Utdanningsdirektoratet

# Eksamen

31.05.2011

## REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

# Nynorsk

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timar:<br>Del 1 skal leverast inn etter 2 timar.<br>Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar. |
| **Hjelpemiddel på Del 1:** | Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar. |
| **Hjelpemiddel på Del 2:** | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte:** | Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2.<br><br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.<br><br>Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing. |
| **Rettleiing om vurderinga:** | Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du<br><br>– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing<br>– gjennomfører logiske resonnement<br>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar<br>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel<br>– vurderer om svar er rimelege<br>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar<br>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar |

# DEL 1
## Utan hjelpemiddel

### Oppgåve 1 (18 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x)=2x^3-5x+3$

2) $g\left(x\right)=\dfrac{3}{x^3}$

3) $h\left(x\right)=x^2\cdot\ln x$

b) I ei aritmetisk talfølgje er $a_4=9$ og $a_{10}=21$.

Bestem $a_{15}$.

c) Forkort brøken

$$\frac{x^3-3x^2-13x+15}{x+3}$$

d) Forklar at den uendelege rekkja nedanfor konvergerer. Bestem summen

$$7+\frac{14}{9}+\frac{28}{81}+\frac{56}{729}+\cdots$$

e) Løys likninga $2^{x^2-2x}=8$

f) Vi har gitt sannsynsfordelinga

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

1) Finn forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$

2) Vis at variansen $\mathrm{Var}(X)=\frac{3}{4}$

Tre gutar har tre ulike typar myntar med ulik verdi i lommene. Tabellen under viser fordelinga av myntane.

| Namn | Talet på myntar av type 1 | Talet på myntar av type 2 | Talet på myntar av type 3 | Sum i kroner |
|---|---|---|---|---|
| Ola | 3 | 2 | 4 | 120 |
| Per | 2 | 3 | 2 | 75 |
| Inge | 2 | 5 | 3 | 105 |

g) Rekne ut verdien til dei tre mynttypane ved å løyse eit likningssystem.

## **Oppgåve 2** (6 poeng)

Trekanttala er gitt ved formelen $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, der $n$ er eit naturleg tal.

a) Skriv opp dei ti første trekanttala.

Inge påstår at summen av to ”nabo-trekanttal” alltid er eit kvadrattal.

b) Finn ut om dette gjeld for $a_{14} + a_{15}$ og for $a_{20} + a_{21}$.

c) Finn ut om $a_n + a_{n+1}$ alltid er eit kvadrattal.

# DEL 2
## Med hjelpemiddel

## Oppgåve 3 (9 poeng)

Vi skal undersøkje kostnader og inntekter for ei bedrift.

a) Forklar at overskotet for bedrifta er størst når grensekostnaden er lik grenseinntekta.

I bedrifta er dagsproduksjonen av ei vare $x$ einingar. Kostnadene per eining er gitt ved

$$E(x) = 0{,}15x + 7 + \frac{2000}{x} \qquad x \in [10,\ 300]$$

Etterspurnaden etter vara er så stor at alt som blir produsert, blir selt. Vara blir selt for 55 kroner per eining.

b) Finn funksjonsuttrykk for totalkostnaden $K$ og inntekta $I$ ved produksjon og sal av $x$ einingar.

c) Teikne grafane til funksjonane $K$ og $I$ i same koordinatsystem.

d) Bruk grafane til å bestemme kva for produksjonsmengder som gir overskot, og kva for produksjonsmengd som gir størst overskot.

e) Bestem ved rekning kor mange einingar som må produserast og seljast for at overskotet skal bli størst mogleg.

## Oppgåve 4 (4 poeng)

Tre påfølgjande kvadrattal kan alltid skrivast på formen $n^2$, $(n+1)^2$ og $(n+2)^2$
Med for eksempel $n=1$, får vi kvadrattala 1, 4 og 9.

Summen av tre påfølgjande kvadrattal er 365.

a) Set opp ei likning, løys likninga og bestem $n$ og dei tre kvadrattala.

Summen av to påfølgjande kvadrattal er 365.

b) Bestem $n$ og dei to kvadrattala.

## Oppgåve 5 (4 poeng)

Vi har gitt rekkja

$$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

a) 1) Bestem $S_{10}$

2) Finn eit uttrykk for $S_n$

b) Kor mange ledd må vi minst ta med for at $S_n$ skal overstige $1\,000\,000$?

## Oppgåve 6 (11 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x)=3^{\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)}-1 \quad , \quad D_f=R$$

a) Bestem nullpunkta til $f$ ved rekning.

b) Teikne grafen til $f$. Forklar kvifor grafen til $f$ ligg over linja $y=-1$.

c) Bruk kjerneregelen og vis ved rekning at $f'(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\ln 3\cdot 3^{\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)}$

d) Bestem ved rekning for kva verdier av $x$ grafen til $f$ veks, og for kva verdiar av $x$ grafen minkar. Bestem ved rekning topp- og botnpunkt på grafen til $f$.

e) Bruk digitale hjelpemiddel til å finne ein positiv verdi for $a$ slik at

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

## Oppgåve 7 (8 poeng)

Ved eit helsestudio registrerte dei kroppsvekta til alle dei 320 kundane.

Gjennomsnittsvekta var 79,2 kg med eit standardavvik på 6,4 kg. Vi går ut frå at kroppsvekta er normalfordelt.

a)

1) Kor stor del av kundane vog mellom 75,0 kg og 85,0 kg?
2) Kor stor del av kundane vog over 100,0 kg?

Helsestudioet vil undersøkje om treninga påverkar kroppsvekta. Dei veg derfor 30 tilfeldig valde kundar etter ein periode med jamleg trening. Gjennomsnittsvekta for desse 30 kundane er 76,0 kg. Vi går ut frå at standardavviket er uendra.

b) Set opp ein nullhypotese og ein alternativ hypotese som passar til denne problemstillinga.

c) Undersøk om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnittsvekta til kundane i helsestudioet har gått ned. Bruk eit signifikansnivå på 5 %.

# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.<br>Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer. |
| **Hjelpemidler på Del 1:** | Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler. |
| **Hjelpemidler på Del 2:** | Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte:** | Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.<br><br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.<br><br>Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. |
| **Veiledning om vurderingen:** | Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du<br><br>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse<br>– gjennomfører logiske resonnementer<br>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner<br>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler<br>– vurderer om svar er rimelige<br>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar<br>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger |

# DEL 1
## Uten hjelpemidler

## Oppgave 1 (18 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$

2) $g(x) = \dfrac{3}{x^3}$

3) $h(x) = x^2 \cdot \ln x$

b) I en aritmetisk tallfølge er $a_4 = 9$ og $a_{10} = 21$.
Bestem $a_{15}$.

c) Forkort brøken

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}{x + 3}$$

d) Forklar at den uendelige rekken nedenfor konvergerer. Bestem summen

$$7 + \frac{14}{9} + \frac{28}{81} + \frac{56}{729} + \cdots$$

e) Løs likningen $2^{x^2 - 2x} = 8$

f) Vi har gitt sannsynlighetsfordelingen

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

1) Finn forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$

2) Vis at variansen $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{4}$

Tre gutter har tre ulike typer mynter med ulik verdi i lommene. Tabellen nedenfor viser fordelingen av myntene.

| Navn | Antall mynter av type 1 | Antall mynter av type 2 | Antall mynter av type 3 | Sum i kroner |
|---|---|---|---|---|
| Ola | 3 | 2 | 4 | 120 |
| Per | 2 | 3 | 2 | 75 |
| Inge | 2 | 5 | 3 | 105 |

g) Regn ut verdien til de tre mynttypene ved å løse et likningssystem.

## Oppgave 2 (6 poeng)

Trekanttallene er gitt ved formelen $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, der $n$ er et naturlig tall.

a) Skriv opp de ti første trekanttallene.

Inge påstår at summen av to ”nabo-trekanttall” alltid er et kvadrattall.

b) Finn ut om dette gjelder for $a_{14} + a_{15}$ og for $a_{20} + a_{21}$.

c) Finn ut om $a_n + a_{n+1}$ alltid er et kvadrattall.

# DEL 2
## Med hjelpemidler

## Oppgave 3 (9 poeng)

Vi skal undersøke kostnader og inntekter for en bedrift.

a) Forklar at overskuddet for bedriften er størst når grensekostnaden er lik grenseinntekten.

I bedriften er dagsproduksjonen av en vare $x$ enheter. Kostnadene per enhet er gitt ved

$$E(x) = 0{,}15x + 7 + \frac{2000}{x} \qquad x \in [10,\ 300]$$

Etterspørselen etter varen er så stor at alt som produseres, blir solgt. Varen selges for 55 kroner per enhet.

b) Finn funksjonsuttrykk for totalkostnaden $K$ og inntekten $I$ ved produksjon og salg av $x$ enheter.

c) Tegn grafene til funksjonene $K$ og $I$ i samme koordinatsystem.

d) Bruk grafene til å bestemme hvilke produksjonsmengder som gir overskudd, og hvilken produksjonsmengde som gir størst overskudd.

e) Bestem ved regning hvor mange enheter som må produseres og selges for at overskuddet skal bli størst mulig.

## **Oppgave 4** (4 poeng)

Tre påfølgende kvadrattall kan alltid skrives på formen $n^2$, $(n+1)^2$ og $(n+2)^2$
Med for eksempel $n=1$, får vi kvadrattallene 1, 4 og 9.

Summen av tre påfølgende kvadrattall er 365.

a) Sett opp en likning, løs denne og bestem $n$ og de tre kvadrattallene.

Summen av to påfølgende kvadrattall er 365.

b) Bestem $n$ og de to kvadrattallene.

## **Oppgave 5** (4 poeng)

Vi har gitt rekken

$$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

a) 1) Bestem $S_{10}$

2) Finn et uttrykk for $S_n$

b) Hvor mange ledd må vi minst ta med for at $S_n$ skal overstige $1\,000\,000$?

## **Oppgave 6** (11 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = 3^{\frac{1}{3}\left(x^3 - 3x\right)} - 1 \quad , \quad D_f = R$$

a) Bestem nullpunktene til $f$ ved regning.

b) Tegn grafen til $f$. Forklar hvorfor grafen til $f$ ligger over linjen $y = -1$.

c) Bruk kjerneregelen og vis ved regning at $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \ln 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}\left(x^3 - 3x\right)}$

d) Bestem ved regning for hvilke verdier av $x$ grafen til $f$ vokser, og for hvilke verdier av $x$ grafen avtar. Bestem ved regning topp- og bunnpunkter på grafen til $f$.

e) Bruk digitale hjelpemidler til å finne en positiv verdi for $a$ slik at

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

## Oppgave 7 (8 poeng)

Ved et helsestudio registrerte de kroppsvekten til alle de 320 kundene.

Gjennomsnittsvekten var 79,2 kg med et standardavvik på 6,4 kg. Vi antar at kroppsvekten er normalfordelt.

a)

1) Hvor stor andel av kundene veide mellom 75,0 kg og 85,0 kg?
2) Hvor stor andel av kundene veide over 100,0 kg?

Helsestudioet vil undersøke om treningen påvirker kroppsvekten. De veier derfor 30 tilfeldig valgte kunder etter en periode med jevnlig trening. Gjennomsnittsvekten for disse 30 kundene er 76,0 kg. Vi antar at standardavviket er uendret.

b) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen.

c) Undersøk om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnittsvekten til kundene i helsestudioet har gått ned. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet