

Eksempeloppgave

2008

REA3028 Matematikk S2

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Bruk av kilder:	<p>Alle kilder som blir brukt til eksamen skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til kilden. Du må oppgi forfatter og hele tittelen både på lærebøker og annen litteratur.</p> <p>Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f. eks. ikke tilstrekkelig med www.Wikipedia.no.</p>
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	<p>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.</p> <p>Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.</p>
Veiledning om vurderingen:	<p>Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du</p> <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktmessige hjelpemidler– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 3$

2) $g(x) = 2xe^{3x}$

b)

1) Finn summen av den uendelige rekka: $9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$

2) Finn summen av de 119 første naturlige tallene.

c) Ledd nummer n i en rekke er gitt ved $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

1) Bestem a_5 og S_5 .

2) Vis at $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Bestem S_{999} .

d) Vis at $x = 1$ er en løsning på likningen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Bruk polynomdivisjon til å finne de to andre løsningene.

e) Løs likningssettet

$$x + y + z = 1$$

$$3x - y + 2z = 7$$

$$4x + 3y - z = 10$$

f) En maskin som lager terninger, var feilinnstilt. Terningene fikk to treere og ingen seksere.

1) Skriv av tabellen og fyll ut sannsynlighetsfordelingen:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$					

2) Regn ut $E(X)$ og $Var(X)$.

g) Totalkostnaden i kroner for en vare er gitt ved $K(x) = x^2 - 2x + 4$ der x er antall produserte enheter.

1) Finn et uttrykk for enhetskostnaden og grensekostnaden.

2) Finn den minste enhetskostnaden.

En regel i økonomien sier at vi finner den laveste verdien for enhetskostnaden der grafen til enhetskostnaden og grafen til grensekostnaden skjærer hverandre.

3) Vis at denne regelen alltid gjelder.

Del 2

Oppgave 2

En bedrift har lagt opp en langsiktig plan for å rekruttere kvalifisert arbeidskraft i framtida. Bedriften lover en stipendordning under skolegang og studier. De ferdigutdannede studentene må forplikte seg til å arbeide i bedriften i 5 år.

En elev/student kan velge mellom å få stipendet

- utbetalt 48 000 kr hvert år i 10 år. Første utbetaling om 1 år.
- utbetalt 105 000 kr kontant i dag. Deretter 45 000 kr hvert år i 5 år, første utbetaling om 1 år.
- utbetalt 60 000 kr hvert år i 10 år. Første utbetaling om 5 år.

a) Hvilken stipendordning er mest lønnsom for eleven/studenten når renten er 5 % per år? Bruk det du kan om rekker i begrunnelsen din.

b) Ville konklusjonen blitt annerledes hvis renten hadde vært 8 % per år?

Oppgave 3 – Alternativ I

Gitt funksjonen

$$f(x) = 10 \cdot (1-x) \cdot e^{-x} \quad x \in [0, 10]$$

- a) Vis at $f'(x) = 10 \cdot (x-2) \cdot e^{-x}$. Tegn et fortegnskjema for $f'(x)$ og bruk det til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- b) Finn $f''(x)$. Tegn et fortegnskjema for $f''(x)$ og bruk det til å finne eventuelle vendepunkt på grafen til f .
- c) Tegn en skisse av grafen til f .
- d) Finn det samlede arealet som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x=0$ og $x=10$.

Funksjonen f er en derivert til funksjonen g .

- e) Bruk grafen til f til å bestemme hvor grafen til g stiger og hvor den synker. Finn x -verdiene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til g .

Oppgave 3 – Alternativ II

Ifølge data fra Statistisk årbok kan antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i Norge i perioden 1985 – 2005 uttrykkes ved funksjonen

$$f(x) = 506,8 - \frac{4,725 \cdot 10^4}{1,513^x + 525,7} \quad x \in [0, 20]$$

der x er antall år etter 1985.

I 1991 var det 4 500 000 innbyggere i Norge.

- Hvor mange registrerte personbiler var det i Norge i 1991?
- Tegn en skisse av grafen til f' .
- Bruk grafen til f' til å finne interessante egenskaper for f .
- Når øker antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere med 6 per år?

Gjennomsnittet til funksjonen f i intervallet $[a, b]$ er $\frac{1}{b-a} \cdot A$, der A er arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.

- Finn gjennomsnittlig antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i perioden 1985 – 2005.

Oppgave 4

Levetiden til en spesiell motor antas å være normalfordelt med en forventningsverdi på 10 år og et standardavvik på 2 år.

- a) Finn sannsynligheten for at
- 1) motoren fungerer mindre enn 8 år
 - 2) motoren fungerer mellom 8 og 11 år

Motorer som blir defekte før garantitiden går ut, blir erstattet av produsenten. Firmaet som produserer motorene, ønsker ikke å erstatte mer enn 3 % av de motorene som blir defekte.

- b) Hvor lang garantitid bør de da tilby?

I firmaet er de usikre på om forventet levetid er så lang som 10 år. De registrerer levetiden i antall år på 10 tilfeldig valgte motorer:

8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

De antar fortsatt at levetiden til motoren er normalfordelt med standardavvik på 2 år.

- c) Still opp en nullhypotese H_0 og en alternativ hypotese H_1 for denne problemstillingen.
- d) Velg et signifikansnivå på 5 % og undersøk om firmaet må forkaste hypotesen H_0 .