Utdanningsdirektoratet

Eksamen

29.11.2011

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$

2) $g(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$

3) $h(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2x}$

4) $i(x) = \ln(x^2 + 4)$

b) Vi har gitt rekkja

$$4 + 7 + 10 + 13 + \cdots$$

Bestem a_n og S_n

c) Løys likninga

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 3 \qquad \text{når } x \in \langle -1,\ 1 \rangle$$

d) Vi har gitt polynomfunksjonen

$$f(x) = x^3 + ax + 12$$

1) Bestem a slik at divisjonen $f(x):(x+4)$ går opp.

2) Utfør divisjonen, og skriv $f(x)$ som eit produkt av førstegradsfaktorar for denne a-verdien.

e) Vi har gitt rekkja

$$1 + 7 + 19 + 37 + \cdots$$

Skriv opp S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem S_{100}

f) For ein funksjon f har vi gitt at $f'(x) = a(x+1)(x-2)$ der $a < 0$

1) Teikne forteiknslinja til $f'(x)$. Bruk henne til å bestemme x-verdien til topp- og botnpunkt på grafen til f. Bestem også kvar grafen til f stig og søkk.

2) Bestem $f''(x)$. Bruk denne til å bestemme x-verdien til vendepunktet.

g) Sannsynsfordelinga til ein stokastisk variabel X er gitt ved

x	0	1
$P(X = x)$	$1-p$	p

Bestem $E(X)$ og $Var(X)$ uttrykt ved p.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 2 (8 poeng)

For å få ungdom til å studere realfag, tenkjer vi oss ei ny ordning for studiefinansiering.

Dette er vilkåra:

- Lånet er rente- og avdragsfritt i studietida.
- Studenten betaler berre avdrag og ikkje renter når studia er avslutta.
- Studenten betaler første avdrag på 15 000 kroner eitt år etter at studiet er avslutta. Deretter skal dei årlege avdraga aukast med 5 % kvart år.

Ein student vil låne i alt 450 000 kroner.

a) Kor stort blir det 2. avdraget og det 8. avdraget?

b) Kor mykje betaler studenten tilbake i alt i løpet av dei 8 første avdraga?

c) Kor mange år vil det ta før heile lånet er tilbakebetalt?

d) Kor stort blir det siste avdraget?

Oppgåve 3 (8 poeng)

Ein modell for talet på harar innafor eit lukka område er gitt ved

$$N(t) = 700 - \mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

der t er talet på år etter at teljingane begynte, og $\mathrm{k} > 0$.

Ved to teljingar fann ein ut at $N(0) = 400$ og $N(5) = 600$

a) Bruk resultatet av dei to teljingane til å vise at $\mathrm{C} = 300$ og $\mathrm{k} \approx 0{,}22$

b) Finn ved rekning kor lang tid det tek før det er 650 harar i området.

c) Teikne grafen til N. Kor mange harar vil det vere i området når det har gått lang tid?

d) Bruk mellom anna kjerneregelen til å bestemme $N'(5)$. Kva fortel svaret oss?

Oppgåve 4 (6 poeng)

I eit spel blir det kasta to vanlege terningar. Premien i spelet blir avgjord av den samla summen av auge på dei to terningane.

Dersom summen er 11 eller 12, er premien 100 kroner.

Dersom summen er 9 eller 10, er premien 50 kroner.

Dersom summen er 7 eller 8, er premien 15 kroner.

Dersom summen er 6 eller mindre, er det ingen premie.

Det kostar 10 kroner å delta i eitt spel.

La X vere nettogevinsten i eitt spel, det vil seie premien fråtrekt 10 kroner.

a) Forklar at $P(X=5)=\dfrac{11}{36}$

b) Skriv av tabellen nedanfor, og fyll ut det som manglar.

x	-10	5	40	90
$P(X=x)$		$\dfrac{11}{36}$		

c) Vil det i lengda lønne seg å spele dette spelet? Gjer berekningar som støttar opp under svaret ditt.

Oppgåve 5 (6 poeng)

Mattilsynet kontrollerer mellom anna kvaliteten på matvarer. På landsbasis har det vist seg at gjennomsnittleg 15 % av pakningane av ein bestemt type mat har for dårleg kvalitet.

I eit distrikt planlegg Mattilsynet å kontrollere 120 pakningar med denne maten. Vi ser på kontrollen som eit binomisk forsøk med $n = 120$ og $p = 0{,}15$.

a) Bestem sannsynet for at akkurat 18 av dei kontrollerte pakningane har for dårleg kvalitet.

b) Bestem sannsynet for at minst 20 av pakningane har for dårleg kvalitet.

I kontrollen viser det seg at 21 av de 120 pakningane ikkje oppfyller kvalitetskrava. Mattilsynet vil undersøkje om dette høge talet er tilfeldig, eller om det verkeleg er slik at meir enn 15 % av pakningane har for dårleg kvalitet i dette distriktet.

Vi lèt p vere sannsynet for at ei tilfeldig vald pakning har for dårleg kvalitet.

c) Bruk hypotesetesting, og vurder om kontrollen gir grunnlag for å påstå at kvaliteten på denne matvara er dårlegare i dette distriktet enn elles i landet.

Bruk eit signifikansnivå på 5 %.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Kjelde: Modellen byggjer på talmateriale frå http://no.wikipedia.org/wiki/Statens_pensjonsfond (06.05.2011)

Ifølgje éin modell vil storleiken på Statens pensjonsfond utland ("Oljefondet") følgje funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{3236}{1 + 38{,}1 \cdot e^{-0{,}3763x}}$$

Her er x talet på år etter 1996, og $f(x)$ er storleiken på Oljefondet i milliardar kroner.

a) Kor stort vil Oljefondet vere i 2012 ifølgje modellen?

b) Bruk kjerneregelen og regelen for derivasjon av ein brøk til å vise at

$$f'(x) = \frac{46394{,}6 \cdot e^{-0{,}3763x}}{(1 + 38{,}1 \cdot e^{-0{,}3763x})^2}$$

Bestem $f'(4)$. Kva fortel dette talet oss?

c) Ein økonom seier at Oljefondet alltid vil vekse. Forklar korleis vi ut frå den gitte modellen kan støtte denne utsegna.

d) Bestem kva år Oljefondet har størst vekst ifølgje denne modellen.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$

2) $g(x) = 3e^{2x}$

3) $h(x) = x \cdot e^{2x}$

4) $i(x) = \ln(x^2 + 4)$

b) Vi har gitt rekken

$$4 + 7 + 10 + 13 + \cdots$$

Bestem a_n og S_n

c) Løs likningen

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 3 \qquad \text{når } x \in \langle -1,\ 1 \rangle$$

d) Vi har gitt polynomfunksjonen

$$f(x)=x^3+ax+12$$

1) Bestem a slik at divisjonen $f(x):(x+4)$ går opp.

2) Utfør divisjonen, og skriv $f(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer for denne a-verdien.

e) Vi har gitt rekken

$$1+7+19+37+\cdots$$

Skriv opp S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem S_{100}

f) For en funksjon f har vi gitt at $f'(x)=a(x+1)(x-2)$ der $a<0$

1) Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$. Bruk denne til å bestemme x-verdien til topp- og bunnpunkt på grafen til f. Bestem også hvor grafen til f stiger og synker.

2) Bestem $f''(x)$. Bruk denne til å bestemme x-verdien til vendepunktet.

g) Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X er gitt ved

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

Bestem $E(X)$ og $Var(X)$ uttrykt ved p.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (8 poeng)

For å få ungdom til å studere realfag, tenker vi oss en ny ordning for studiefinansiering .

Betingelsene er som følger:

- Lånet er rente- og avdragsfritt i studietida.
- Studenten betaler bare avdrag og ikke renter når studiene er avsluttet.
- Studenten betaler første avdrag på 15 000 kroner ett år etter at studiet er avsluttet. Deretter skal de årlige avdragene økes med 5 % hvert år.

En student vil låne i alt 450 000 kroner.

a) Hvor stort blir det 2. avdraget og det 8. avdraget?

b) Hvor mye betaler studenten tilbake i alt i løpet av de 8 første avdragene?

c) Hvor mange år vil det ta før hele lånet er tilbakebetalt?

d) Hvor stort blir det siste avdraget?

Oppgave 3 (8 poeng)

En modell for antall harer innenfor et lukket område er gitt ved

$$N(t) = 700 - \mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

der t er antall år etter at tellingene begynte, og $\mathrm{k} > 0$.

Ved to tellinger fant man ut at $N(0) = 400$ og $N(5) = 600$

a) Bruk resultatet av de to tellingene til å vise at $\mathrm{C} = 300$ og $\mathrm{k} \approx 0{,}22$

b) Finn ved regning hvor lang tid det tar før det er 650 harer i området.

c) Tegn grafen til N. Hvor mange harer vil det være i området når det har gått lang tid?

d) Bruk blant annet kjerneregelen til å bestemme $N'(5)$. Hva forteller svaret oss?

Oppgave 4 (6 poeng)

I et spill kastes to vanlige terninger. Premien i spillet avgjøres av samlet sum øyne på de to terningene.

Hvis summen er 11 eller 12, er premien 100 kroner.

Hvis summen er 9 eller 10, er premien 50 kroner.

Hvis summen er 7 eller 8, er premien 15 kroner.

Hvis summen er 6 eller mindre, er det ingen premie.

Det koster 10 kroner å delta i ett spill.

La X være nettogevinsten i ett spill, det vil si premien fratrukket 10 kroner.

a) Forklar at $P(X=5)=\frac{11}{36}$

b) Skriv av tabellen nedenfor, og fyll ut det som mangler.

x	-10	5	40	90
$P(X=x)$		$\frac{11}{36}$		

c) Vil det i lengden lønne seg å spille dette spillet? Gjør beregninger som understøtter svaret ditt.

Oppgave 5 (6 poeng)

Mattilsynet kontrollerer blant annet kvaliteten på matvarer. På landsbasis har det vist seg at gjennomsnittlig 15 % av pakningene av en bestemt type mat har for dårlig kvalitet.

I et distrikt planlegger Mattilsynet å kontrollere 120 pakninger med denne maten. Vi ser på kontrollen som et binomisk forsøk med $n = 120$ og $p = 0{,}15$.

a) Bestem sannsynligheten for at akkurat 18 av de kontrollerte pakningene har for dårlig kvalitet.

b) Bestem sannsynligheten for at minst 20 av pakningene har for dårlig kvalitet.

I kontrollen viser det seg at 21 av de 120 pakningene ikke oppfylte kvalitetskravene. Mattilsynet vil undersøke om dette høye tallet kan skyldes tilfeldigheter, eller om det virkelig er slik at mer enn 15 % av pakningene har for dårlig kvalitet i dette distriktet.

Vi lar p være sannsynligheten for at en tilfeldig utvalgt pakning har for dårlig kvalitet.

c) Bruk hypotesetesting, og vurder om kontrollen gir grunnlag for å påstå at kvaliteten på denne matvaren er dårligere i dette distriktet enn ellers i landet.
Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 6 (8 poeng)

Kilde: Modellen bygger på tallmateriale fra http://no.wikipedia.org/wiki/Statens_pensjonsfond (06.05.2011)

Ifølge én modell vil størrelsen på Statens pensjonsfond utland (”Oljefondet”) følge funksjonen gitt ved

$$f(x)=\frac{3236}{1+38{,}1\cdot e^{-0{,}3763x}}$$

Her er x antall år etter 1996, og $f(x)$ er størrelsen på Oljefondet i milliarder kroner.

a) Hvor stort vil Oljefondet være i 2012 ifølge modellen?

b) Bruk kjerneregelen og regelen for derivasjon av en brøk til å vise at

$$f'(x)=\frac{46394{,}6\cdot e^{-0{,}3763x}}{(1+38{,}1\cdot e^{-0{,}3763x})^2}$$

Bestem $f'(4)$. Hva forteller dette tallet oss?

c) En økonom sier at Oljefondet alltid vil vokse. Forklar hvordan vi ut fra den gitte modellen kan støtte denne uttalelsen.

d) Bestem hvilket år Oljefondet har størst vekst ifølge denne modellen.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet