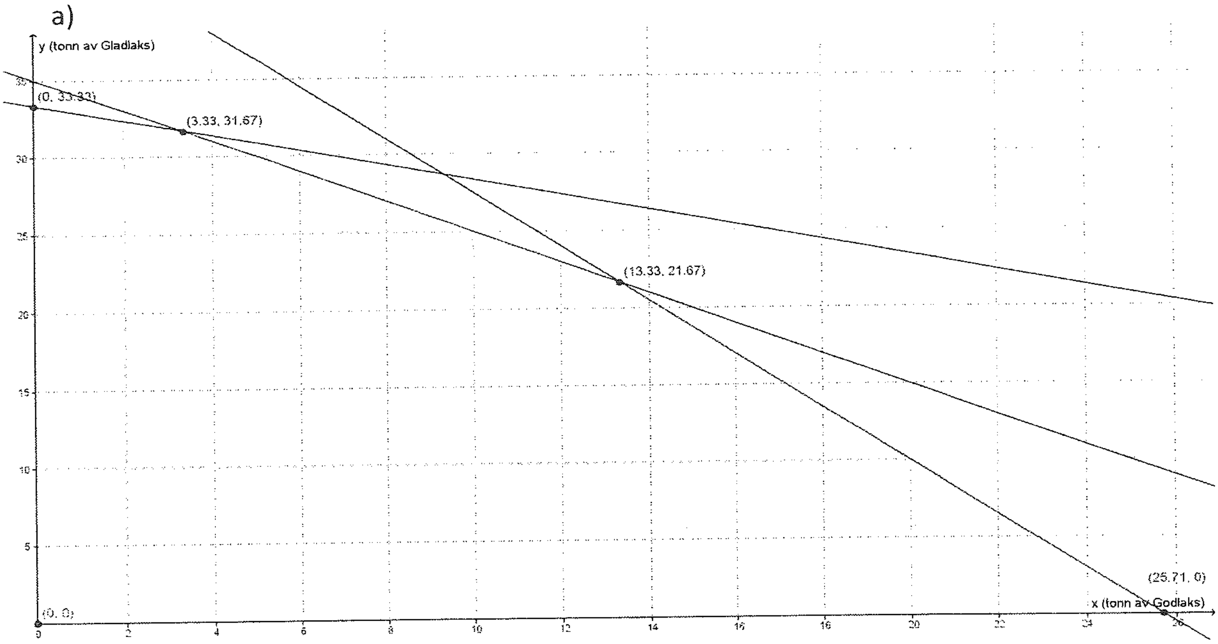
e)



$g(x) = -2x^2$ tegnet i samme koordinatsystem som $f(x)$

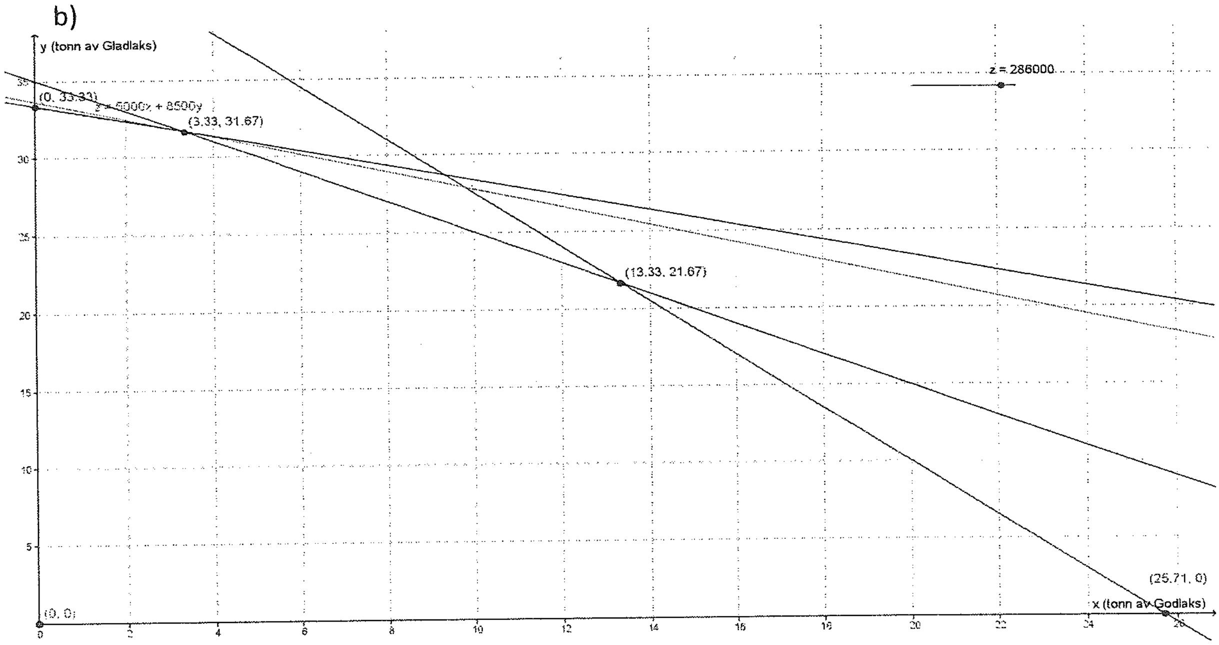
Oppgave 4

a)



Fremgangsmåte: Satt inn ulikhetene som linjer og markerte området x og y må tilhøre som mangekant.

b)

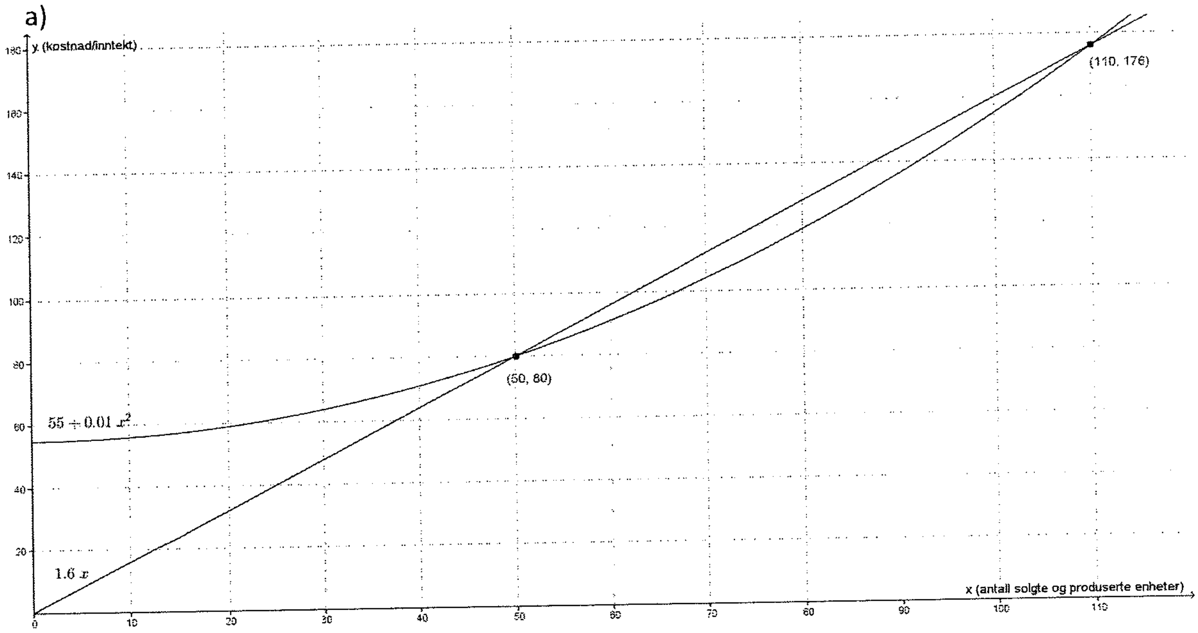


Salgsinntekten er størst når de produserer 3.33 tonn Godlaks og 31.67 tonn Gladlaks. Da er inntekten $z = 5000 \cdot 3{,}33 + 8500 \cdot 31{,}67 = 285833{,}33 \approx 285800.$

Fremgangsmåte: Satte inn glider for uttrykket $z = 5000x + 8500y$. Dette er nivålinja, og fikk den optimale nivålinja til å gå gjennom punktet (3.33 , 31.67). Dette er den optimale produksjonsmengden. Fant da inntekten ved å sette inn i uttrykket for z.

Oppgave 5

a)



Bedriften har overskudd når $g(x) > f(x)$, altså når $x \in \langle 50\,, 110 \rangle$

<u>Bedriften har overskudd når den produserer mellom 50 og 110 enheter</u>

Fremgangsmåte: Tegnet inn $f(x)$ og $g(x)$ og brukte "skjæring mellom to objekter".