Utdanningsdirektoratet

Eksamen

26.05.2010

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar er tillatne.
Hjelpemiddel på del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du velje framgangsmåte sjølv. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil du òg kunne få noko utteljing ved å bruke ein alternativ metode.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det vil seie at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
2) $g(x) = 3 \cdot e^{x^2}$

b) Gitt den uendelege rekkja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Avgjer om rekkja konvergerer, og bestem eventuelt summen av rekkja.

c) Sannsynsfordelinga til ein stokastisk variabel X er gitt ved

x	-3	0	1	B
$P(X = x)$	0,2	0,1	A	0,3

Du får opplyst at $B > 1$

1) Bestem A og $P(X < 1)$
2) Bestem B når du får opplyst at $E(X) = 1{,}0$
3) Vis at variansen er $\mathrm{Var}(X) = 6{,}0$

d) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

1) Vis at $f(x)$ er deleleg med $(x+1)$
2) Løys likninga $f(x) = 0$

e) Ein polynomfunksjon f av andre grad er gitt ved

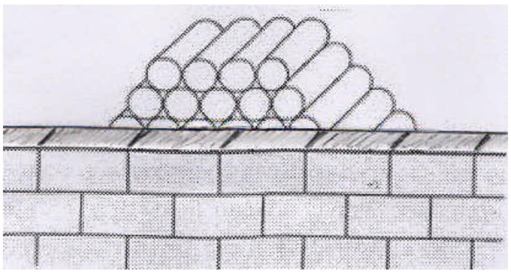
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Du får opplyst at $f(2) = -4$, $f'(2) = 0$ og $f''(2) = 8$.

1) Bestem funksjonsuttrykket til f.

2) Finn nullpunkta til f og eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

f)



Ein stabel med aluminiumsrøyr ligg delvis skjult bak ein murvegg.

1) La talet på røyr i rad nummer n ovanfrå vere a_n. Ta utgangspunkt i teikninga og forklar at

$$a_n = n + 3 \qquad \text{når} \qquad n \geq 1$$

2) Vis at talet på røyr til saman i dei n øvste radene er gitt ved

$$S_n = \frac{7n + n^2}{2}$$

3) Kor mange rader trengst for å få plass til 225 røyr?
(Du kan få bruk for at $\sqrt{1849} = 43$.)

Del 2

Oppgåve 2

Signe bestemmer seg for å spare pengar. Ho vil setje inn 30 000 kroner på ein bankkonto i byrjinga av kvart år. Det første beløpet skal setjast inn om eitt år. Renta er 4 % per år i heile spareperioden.

a) Kor mykje pengar har Signe på kontoen rett etter at ho har sett inn det åttande beløpet?

b) Finn ved rekning kor lenge Signe må spare for at det skal stå 400 000 kroner på kontoen.

c) Signe ønskjer å ha 400 000 kroner på kontoen like etter at ho har sett inn det åttande beløpet. Finn ved rekning kor mykje Signe i så fall må setje inn på kontoen kvart år.

Oppgåve 3

Ein stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu = 30$ og $\sigma = 2{,}5$.

a) Bestem $P(X \leq 31)$

b) Bestem $P(X > 28)$

Oppgåve 4

En grossist som sel jordbær, har over tid registrert at 10 % av jordbærkassene inneheld bær som er øydelagde. Ein dag mottek grossisten 50 kasser. Vi går ut frå at 10 % av kassene inneheld bær som er øydelagde.

a) Kva er sannsynet for at akkurat 5 av kassene har øydelagde bær?

b) Finn sannsynet for at minst 5 kasser inneheld øydelagde bær.

Grossisten får mistanke om at meir enn 10 % av kassene inneheld øydelagde bær. For å undersøkje forholdet nærmare kontrollerer han 90 kasser. Ved denne kontrollen viser det seg at 15 av dei 90 kassene inneheld bær som er øydelagde.

Vi lèt p vere sannsynet for at ei tilfeldig vald kasse inneheld øydelagde bær.

c) Set opp ein nullhypotese og ein alternativ hypotese som passar til denne problemstillinga. Forklar korleis du har tenkt.

d) Undersøk om resultatet av kontrollen gir grunnlag for å seie at kvaliteten på jordbæra er blitt dårlegare. Vel eit signifikansnivå på 5 %.

Oppgåve 5

Vi har gitt andregradsfunksjonen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000$$

a) Bestem $f'(x)$. Rekn ut $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$.

b) Forklar at rekkja $f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots$ er ei aritmetisk rekkje der første ledd er $a_1 = -2000$ og differansen er $d = 20$.

c) Vis at summen av dei n første ledda er gitt ved uttrykket

$$S_n = 10 \cdot n^2 - 2010 \cdot n$$

I eit land blei det eit år født $100\,000$ barn. Etter x år er talet på gjenlevande i dette kullet gitt ved modellen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000 \qquad \text{når} \quad x \in [0, 100]$$

d) Rekn ut $S_{100} = f'(0) + f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(99)$

Tolk svaret du kjem fram til.

Oppgåve 6

Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
Dei to alternativa tel like mykje ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneheld delar av begge alternativa,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Ved produksjon av ei vare er etterspørselen $E(p)$ einingar per veke uttrykt ved

$$E(p) = -0{,}5p + 80 \qquad p \in [10,\ 70]$$

Prisen p per eining er gitt i kroner.

Inntektene per veke kan uttrykkjast ved funksjonen $I(p)$. Produksjonen er lagd opp slik at det blir produsert like mange einingar som det blir selt. Kostnadene knytte til produksjonen er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 8x^2 - 1200x + 45600$$

der $x = E(p)$ er talet på produserte og selde einingar.

a) Vis at funksjonsuttrykka til $I(p)$ og $K(p)$ er gitt ved

$$I(p) = -0{,}5p^2 + 80p$$
$$K(p) = 2p^2 - 40p + 800$$

b) Kva for pris gir størst overskot?

c) Kor mange einingar per veke blir det produsert når overskotet er størst?

Ved produksjon av ei anna vare er etterspørselen per veke gitt ved

$$g(x) = 200 \cdot e^{0{,}02x} \qquad x \in [1,\ 26]$$

$x = 1$ tyder veke nr. 1, $x = 2$ tyder veke nr. 2 i produksjonstida osv.
Også for denne vara blir det produsert like mange einingar per veke som det blir selt.

d) Teikn grafen til g. I kva for veke er etterspørselen 270 einingar? Finn svaret både grafisk og ved rekning.

e) Kor mange einingar blir det produsert i løpet av det halve året?

Alternativ II

Ei bedrift produserer x einingar per dag av ei vare. Dei samla kostnadene per dag kan beskrivast ved funksjonen

$$K(x) = 1000 + \frac{8000}{1 + 70 \cdot e^{-0,15x}} \quad , \qquad x < 60$$

Kostnadene er gitt i kroner.

a) Teikn grafen til K.

b) Vis ved rekning at uttrykket for grensekostnaden kan skrivast

$$K'(x) = \frac{84\,000 \cdot e^{-0,15x}}{(1 + 70 \cdot e^{-0,15x})^2}$$

Bestem $K'(20)$ og forklar kva dette talet fortel.

c) Undersøk kva for produksjonsmengd som gir størst grensekostnad.
Finn den største grensekostnaden.

Vi går ut frå at heile produksjonen blir seld, og at samla inntekt ved sal av x einingar er

$$I(x) = 220x - x^2$$

d) Teikn grafen til I i same koordinatsystem som grafen til K. Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for at overskotet skal bli størst mogleg?

Bedrifta eksperimenterer med ulike modellar for inntektsfunksjonen. Dei tenkjer seg at samla inntekt ved sal av x einingar alltid kan beskrivast ved eit uttrykk på forma

$$h(x) = ax - x^2 \quad , \qquad \text{der } a \text{ er ein positiv konstant.}$$

e) Er det mogleg å oppnå overskot dersom $a = 120$?
Kva er den minste verdien a kan ha dersom bedrifta skal gå med overskot?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.
Hjelpemidler på del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du velge framgangsmåte selv. Hvis oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil du også kunne få noe uttelling for en alternativ metode.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan bruke fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
2) $g(x) = 3 \cdot e^{x^2}$

b) Gitt den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Avgjør om rekken konvergerer, og bestem eventuelt summen av rekken.

c) Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X er gitt ved

x	-3	0	1	B
$\text{P}(X = x)$	0,2	0,1	A	0,3

Du får opplyst at $B > 1$

1) Bestem A og $\text{P}(X < 1)$

2) Bestem B når du får opplyst at $\text{E}(X) = 1{,}0$

3) Vis at variansen er $\text{Var}(X) = 6{,}0$

d) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

1) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$
2) Løs likningen $f(x) = 0$

e) En polynomfunksjon f av andre grad er gitt ved

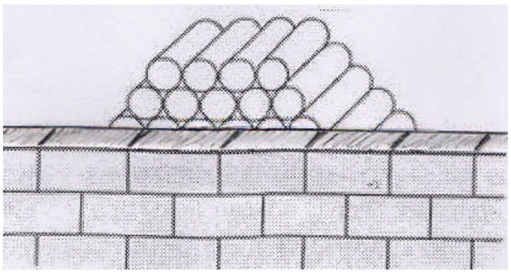
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Du får oppgitt at: $f(2) = -4$, $f'(2) = 0$ og $f''(2) = 8$.

1) Bestem funksjonsuttrykket til f.

2) Finn nullpunktene til f og eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

f)



En stabel med aluminiumsrør ligger delvis skjult bak en murvegg.

1) La antall rør i rad nummer n ovenfra være a_n. Ta utgangspunkt i tegningen og forklar at

$$a_n = n + 3 \qquad \text{når} \qquad n \geq 1$$

2) Vis at antall rør til sammen i de n øverste radene er gitt ved

$$S_n = \frac{7n + n^2}{2}$$

3) Hvor mange rader trengs for å få plass til 225 rør?
(Du kan få bruk for at $\sqrt{1849} = 43$.)

Del 2

Oppgave 2

Signe bestemmer seg for å spare penger. Hun vil sette inn 30 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet skal settes inn om ett år. Renten er 4 % per år i hele spareperioden.

a) Hvor mye penger har Signe på kontoen rett etter at hun har satt inn det åttende beløpet?

b) Finn ved regning hvor lenge Signe må spare for at det skal stå 400 000 kroner på kontoen.

c) Signe ønsker å ha 400 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn det åttende beløpet. Finn ved regning hvor mye Signe i så fall må sette inn på kontoen hvert år.

Oppgave 3

En stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu = 30$ og $\sigma = 2{,}5$.

a) Bestem $\mathrm{P}(X \leq 31)$

b) Bestem $\mathrm{P}(X > 28)$

Oppgave 4

En grossist som selger jordbær, har over tid registrert at 10 % av jordbærkassene inneholder bær som er ødelagt. En dag mottar grossisten 50 kasser. Vi antar at 10 % av kassene inneholder bær som er ødelagt.

a) Hva er sannsynligheten for at akkurat 5 av kassene har ødelagte bær?

b) Finn sannsynligheten for at minst 5 kasser inneholder ødelagte bær.

Grossisten får mistanke om at mer enn 10 % av kassene inneholder ødelagte bær. For å undersøke forholdet nærmere kontrollerer han 90 kasser. Ved denne kontrollen viser det seg at 15 av de 90 kassene inneholder bær som er ødelagt.

Vi lar p være sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kasse inneholder ødelagte bær.

c) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen. Forklar hvordan du har tenkt.

d) Undersøk om resultatet av kontrollen gir grunnlag for å si at kvaliteten på jordbærene har blitt dårligere. Velg et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 5

Vi har gitt andregradsfunksjonen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000$$

a) Bestem $f'(x)$. Regn ut $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$.

b) Forklar at rekken $f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots$ er en aritmetisk rekke der første ledd er $a_1 = -2000$ og differensen er $d = 20$.

c) Vis at summen av de n første leddene er gitt ved uttrykket

$$S_n = 10 \cdot n^2 - 2010 \cdot n$$

I et land ble det et år født $100\,000$ barn. Etter x år er antall gjenlevende i dette kullet gitt ved modellen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000 \qquad \text{når} \quad x \in [0,\, 100]$$

d) Regn ut $S_{100} = f'(0) + f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(99)$.

Tolk svaret du kommer fram til.

Oppgave 6

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Ved produksjon av en vare er etterspørselen $E(p)$ enheter per uke uttrykt ved

$$E(p) = -0{,}5p + 80 \qquad p \in [10,\ 70]$$

Prisen p per enhet er gitt i kroner.

Inntektene per uke kan uttrykkes ved funksjonen $I(p)$. Produksjonen legges opp slik at det produseres like mange enheter som det selges. Kostnadene knyttet til produksjonen er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 8x^2 - 1200x + 45600$$

der $x = E(p)$ er antall produserte og solgte enheter.

a) Vis at funksjonsuttrykkene til $I(p)$ og $K(p)$ er gitt ved

$$I(p) = -0{,}5p^2 + 80p$$
$$K(p) = 2p^2 - 40p + 800$$

b) Hvilken pris gir størst overskudd?

c) Hvor mange enheter per uke produseres det når overskuddet er størst?

Ved produksjon av en annen vare er etterspørselen per uke gitt ved

$$g(x) = 200 \cdot e^{0{,}02x} \qquad x \in [1,\ 26]$$

$x = 1$ betyr uke nr. 1, og $x = 2$ betyr uke nr. 2 i produksjonstiden osv.
Også for denne varen produseres det like mange enheter per uke som det selges.

d) Tegn grafen til g. I hvilken uke er etterspørselen 270 enheter? Finn svaret både grafisk og ved regning.

e) Hvor mange enheter produseres det i løpet av det halve året?

Alternativ II

En bedrift produserer x enheter per dag av en vare. De samlede kostnadene per dag kan beskrives ved funksjonen

$$K(x) = 1000 + \frac{8000}{1 + 70 \cdot e^{-0,15x}} \quad , \qquad x < 60$$

Kostnadene er gitt i kroner.

a) Tegn grafen til K.

b) Vis ved regning at uttrykket for grensekostnaden kan skrives

$$K'(x) = \frac{84\,000 \cdot e^{-0,15x}}{(1 + 70 \cdot e^{-0,15x})^2}$$

Bestem $K'(20)$ og forklar hva dette tallet forteller.

c) Undersøk hvilken produksjonsmengde som gir størst grensekostnad.
Finn den største grensekostnaden.

Vi går ut fra at hele produksjonen blir solgt, og at samlet inntekt ved salg av x enheter er

$$I(x) = 220x - x^2$$

d) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K. Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge per dag for at overskuddet skal bli størst mulig?

Bedriften eksperimenterer med ulike modeller for inntektsfunksjonen. De tenker seg at samlet inntekt ved salg av x enheter alltid kan beskrives ved et uttrykk på formen

$$h(x) = ax - x^2 \quad , \qquad \text{der } a \text{ er en positiv konstant.}$$

e) Er det mulig å oppnå overskudd hvis $a = 120$?
Hva er den minste verdien a kan ha dersom bedriften skal gå med overskudd?

(Blank side)

(Blank side)

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet