Utdanningsdirektoratet

Eksamen

30.11.2012

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Deriver funksjonane

a) $g(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$

b) $h(x) = \ln(x^3 - x)$

c) $k(x) = x^3 e^{-x^2}$

Oppgåve 2 (3 poeng)

a) Forklar kva vi meiner med at ei rekkje er aritmetisk.

b) I ei aritmetisk rekkje er $a_1 = 3$ og $a_4 = 12$.

Bestem a_n og s_n.

Oppgåve 3 (3 poeng)

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x) = 2x^3 - 26x + 24$$

a) Forklar korleis vi kan avgjere om divisjonen $P(x) : (x-1)$ vil gå opp, utan å utføre divisjonen.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorar (førstegradsfaktorar).

Oppgåve 4 (4 poeng)

Lise investerte 10 000 kroner i eit aksjefond. Fondet brukte desse pengane til å kjøpe aksjar i selskapa A, B og C. Etter eitt år var utbyttet av aksjane til saman 900 kroner. Utbyttet frå selskap A, B og C var på høvesvis 9 %, 1 % og 10 %. Fondet hadde brukt $4\,000$ kroner meir på investeringane i selskap A enn i selskap B.

a) Vis at opplysningane gir følgjande likningssystem:

$$\begin{bmatrix} x+y+\quad z = 10\,000 \\ 9x+y+10z = 90\,000 \\ x-y \qquad = \ \ 4\,000 \end{bmatrix}$$

Kva for storleikar står x, y og z for?

b) Kor mykje av pengane til Lise investerte fondet i kvart av dei tre selskapa?

Oppgåve 5 (4 poeng)

Sannsynsfordelinga for ein stokastisk variabel X er gitt ved denne tabellen:

t	-2	-1	0	2	k
$P(X=t)$	$0,2$	$0,1$	$0,4$	$0,2$	p

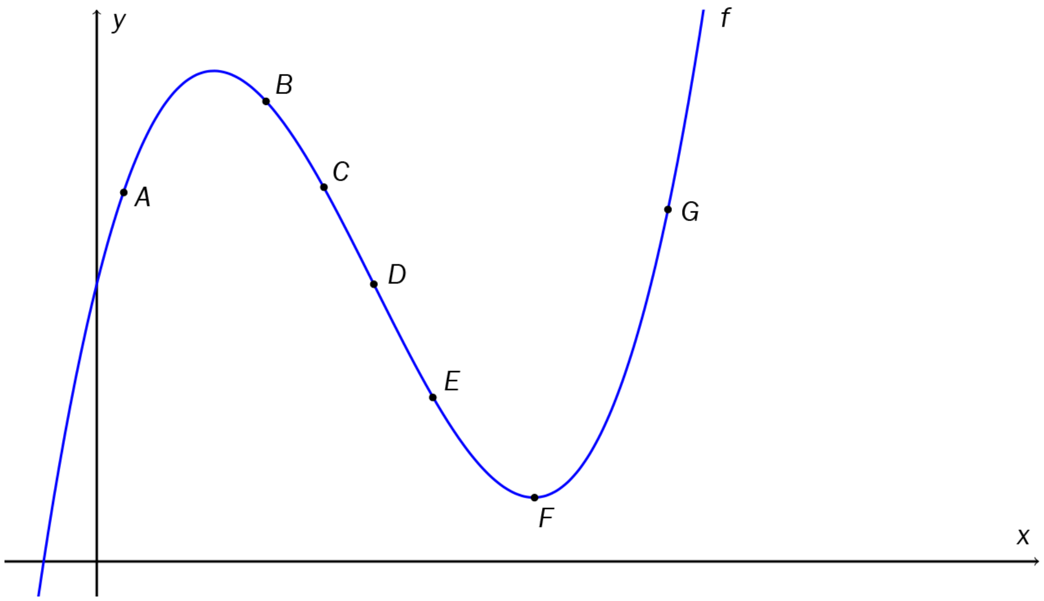
a) Forklar kvifor p må vere lik $0,1$.

b) Kva må k vere dersom vi veit at $\mathrm{E}(X)=0,3$?

c) Vi set $k=1$. Bestem $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Grafen til ein tredjegradsfunksjon f er teikna nedanfor.



Bestem i kva for nokre av punkta A, B, C, D, E, F og G **begge** disse vilkåra er oppfylte:

$f'(x) < 0 \quad \text{og} \quad f''(x) < 0$

Grunngi svaret ditt.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Ein person set kvart år inn 4000,00 kroner på ein konto med fast årleg rente. Etter nokre år står det $20\,983{,}32$ kroner på kontoen like etter ei innbetaling. Året etter, det vil seie umiddelbart etter neste innbetaling, står det $25\,486{,}92$ kroner på kontoen.

a) Vis at den årlege renta er $2{,}4\,\%$.

b) Rekn ut kor mykje som står på kontoen like etter den 12. innbetalinga dersom renta har vært uendra i heile perioden.

Etter den 12. innbetalinga blir det ikkje sett inn meir på kontoen. Renta blir heva, men er konstant i dei neste åtte åra.

c) Kva må renta vere for at det skal stå 72 000 kroner på kontoen åtte år etter siste innbetaling?

Oppgåve 2 (8 poeng)

Det årlege talet på villrein felt under jakt i åra etter 1980 kan beskrivast ved funksjonen

$$f(x) = \frac{13132}{1 + 0{,}20 \cdot e^{0{,}07x}}$$

Her er x talet på år etter 1980.[1]

a) Kor mange dyr blei det felt i 2010 ifølgje denne modellen?

b) Bruk $f'(x)$ til å vise at det stadig blir felt færre dyr årleg.

c) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f. Kva fortel resultatet oss?

d) Teikn grafen til f. Kor mange villrein blei det felt totalt frå og med 1980 til og med 2010 ifølgje denne modellen?

[1] Modell basert på tall fra http://www.ssb.no/aarbok/tab/tab-357.html (02.10.2010)

Oppgåve 3 (8 poeng)

Ei bedrift produserer og sel ei vare. Inntekta (i tusen kroner) ved produksjon og sal av

x einingar er gitt ved funksjonen

$$I(x) = 110x - 2{,}2x^2 \ , \quad x \in [0,\ 35]$$

a) Kva er den største inntekta bedrifta kan få?
Kor mange einingar må bedrifta da produsere og selje?

Bedrifta må fornye produksjonsutstyret og kan velje mellom to typar utstyr, A og B.
Av erfaring veit bedrifta at kostnaden (i tusen kroner) ved produksjon av x einingar med type A er gitt ved

$$K_A(x) = 3{,}1x^2 - 86x + 1110$$

Tilsvarande er kostnaden ved type B gitt ved

$$K_B(x) = 1{,}9x^2 - 99x + 1900$$

b) Bestem grensekostnaden for type A og for type B.

c) Kva for ein av dei to utstyrstypane vil kunne gi lågast kostnad?

d) Kva for ein av dei to utstyrstypane vil kunne gi det største overskotet?

Oppgåve 4 (7 poeng)

Ein fabrikk fyller og pakkar posar med kaffi. Fyllemaskina er innstilt til å fylle posane med 505 g. Tenk deg at vekta av posane er normalfordelt med forventningsverdi lik 505 g og med standardavvik på 5 g.

a) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald pose inneheld meir enn 510 g.

b) Kor mange prosent av posane vil innehalde mellom 495 g og 515 g?

I ein kvalitetskontroll blir 10 tilfeldig valde posar vegne. Resultatet er vist i tabellen nedanfor.

Pose	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vekt (i gram)	508	503	510	512	519	511	496	503	503	506

Dette gav bedrifta mistanke om at maskina fyller for mykje i kvar pose.

c) Gjennomfør ein hypotesetest, og vurder om bedrifta har grunn til mistanken sin.

Oppgåve 5 (7 poeng)

Trekanttal nummer n er gitt ved formelen $T(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}$

a) Set opp ein tabell med dei 12 første trekanttala.

Det finst ein samanheng mellom $T(m+n)$ og $T(m)+T(n)$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$

b) Set $m=2$ og $n=8$ og bruk tabellen i oppgåve a) til å rekne ut

$T(2+8)$,
$T(2)+T(8)$ og
$T(2+8)-(T(2)+T(8))$

Set inn andre verdiar for m og n og undersøk kva $T(m+n)-(T(m)+T(n))$ blir.
Prøv å formulere ein generell regel.

c) Bruk formelen for $T(n)$ til å skrive uttrykket

$$T(m+n)-(T(m)+T(n))$$

så enkelt som mogleg.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Deriver funksjonene

a) $g(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$

b) $h(x) = \ln(x^3 - x)$

c) $k(x) = x^3 e^{-x^2}$

Oppgave 2 (3 poeng)

a) Forklar hva vi mener med at en rekke er aritmetisk.

b) I en aritmetisk rekke er $a_1 = 3$ og $a_4 = 12$.

Bestem a_n og s_n.

Oppgave 3 (3 poeng)

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x) = 2x^3 - 26x + 24$$

a) Forklar hvordan vi kan avgjøre om divisjonen $P(x) : (x-1)$ vil gå opp, uten å utføre divisjonen.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer (førstegradsfaktorer).

Oppgave 4 (4 poeng)

Lise investerte 10 000 kroner i et aksjefond. Fondet brukte disse pengene til å kjøpe aksjer i selskapene A, B og C. Etter ett år var utbyttet av aksjene til sammen 900 kroner. Utbyttet fra selskap A, B og C var på henholdsvis 9 %, 1 % og 10 %. Fondet hadde brukt $4\,000$ kroner mer på investeringene i selskap A enn i selskap B.

a) Vis at opplysningene gir følgende likningssystem:

$$\begin{bmatrix} x+y+z=10\,000 \\ 9x+y+10z=90\,000 \\ x-y=4\,000 \end{bmatrix}$$

Hvilke størrelser står x, y og z for?

b) Hvor mye av Lises penger investerte fondet i hvert av de tre selskapene?

Oppgave 5 (4 poeng)

Sannsynlighetsfordelingen for en stokastisk variabel X er gitt ved følgende tabell:

t	-2	-1	0	2	k
$P(X=t)$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}2$	p

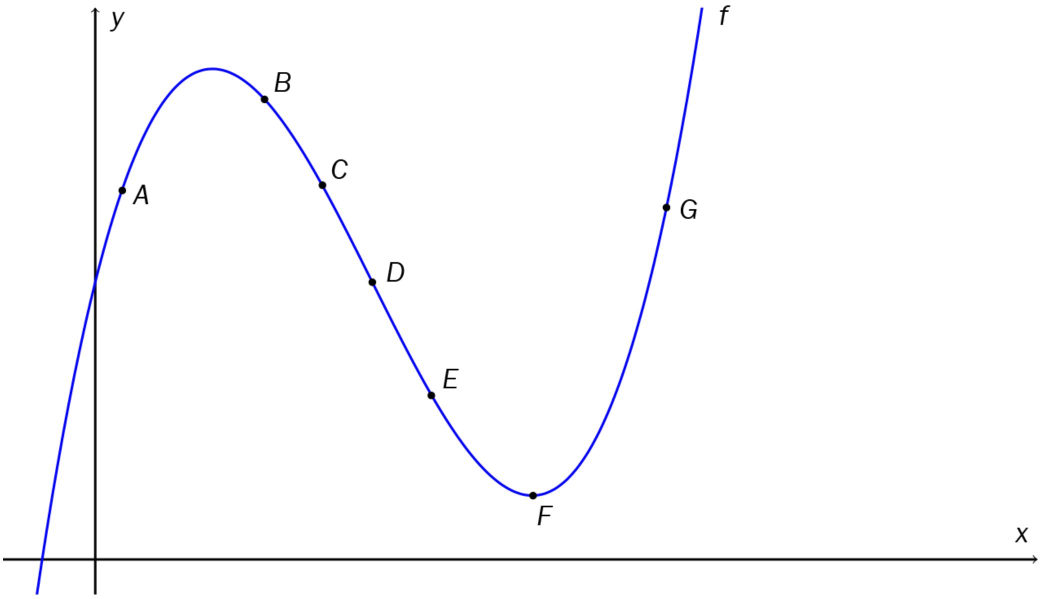
a) Forklar hvorfor p må være lik $0{,}1$.

b) Hva må k være dersom vi vet at $\mathrm{E}(X)=0{,}3$?

c) Vi setter $k=1$. Bestem $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Oppgave 6 (4 poeng)

Grafen til en tredjegradsfunksjon f er tegnet nedenfor.



Bestem i hvilke av punktene A, B, C, D, E, F og G **begge** disse betingelsene er oppfylt:

$$f'(x) < 0 \quad \text{og} \quad f''(x) < 0$$

Begrunn svaret ditt.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

En person setter hvert år inn 4000,00 kroner på en konto med fast årlig rente. Etter noen år står det $20983,32$ kroner på kontoen like etter en innbetaling. Det følgende året, det vil si umiddelbart etter neste innbetaling, står det $25486,92$ kroner på kontoen.

a) Vis at den årlige renten er $2,4\,\%$.

b) Regn ut hvor mye som står på kontoen like etter den 12. innbetalingen dersom renten har vært uendret i hele perioden.

Etter den 12. innbetalingen settes det ikke inn mer på kontoen. Renta blir hevet, men er konstant i de neste åtte årene.

c) Hva må renten være for at det skal stå 72 000 kroner på kontoen åtte år etter siste innbetaling?

Oppgave 2 (8 poeng)

Det årlige antall villrein felt under jakt i årene etter 1980 kan beskrives ved funksjonen

$$f(x) = \frac{13132}{1 + 0,20 \cdot e^{0,07x}}$$

Her er x antall år etter 1980.[2]

a) Hvor mange dyr ble felt i 2010 ifølge denne modellen?

b) Bruk $f'(x)$ til å vise at det stadig felles færre dyr årlig.

c) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f. Hva forteller resultatet oss?

d) Tegn grafen til f. Hvor mange villrein ble felt totalt i årene fra og med 1980 til og med 2010 ifølge denne modellen?

[2] Modell basert på tall fra http://www.ssb.no/aarbok/tab/tab-357.html (02.10.2010)

Oppgave 3 (8 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Inntekten (i tusen kroner) ved produksjon og salg av x enheter er gitt ved funksjonen

$$I(x) = 110x - 2{,}2x^2 \ , \qquad \text{for } x \in \left[0,\ 35\right]$$

a) Hva er den største inntekten bedriften kan få?
Hvor mange enheter må bedriften da produsere og selge?

Bedriften må fornye produksjonsutstyret og kan velge mellom to typer utstyr, A og B.
Av erfaring vet bedriften at kostnaden (i tusen kroner) ved produksjon av x enheter med type A er gitt ved

$$K_{\text{A}}(x) = 3{,}1x^2 - 86x + 1110$$

Tilsvarende er kostnaden ved type B gitt ved

$$K_{\text{B}}(x) = 1{,}9x^2 - 99x + 1900$$

b) Bestem grensekostnaden for type A og for type B.

c) Hvilken av de to utstyrstypene vil kunne gi lavest kostnad?

d) Hvilken av de to utstyrstypene vil kunne gi det største overskuddet?

Oppgave 4 (7 poeng)

En fabrikk fyller og pakker poser med kaffe. Fyllemaskinen er innstilt til å fylle posene med 505 g. Anta at vekten av posene er normalfordelt med forventningsverdi lik 505 g og med standardavvik på 5 g.

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pose inneholder mer enn 510 g.

b) Hvor mange prosent av posene vil inneholde mellom 495 g og 515 g?

I en kvalitetskontroll blir 10 tilfeldig valgte poser veid. Resultatet vises i tabellen nedenfor.

Pose	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vekt (i gram)	508	503	510	512	519	511	496	503	503	506

Dette ga bedriften mistanke om at maskinen fyller for mye i hver pose.

c) Gjennomfør en hypotesetest, og vurder om bedriften har grunn til sin mistanke.

Oppgave 5 (7 poeng)

Trekanttall nummer n er gitt ved formelen $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Sett opp en tabell med de 12 første trekanttallene.

Det finnes en sammenheng mellom $T(m+n)$ og $T(m)+T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

b) Sett $m = 2$ og $n = 8$ og bruk tabellen i oppgave a) til å regne ut

$T(2+8)$,
$T(2)+T(8)$ og
$T(2+8) - (T(2)+T(8))$

Sett inn andre verdier for m og n og undersøk hva $T(m+n) - (T(m)+T(n))$ blir.
Prøv å formulere en generell regel.

c) Bruk formelen for $T(n)$ til å skrive uttrykket

$$T(m+n) - (T(m)+T(n))$$

så enkelt som mulig.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet