Matematikk S1-eksamen

Våren 2017

19.05.2017 kl. 09:00-14:00

Del 1

Oppgave 1

Løs likningene.

a) $x^2 - 5x = 0 \implies \underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = 5}}$

b) $3 \cdot 10^x = 3000 \implies \underline{\underline{x = 3}}$

c) $4\lg(x + 15) = 8 \implies x + 15 = 10^2 \implies \underline{\underline{x = 85}}$

Oppgave 2

Skriv så enkelt som mulig.

a) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{a+1}{ab} = \dfrac{b - a + a + 1}{ab} = \underline{\underline{\dfrac{b+1}{ab}}}$

b) $\dfrac{4a^6b^{-2}a^4}{(2ab^{-1})^2} = 4a^6b^{-2}a^4 2^{-2}a^{-2}b^2 = \underline{\underline{a^8}}$

c) $\lg(3a) - \lg a^3 + 2\lg a = \lg 3 + \lg a - 3\lg a + 2\lg a = \underline{\underline{\lg 3}}$

Oppgave 3

a) Vi setter opp likningene for hver av de to familiene.

$$3b + 2v = 290 \tag{1}$$
$$5b + 3v = 460 \tag{2}$$

b) Vi bruker (1) til å løse for v. Vi får: $v = 145 - \dfrac{3}{2}b$

Videre setter vi denne inn i (2) $\implies 5b + 3\left(145 - \dfrac{3}{2}b\right) = 460 \implies \underline{\underline{b = 50}}$ som vi setter inn i $v = 145 - \dfrac{3}{2} \cdot 50 = \underline{\underline{70}}$. En barnebillett koster 50 kroner, og en voksenbillett koster 70 kroner.

Oppgave 4

Vi observerer at $x^2 - 2x \geq 3 \implies x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

a) Vi setter $x^2 - 2x - 3 = 0$, og finner at nullpunktene er $x = 3 \ \vee \ x = -1$. Vi bruker da faktoriseringsformelen, og får: $(x-3)(x+1) \geq 0$. Fortegnskjema gir oss at: $x^2 - 2x \geq 3$ når $\underline{\underline{x \leq -1 \ \vee \ x \geq 3}}$

Oppgave 5

a) ...

b) $\binom{6}{3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{20}}$ og $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{6}}$

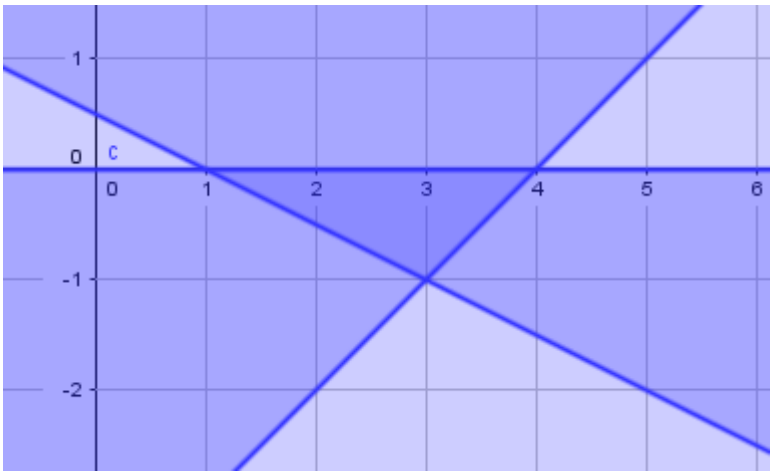
c) $P(2J \cap 1G) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{3}{5}}}$

Oppgave 6

Vi observerer at ulikhetene kan skrives om til følgende.

$$y \geq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$
$$y \geq x - 4$$
$$y \leq 0$$

a) Se bildet under.



b) Oppgaven skal løses innenfor de rammene kompetansemålene til matematikk S1 tillater. For mitt vedkommende går tankegangen i følgende lei: $2y$ er det positive leddet, og må derfor minimeres, for å gi det minste bidraget til uttrykket $2y - x$. I leddet $-x$ må x-verdien maksimeres for å gi det minste bidraget til uttrykket $2y - x$. Ved å minimere y-verdien får vi $2y = 2 * (-1)$, og ved å maksimere x-verdien får vi $x = 4$, som gir $-x = -4$. Sum av summarum får vi $\underline{\underline{2y - x = 2 * (-1) - 4 = -5}}$

Oppgave 7

a) $f(0) = 4$ og $f(4) = 0$

b) $y = -x + 6$

c) $f'(1) = 0$ og $f'(2) = -1$

d) $f(x) = ax^2 + bx + c$ der det er behov for (minst) tre likninger, siden vi har tre variabler.

$$f(0) = 4 \implies \underline{c = 4} \tag{3}$$
$$f'(1) = 0 \implies 2a + b = 0 \tag{4}$$
$$f'(2) = -1 \implies 4a + 2b = -1 \tag{5}$$

Ved å løse likningssettet, får vi at $\underline{a = -\frac{1}{2}} \ \vee \ \underline{b = 1} \ \vee \ \underline{c = 4}$

Dette gir oss til slutt:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4}}$$

Oppgave 8

$x \leq 4$

$y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$y \leq x + 3$

Oppgave 9

Basert på opplysningene laget vi også her tre likninger:

$$c - 1 = 0 \implies \underline{c = 1}$$
$$f(0) = 6 \implies \frac{b}{-1} = 6 \implies \underline{b = -6}$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3 \implies \frac{a}{c} = 3 \implies \underline{a = 3}$$

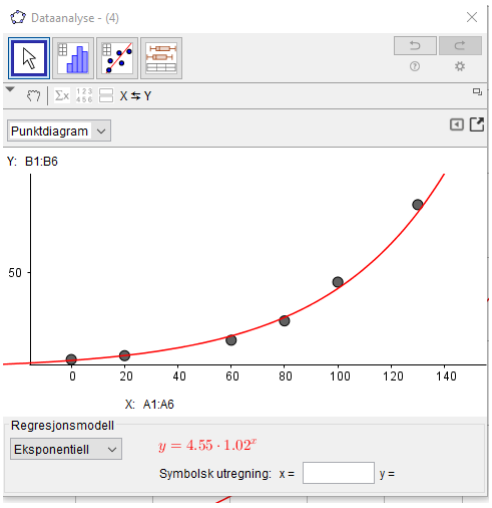
Innsatt gir dette:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3x - 6}{x - 1}}}$$

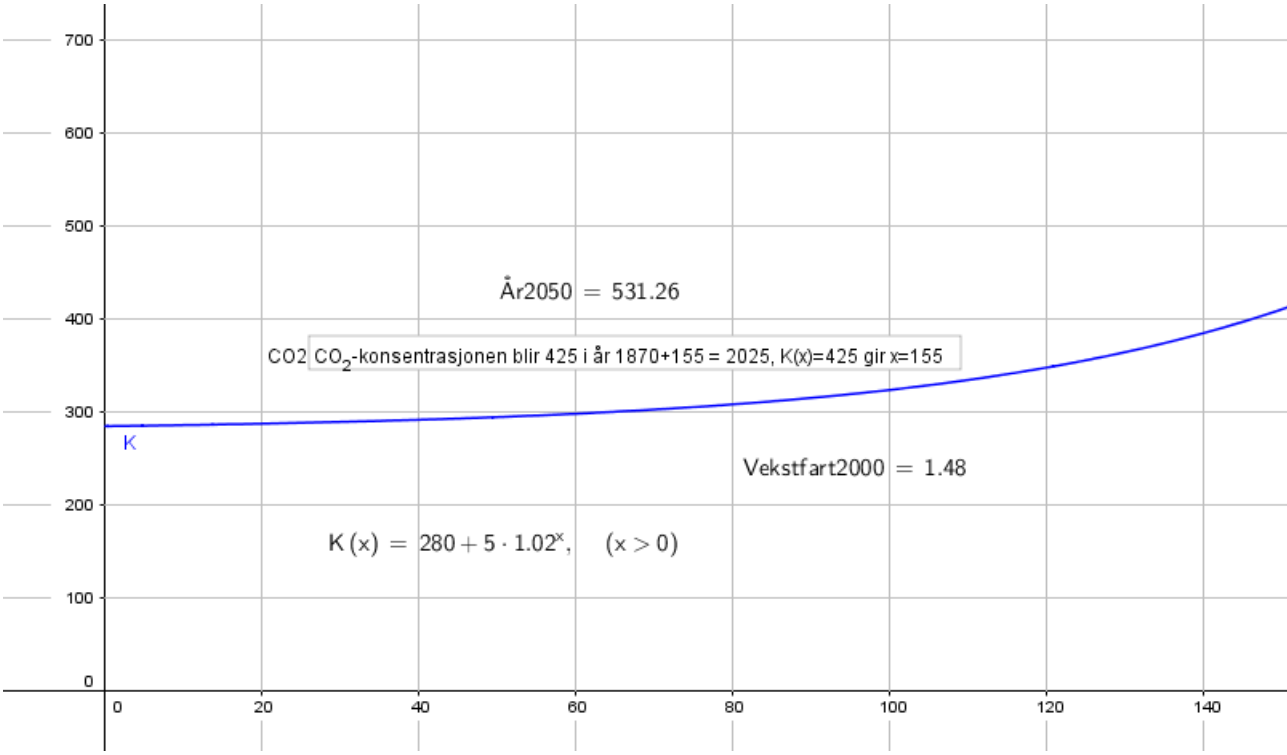
Del 2

Oppgave 1

a)



b)



Oppgave 2

Vi observerer at $n = 10$ og $p = \dfrac{24}{60} = 0.4$

a) Generelt er det tre vilkår som må være oppfylt for et binomiske forsøk (trekking med tilbakelegg):

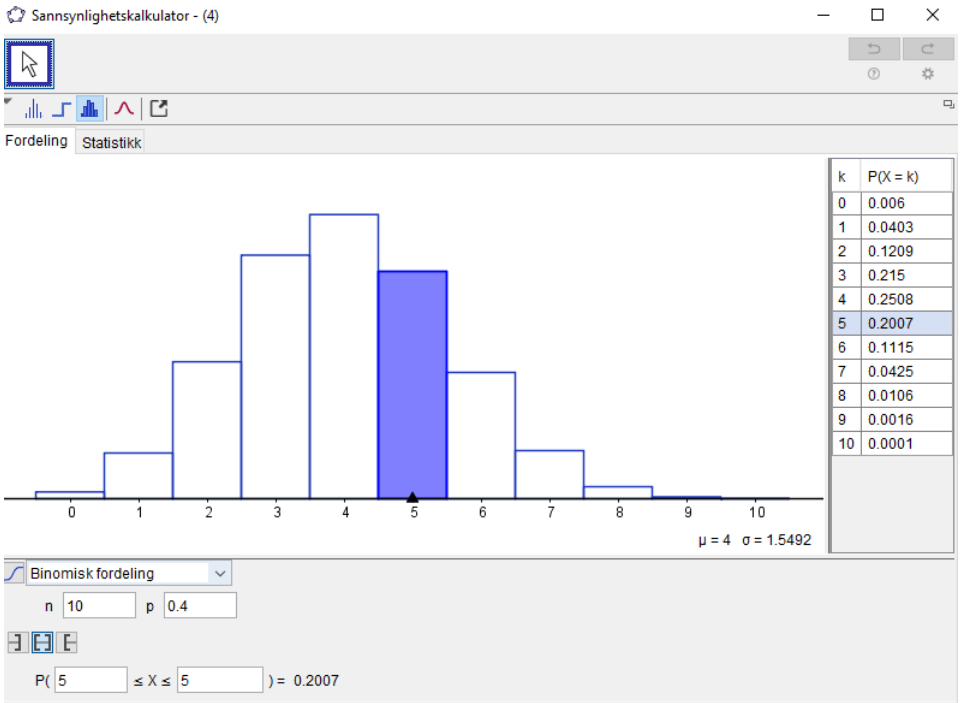
- Forsøket skal kun ha to mulige utfall: suksess eller fiasko.
- Sannsynligheten skal være den samme for vært delforsøk (for hvert trekk/kast).
- Alle delforsøk skal være uavhenige av hverandre.

Om disse er oppfylt, er sannsynligheten gitt ved:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{6}$$

Her er n antall delforsøk / kast / trekk, x er hvor mange ganger du ønsker suksess, og p er sannsynligheten for suksess.
Vi ser at i vårt forsøk, er disse oppfylt: 1. Får vi grønt lys er det *suksess*. Får vi rødt lys er det *fiasko*. 2. $p = 0.4$ for hvert lyskryss. 3. Lyskryssene gir grønt lys, uavhengig av hverandre.

b)



Vi kan også se at (6) hadde gitt det samme svaret:
$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot (0.40)^5 \cdot (1 - 0.40)^5 = 0.200658...$

c) For å få oftere grønt, enn rødt, lys. Må *suksess* skje oftere enn *fiasko*: $\underline{\underline{P(X \geq 6) = 0.1662}}$

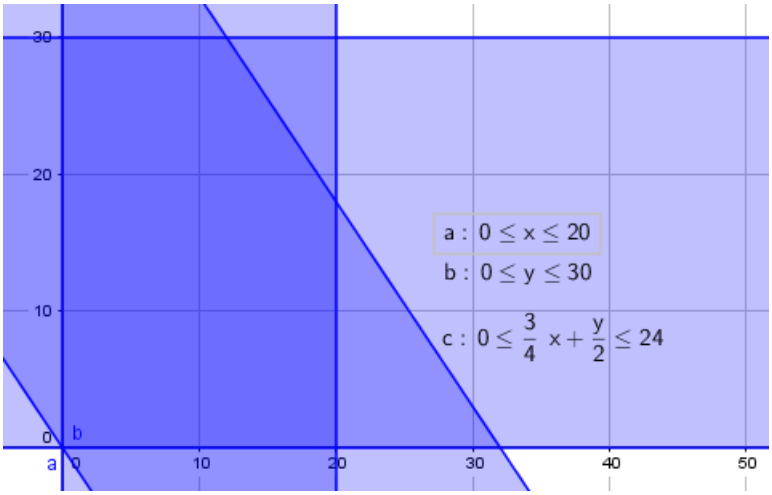
d) $P(\text{Tre grønne lys på rad}) \cap \text{Syv røde lys}) = P(\text{Tre grønne lys}) \cdot P(\text{Syv røde lys}) \cdot (\text{antall plasseringer}) = p_g^3 \cdot p_r^7 \cdot (n - (r-1)) = 0.40^3 \cdot 0.60^7 \cdot (10 - (3-1)) = \underline{\underline{0.0143327...}}$

Oppgave 3

a) Ulikhetene blir:

$$x \leq 20$$
$$y \leq 30$$
$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \leq 24$$

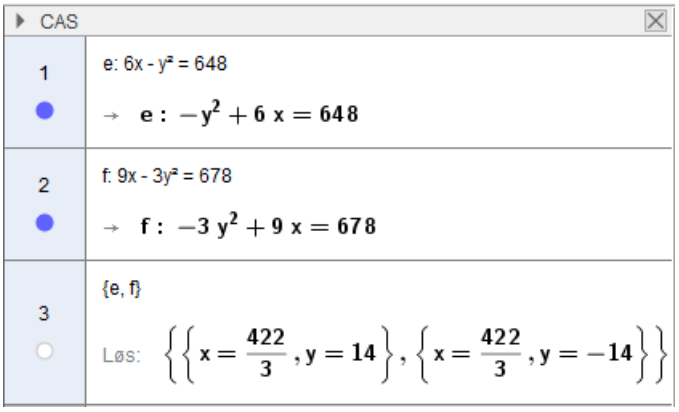
Det skraverte området:



b) Vi ønsker å maksimere uttrykket: $350x + 200y - 100x - 50y = 250x + 150y$ innenfor de gitte rammene i oppgave 3a). Det gir $x = 20 \ \wedge \ y = 18 \implies 7\,700$ NOK i overskudd.

Oppgave 4

a)

$$f(3) = -24 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 - b^2 \cdot 3 - 27 = 3 \implies \underline{\underline{9a - 3b^2 = 678}}$$
$$f'(3) = -72 \cdot 9 + 6a - b^2 = 0 \implies \underline{\underline{6a - b^2 = 648}}$$

b)