Utdanningsdirektoratet

Eksamen

20.05.2009

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Bruk av kjelder:	Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal oppgivast på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må oppgi forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal heile adressa og nedlastingsdato oppgivast. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med www.wikipedia.no.
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Illustrasjonen på framsida er henta frå www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel sette Norge på verdskartet i matematikk.

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonane:

1) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)$

2) $g(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

b)

1) Gitt rekkja $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$

Finn ledd nummer 20 og summen av dei 20 første ledda.

2) Gitt den uendelege rekkja $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Avgjer om rekkja konvergerer. Finn eventuelt summen.

c) Vi har ein spesiell terning. På tre av sidene står talet 7, på to av sidene står talet 5, og på den siste sida står talet -1. La den stokastiske variabelen X vere talet som blir vist når vi kastar terningen éin gong.

1) Set opp ei sannsynsfordeling for X.

2) Bestem forventningsverdi og varians for X.

d) Tre venner handla frukt. Kari kjøpte 2 kg eple, 3 kg pærer og 1 kg appelsinar. Ho betalte 81 kroner. Per kjøpte 1 kg eple, 2 kg pærer og 3 kg appelsinar. Han betalte 71 kroner. Lise kjøpte 1 kg av kvar av fruktsortane. Ho måtte betale 37 kroner.

Set opp eit likningssett, og finn kiloprisen for eple, pærer og appelsinar.

e) Grafen til ein polynomfunksjon f av tredje grad skjer x-aksen i $x_1 = -1$, i $x_2 = 1$ og i $x_3 = 3$ og y-aksen i $y = 6$. Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$.

Oppgåve 2

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

a) Vis at $f(x)$ er deleleg med $(x+2)$.

b) Løys likninga $f(x) = 0$.

c) Løys likninga $f'(x) = 1$. Gi ei grafisk tolking av resultatet.

d) Bestem x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f.

Del 2

Oppgåve 3

Anne vil spare for å kjøpe bil. Ho set inn 20 000 kroner på ein bankkonto i byrjinga av kvart år. Renta er 6 % per år i heile spareperioden.

a) Finn ut kor mykje som står på kontoen rett etter at det fjerde beløpet er sett inn. Set opp eit uttrykk for kor mykje som står på Annes konto rett etter at det *n*-te beløpet er sett inn.

Bilen ho vil kjøpe, kostar 330 000 kroner.

b) Kor lenge må Anne spare før det er 330 000 kroner på kontoen?

Anne ønskjer å kunne kjøpe bilen like etter at det 10. beløpet er sett inn.

c) Kor stort beløp må ho da setje inn på kontoen i byrjinga av kvart år?

Oppgåve 4

Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneheld delar av begge,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

<u>Alternativ I</u>

Gitt funksjonen

$$f(x) = x^5 \cdot e^{-2x} \qquad D_f = \langle 0, 10 \rangle$$

a) Teikn grafen til f.

b) Bestem $f'(x)$, og bruk denne til å finne eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

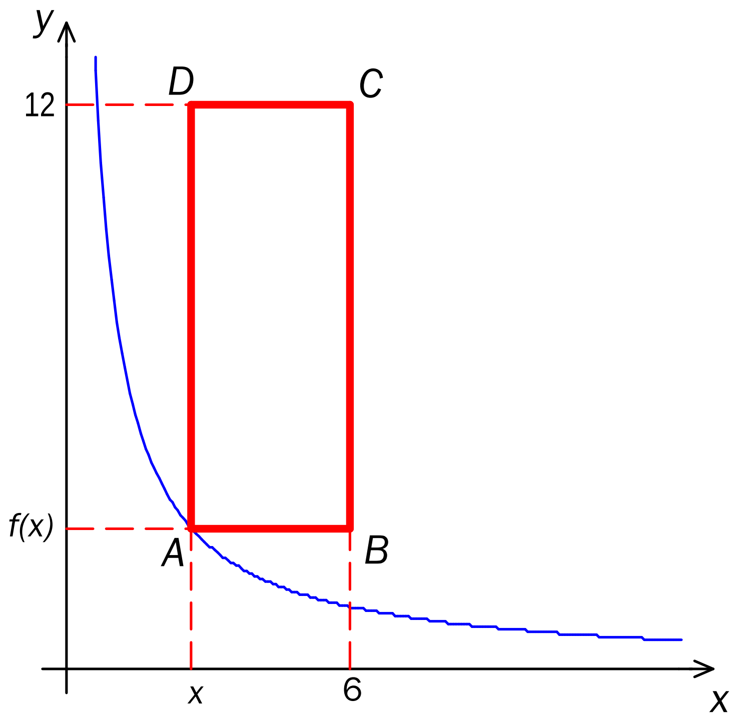
c) Finn ved rekning det punktet på grafen til f der $f'(x)$ er minst.

Ein bensinstasjon har ope sju dagar i veka. Funksjonen $g(x) = 50 \cdot f(x)$ er ein modell som viser talet på selde einingar av ei bestemt vare x dagar etter at vara blir lagd ut for sal. Salet varer i 10 dagar.

d) Kva for ein dag er salet størst, og kva for ein dag aukar salet mest?

Alternativ II

I deler av denne oppgåva er det ein fordel å bruke digitalt verktøy.



På figuren ovanfor har vi teikna grafen til $f(x) = \dfrac{8}{x}$ for $x > 0$, og eit rektangel $ABCD$. Punktet $A\big(x,\ f(x)\big)$ ligg på grafen til f og til venstre for B. Punkta B og C har førstekoordinat 6, og punkta C og D har andrekoordinat 12. Sjå figuren.

a) Bestem lengda av linjestykka AB og AD uttrykt ved x.

b) Vis at arealet av rektanglet kan skrivast som

$$F(x) = 80 - 12x - \frac{48}{x}$$

Kva er definisjonsmengda til *F?*

c) Bestem det største arealet rektanglet kan få.

d) Undersøk om rektanglet med størst areal også har størst omkrins.

Oppgåve 5

Trekanttal kan illustrerast som talet på golfballar som dannar ein trekantfigur. Figuren nedanfor viser dei tre første trekanttala a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttala.

a) Skriv opp dei seks første trekanttala a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 og a_6 og dei fem første summane S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5.

Nedanfor er eit utsnitt av Pascals trekant. Skriv av dette utsnittet i svaret ditt, og marker der dei seks første trekanttala og dei fem første summane.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+\cdots+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk digitale hjelpemiddel, og finn summen av dei 50 første trekanttala.

I Pascals trekant er n-te rad gitt ved binomialkoeffisientane $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n}$.

d) Bruk Pascals trekant og det du fann i a) til å forklare at

$$a_n = \binom{n+1}{2} \quad \text{og} \quad S_n = \binom{n+2}{3}$$

Oppgåve 6

Oppgåve 6 tel omtrent som 3 delspørsmål.

Leiinga i eit fylke ønskjer å auke delen av seksarar til eksamen. Tidlegare har i gjennomsnitt 4,3 % av eksamenskarakterane vore seksarar. Etter ei omlegging av undervisningsmetodane viste ei stikkprøve at 29 av 500 eksamensresultat var seksarar. Fylkesleiinga og elevorganisasjonen var usamde i om det gode resultatet kom av omlegginga av undervisningsmetodane, eller om det var tilfeldig.

Bruk kunnskapane dine i statistikk og sannsynsrekning, og undersøk spørsmålet nærmare. Gjer greie for dei metodane du bruker, og dei føresetnadene du legg til grunn.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Bruk av kilder:	Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med www.wikipedia.no.
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Illustrasjonen på forsiden er hentet fra www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel satte Norge på verdenskartet i matematikk.

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)$

2) $g(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

b)

1) Gitt rekka $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$

Finn ledd nummer 20 og summen av de 20 første leddene.

2) Gitt den uendelige rekka $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Avgjør om rekka konvergerer. Finn eventuelt summen.

c) Vi har en spesiell terning. På tre av sidene står tallet 7, på to av sidene står tallet 5, og på den siste siden står tallet -1. La den stokastiske variabelen X være tallet som vises når vi kaster terningen én gang.

1) Sett opp en sannsynlighetsfordeling for X.

2) Bestem forventningsverdi og varians for X.

d) Tre venner handlet frukt. Kari kjøpte 2 kg epler, 3 kg pærer og 1 kg appelsiner. Hun betalte 81 kroner. Per kjøpte 1 kg epler, 2 kg pærer og 3 kg appelsiner. Han betalte 71 kroner. Lise kjøpte 1 kg av hver av fruktsortene. Hun måtte betale 37 kroner.

Sett opp et likningssett, og finn kiloprisen for epler, pærer og appelsiner.

e) Grafen til en polynomfunksjon f av tredje grad skjærer x-aksen i $x_1 = -1$, i $x_2 = 1$ og i $x_3 = 3$ og y-aksen i $y = 6$. Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$.

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

a) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+2)$.

b) Løs likningen $f(x) = 0$.

c) Løs likningen $f'(x) = 1$. Gi en grafisk tolkning av resultatet.

d) Bestem *x*-koordinaten til vendepunktet på grafen til f.

Del 2

Oppgave 3

Anne vil spare for å kjøpe bil. Hun setter inn 20 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Renten er 6 % per år i hele spareperioden.

a) Finn ut hvor mye som står på kontoen rett etter at det fjerde beløpet er satt inn. Sett opp et uttrykk for hvor mye som står på Annes konto rett etter at det *n*-te beløpet er satt inn.

Bilen hun vil kjøpe, koster 330 000 kroner.

b) Hvor lenge må Anne spare før det er 330 000 kroner på kontoen?

Anne ønsker å kunne kjøpe bilen like etter at det 10. beløpet er satt inn.

c) Hvor stort beløp må hun da sette inn på kontoen i begynnelsen av hvert år?

Oppgave 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

<u>Alternativ I</u>

Gitt funksjonen

$$f(x) = x^5 \cdot e^{-2x} \qquad D_f = \langle 0, 10 \rangle$$

a) Tegn grafen til f.

b) Bestem $f'(x)$, og bruk denne til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

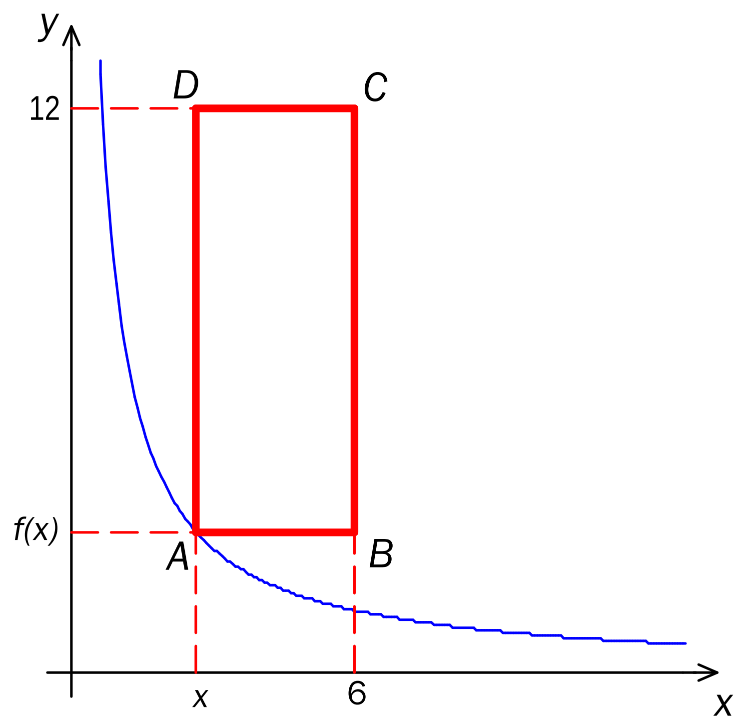
c) Finn ved regning det punktet på grafen til f der $f'(x)$ er minst.

En bensinstasjon har åpent sju dager i uka. Funksjonen $g(x) = 50 \cdot f(x)$ er en modell som viser antall solgte enheter av en bestemt vare x dager etter at varen blir lagt ut for salg. Salget varer i 10 dager.

d) Hvilken dag er salget størst, og hvilken dag øker salget mest?

<u>Alternativ II</u>

I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy.



På figuren ovenfor har vi tegnet grafen til $f(x) = \dfrac{8}{x}$ for $x > 0$, og et rektangel $ABCD$.
Punktet $A\big(x,\ f(x)\big)$ ligger på grafen til f og til venstre for B. Punktene B og C har førstekoordinat 6, og punktene C og D har andrekoordinat 12. Se figuren.

a) Bestem lengden av linjestykkene AB og AD uttrykt ved x.

b) Vis at arealet av rektanglet kan skrives som

$$F\left(x\right) = 80 - 12x - \frac{48}{x}$$

Hva er definisjonsmengden til *F?*

c) Bestem det største arealet rektanglet kan få.

d) Undersøk om rektanglet med størst areal også har størst omkrets.

Oppgave 5

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttallene.

a) Skriv opp de seks første trekanttallene a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 og a_6 og de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5.

Nedenfor er et utsnitt av Pascals trekant. Skriv av dette utsnittet i besvarelsen din, og marker der de seks første trekanttallene og de fem første summene.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

b) Forklar at $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk digitale hjelpemidler, og finn summen av de 50 første trekanttallene.

I Pascals trekant er n-te rad gitt ved binomialkoeffisientene $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n}$.

d) Bruk Pascals trekant og det du fant i a) til å forklare at

$$a_n = \binom{n+1}{2} \quad \text{og} \quad S_n = \binom{n+2}{3}$$

Oppgave 6

Oppgave 6 teller omtrent som 3 delspørsmål.

Ledelsen i et fylke ønsker å øke andelen seksere til eksamen. Tidligere har i gjennomsnitt 4,3 % av eksamenskarakterene vært seksere. Etter en omlegging av undervisningsmetodene viste en stikkprøve at 29 av 500 eksamensresultater var seksere. Fylkesledelsen og elevorganisasjonen var uenige i om det gode resultatet skyldtes omleggingen av undervisningsmetodene, eller om det var en tilfeldighet.

Bruk dine kunnskaper i statistikk og sannsynlighetsregning, og undersøk spørsmålet nærmere. Gjør rede for hvilke metoder du bruker, og hvilke forutsetninger du legger til grunn.

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet