Utdanningsdirektoratet

Eksamen

28.11.2014

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet • Hubbert: www.hubbertpeak.com/hubbert/ (23.08.2014)

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 3\ln(x+2)$

b) $g(x) = x \cdot \ln(3x)$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Forklar korleis vi kan avgjere om brøken nedanfor kan forkortast, utan å utføre forkortinga.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x-3}$$

Forkort brøken.

Oppgåve 3 (3 poeng)

a) Bestem eit uttrykk for summen $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{a}{2^{n-1}}$

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \ldots$

b) Grunngi kvifor rekkja konvergerer.

c) Bestem a slik at summen av rekkja blir 10.

Oppgåve 4 (5 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem ved rekning nullpunkta til f.

b) Bestem ved rekning eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c) Bestem ved rekning vendepunktet på grafen til f.

d) Lag ei skisse av grafen til f.

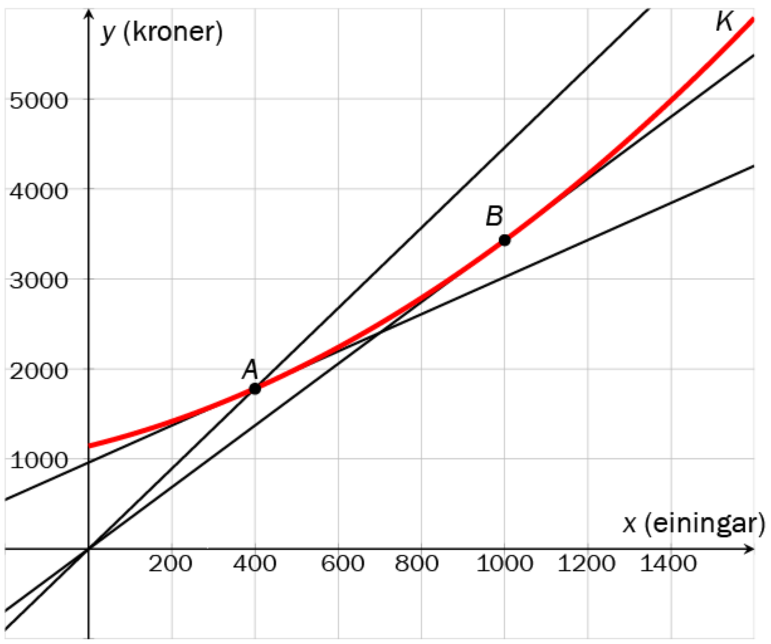
Oppgåve 5 (5 poeng)

I koordinatsystemet nedanfor ser du grafen til ein kostnadsfunksjon K, markert med raudt på figuren. Det er også teikna inn tre rette linjer. Desse har likningane

$$y = 4{,}46x \,, \quad y = 3{,}43x \qquad \text{og} \quad y = 2{,}06x + 960$$

To av linjene tangerer grafen til funksjonen $y = K(x)$ i høvesvis A og B.

Einingskostnaden ved produksjon av x einingar er $\dfrac{K(x)}{x}$.



a) Bestem einingskostnaden ved produksjon av 400 einingar.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 400 einingar er 2,06 kroner per eining.

c) Bestem den minste einingskostnaden.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ein stokastisk variabel X har denne sannsynsfordelinga:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien er $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{2}$ og at variansen er $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{7}{12}$.

a) Vis at desse opplysningane gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} a+b+c&=1 \\ -a \qquad +c&=\frac{1}{2} \\ 27a+3b+3c&=7 \end{aligned}$$

b) Bestem verdien av a, b og c.

Oppgåve 7 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-2 \qquad , \qquad D_f=\mathbb{R}$$

Bestem kva punkt på grafen til f som har tangent med stigingstal lik 2.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (7 poeng)

La x vere talet på produserte og selde einingar for ei bedrift. Samanhengen mellom x og prisen per eining er

$$p(x) = 500 - 0{,}1x$$

a) Bestem eit uttrykk for inntekta $I(x)$.

Tabellen nedanfor viser kostnaden ved produksjon av x einingar for ein del verdiar for x.

x	500	1000	1500	2000	2500
$K(x)$	92 300	195 000	310 000	461 000	641 000

b) Bruk tabellen til å lage ein modell for kostnadsfunksjonen K.

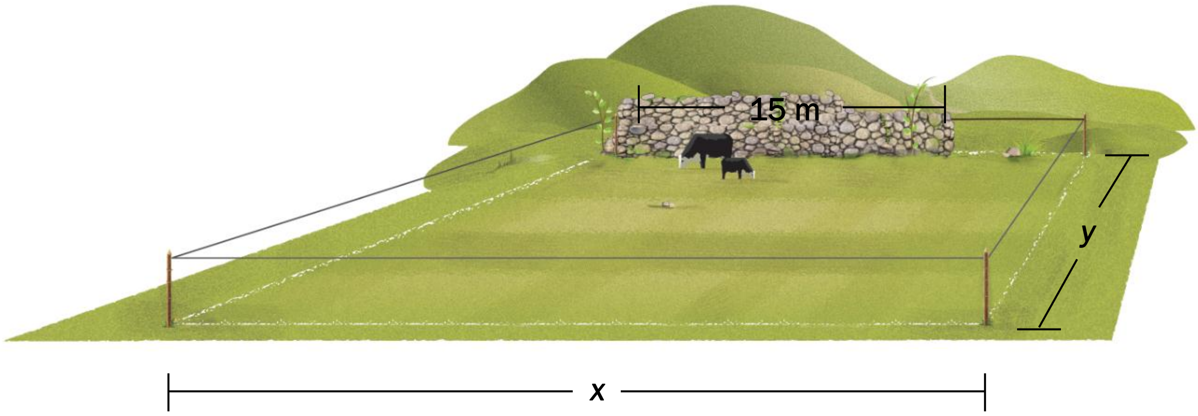
c) Bestem eit uttrykk for overskotet $O(x)$. Bruk $O'(x)$ til å bestemme den produksjonsmengda som gir størst overskot.

d) Forklar kvifor løysinga av likninga $K'(x) = I'(x)$ gir same resultat som i oppgåve c).

Oppgåve 2 (5 poeng)

Ein bonde skal gjerde inn kyrne sine på eit rektangelforma område. Området skal vere på $625\ \text{m}^2$. Bonden skal bruke ein 15 m lang steinmur som ein del av inngjerdinga.

Sjå skissa nedanfor.



a) Vis at ein funksjon G som beskriv lengda av gjerdet kan skrivast som

$$G(x) = \frac{2x^2 - 15x + 1250}{x} \quad \text{når} \quad x > 15$$

b) Bestem kor langt gjerde bonden må bruke dersom han skal bruke kortast mogleg gjerde. Kva form har da området til bonden?

Oppgåve 3 (4 poeng)

Katrine sette inn 20 000 kroner på konto kvart år, første gong 1. januar 2007 og siste gong 1. januar 2010. Innskotsrenta var heile tida 3,5 % per år. Alle innskota stod urørte.

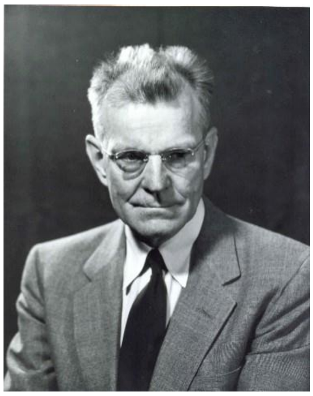
a) Kor mykje hadde Katrine på sparekontoen i banken 31. desember 2010?

1. januar 2011 blei innskotsrenta sett ned til 3,0 % per år.

b) Katrine sette ikkje fleire pengar i banken, men tok i staden ut 8000 kroner kvart år, første gong 1. januar 2011 og siste gong 1. januar 2014.

Kor mykje hadde Katrine på sparekontoen 31. desember 2014?

Oppgåve 4 (6 poeng)



M.K. Hubbert
(1903 - 1989)

Den amerikanske geofysikaren Marion King Hubbert lanserte i 1956 denne modellen for verdas årlege oljeproduksjon:

$$V(t) = \frac{3400 \cdot e^{-0{,}051 \cdot t}}{(1 + 56 \cdot e^{-0{,}051 \cdot t})^2}$$

Her er $V(t)$ talet på milliardar fat olje som blir produsert i år t etter 1930.
For eksempel er $V(5)$ talet på milliardar fat som blei produserte i 1935.

a) Teikn grafen til V.

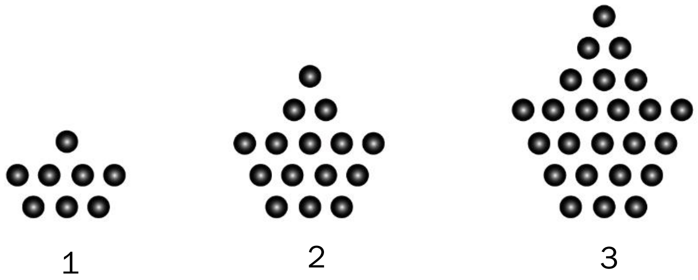
b) Når vil produksjonen vere 10 milliardar fat per år ifølgje modellen?

c) Kva år vil produksjonen vere størst?

d) Kva vil den totale produksjonen av olje vere i åra frå og med 1930 til og med 2014?

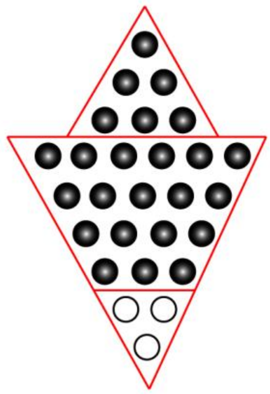
Oppgåve 5 (6 poeng)

Båttala B_n er talet på prikkar i figurane nedanfor. Vi ser at $B_1 = 8$ og $B_2 = 15$.



a) Bestem B_4 .

Mathias ser at han kan dele kvar figur i to bitar slik at han får ein trekant og ein del av ein større trekant.



Ut frå dette ser han at $B_n = T_n + T_{n+3} - 3$, der $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

b) Bruk dette til å bestemme B_5.

c) Bestem ein formel for B_n uttrykt ved n.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Ein fabrikk produserer juice i kartongar. Kvar kartong skal innehalde ca. 0,33 L juice. I denne oppgåva tenkjer vi at innhaldet i boksane er normalfordelte med forventningsverdi 0,33 L og standardavvik på 0,03 L.

a) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald kartong inneheld meir enn 0,36 L.

b) Kor mange prosent av kartongane vil innehalde mellom 0,32 L og 0,34 L?

I ein kvalitetskontroll inneheldt 25 tilfeldige kartongar gjennomsnittleg 0,292 L juice.

c) Set opp hypotesar og vurder om bedrifta i snitt tappar for lite juice på kartongane.
Bruk eit signifikansnivå på 5 %.

Bedrifta synest det er uheldig at så mange kundar får for lite juice i kartongane. Dei kan ikkje gjere noko med standardavviket, sidan det er bestemt av produksjonsutstyret. Likevel ønskjer dei at ca. 90 % av alle kartongane skal innehalde meir enn 0,32 L juice. Dette kan dei få til ved å i snitt tappe meir juice på kvar kartong.

d) Kva må forventningsverdien vere for å få dette til?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet • Hubbert: www.hubbertpeak.com/hubbert/ (23.08.2014)

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\ln(x+2)$

b) $g(x) = x \cdot \ln(3x)$

Oppgave 2 (2 poeng)

Forklar hvordan vi kan avgjøre om brøken nedenfor kan forkortes, uten å utføre forkortingen.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x - 3}$$

Forkort brøken.

Oppgave 3 (3 poeng)

a) Bestem et uttrykk for summen $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{a}{2^{n-1}}$

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \ldots$

b) Begrunn hvorfor rekken konvergerer.

c) Bestem a slik at summen av rekken blir 10.

Oppgave 4 (5 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem ved regning nullpunktene til f.

b) Bestem ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Bestem ved regning vendepunktet på grafen til f.

d) Lag en skisse av grafen til f.

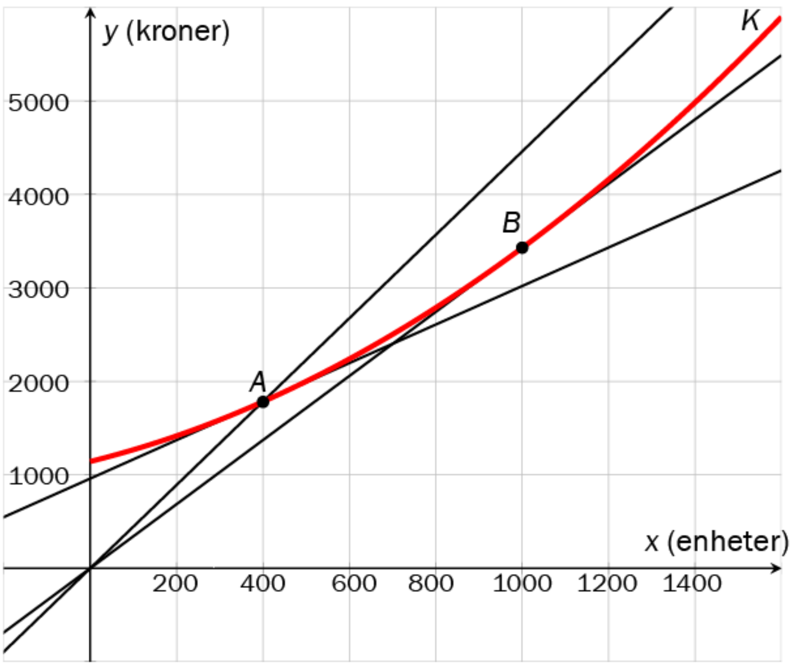
Oppgave 5 (5 poeng)

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en kostnadsfunksjon K, markert med rødt på figuren. Det er også tegnet inn tre rette linjer. Disse har likningene

$$y = 4{,}46x\,, \quad y = 3{,}43x \qquad \text{og} \quad y = 2{,}06x + 960$$

To av linjene tangerer grafen til funksjonen $y = K(x)$ i henholdsvis A og B.

Enhetskostnaden ved produksjon av x enheter er $\dfrac{K(x)}{x}$.



a) Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er 2,06 kroner per enhet.

c) Bestem den minste enhetskostnaden.

Oppgave 6 (4 poeng)

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien er $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}$ og at variansen er $\mathrm{Var}(X)=\frac{7}{12}$.

a) Vis at disse opplysningene gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} a+b+c&=1 \\ -a \qquad +c&=\frac{1}{2} \\ 27a+3b+3c&=7 \end{aligned}$$

b) Bestem verdien av a, b og c.

Oppgave 7 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-2 \qquad , \qquad D_f=\mathbb{R}$$

Bestem hvilke punkter på grafen til f som har tangent med stigningstall lik 2.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter for en bedrift. Sammenhengen mellom x og prisen per enhet er

$$p(x) = 500 - 0{,}1x$$

a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.

Tabellen nedenfor viser kostnaden ved produksjon av x enheter for en del verdier for x.

x	500	1000	1500	2000	2500
$K(x)$	92 300	195 000	310 000	461 000	641 000

b) Bruk tabellen til å lage en modell for kostnadsfunksjonen K.

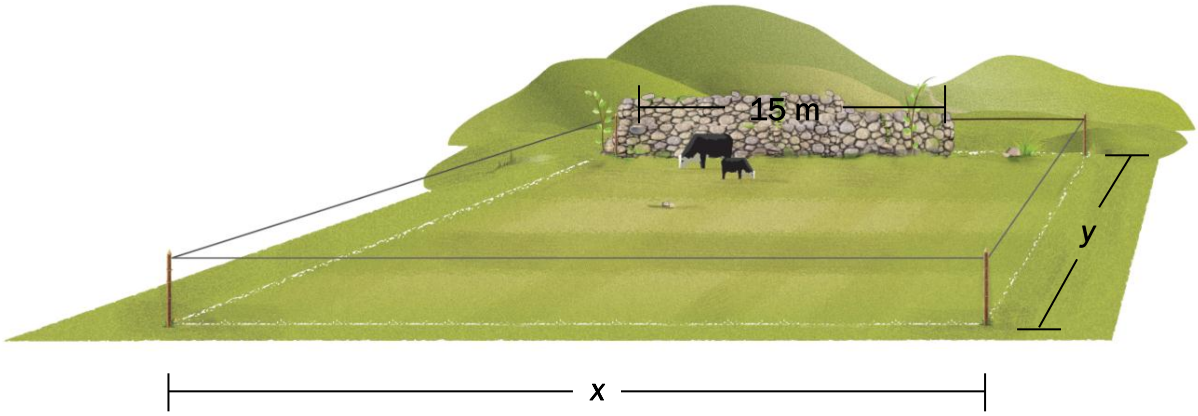
c) Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bruk $O'(x)$ til å bestemme den produksjonsmengden som gir størst overskudd.

d) Forklar hvorfor løsningen av likningen $K'(x) = I'(x)$ gir samme resultat som i oppgave c).

Oppgave 2 (5 poeng)

En bonde skal gjerde inn kuene sine på et rektangelformet område. Området skal være på $625\ \text{m}^2$. Bonden skal bruke en 15 m lang steinmur som en del av inngjerdingen.

Se skissen nedenfor.



a) Vis at en funksjon G som beskriver lengden av gjerdet kan skrives som

$$G(x) = \frac{2x^2 - 15x + 1250}{x} \quad \text{når} \quad x > 15$$

b) Bestem hvor langt gjerde bonden må bruke dersom han skal bruke kortest mulig gjerde. Hvilken form har da området til bonden?

Oppgave 3 (4 poeng)

Katrine satte inn 20 000 kroner på konto hvert år, første gang 1. januar 2007 og siste gang 1. januar 2010. Innskuddsrenten var hele tiden 3,5 % per år. Alle innskuddene sto urørt.

a) Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen i banken 31. desember 2010?

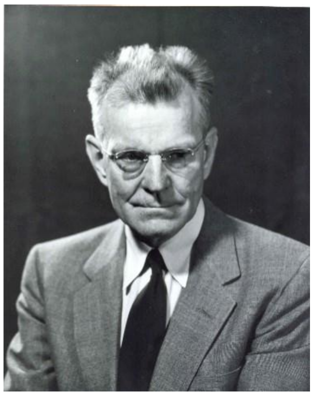
1. januar 2011 ble innskuddsrenten satt ned til 3,0 % per år.

b) Katrine satte ikke flere penger i banken, men tok i stedet ut 8000 kroner hvert år, første gang 1. januar 2011 og siste gang 1. januar 2014.

Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen 31. desember 2014?

Oppgave 4 (6 poeng)

Den amerikanske geofysikeren Marion King Hubbert lanserte i 1956 følgende modell for verdens årlige oljeproduksjon:



M.K. Hubbert
(1903 - 1989)

$$V(t) = \frac{3400 \cdot e^{-0,051 \cdot t}}{(1 + 56 \cdot e^{-0,051 \cdot t})^2}$$

Her er $V(t)$ antall milliarder fat olje som produseres i år t etter 1930.
For eksempel er $V(5)$ antall milliarder fat som ble produsert i 1935.

a) Tegn grafen til V .

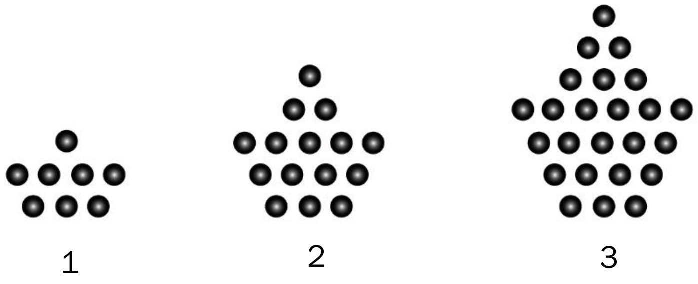
b) Når vil produksjonen være 10 milliarder fat per år ifølge modellen?

c) Hvilket år vil produksjonen være størst?

d) Hva vil den totale produksjonen av olje være i årene fra og med 1930 til og med 2014?

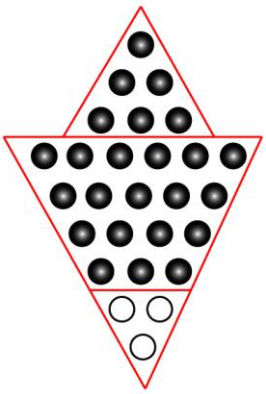
Oppgave 5 (6 poeng)

Båttallene B_n er antall prikker i figurene nedenfor. Vi ser at $B_1 = 8$ og $B_2 = 15$.



a) Bestem B_4 .

Mathias ser at han kan dele hver figur i to biter slik at han får en trekant og en del av en større trekant.



Ut fra dette ser han at $B_n = T_n + T_{n+3} - 3$, der $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

b) Bruk dette til å bestemme B_5.

c) Bestem en formel for B_n uttrykt ved n.

Oppgave 6 (8 poeng)

En fabrikk produserer juice i kartonger. Hver kartong skal inneholde ca. 0,33 L juice. I denne oppgaven tenker vi at innholdet i boksene er normalfordelt med forventningsverdi 0,33 L og standardavvik på 0,03 L.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kartong inneholder mer enn 0,36 L?

b) Hvor mange prosent av kartongene vil inneholde mellom 0,32 L og 0,34 L?

I en kvalitetskontroll inneholdt 25 tilfeldige kartonger gjennomsnittlig 0,292 L juice.

c) Sett opp hypoteser og vurder om bedriften i snitt tapper for lite juice på kartongene. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Bedriften synes det er uheldig at så mange kunder får for lite juice i kartongene. De kan ikke gjøre noe med standardavviket, siden det er bestemt av produksjonsutstyret. Likevel ønsker de at ca. 90 % av alle kartongene skal inneholde mer enn 0,32 L juice. Dette kan de få til ved å i snitt tappe mer juice på hver kartong.

d) Hva må forventningsverdien være for å få dette til?

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet