Utdanningsdirektoratet

Eksamen

04.06.2012

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x^3 + 2x + 3$

2) $g(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$

3) $h(x) = 3x \cdot \ln(2x)$

b) Vi har gitt rekkjene

1)	$2+4+6+8+10+\cdots$	Bruk formelen for S_n til å bestemme S_{10}
2)	$2+5+8+\cdots+89$	Bruk formlar og bestem summen til rekkja.
3)	$1+2+4+8+\cdots$	Bruk formelen for S_n til å bestemme S_8
4)	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Bestem summen til den uendelege rekkja.

c) Gitt funksjonen

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 \quad , \quad x \in \langle -1, 2 \rangle$$

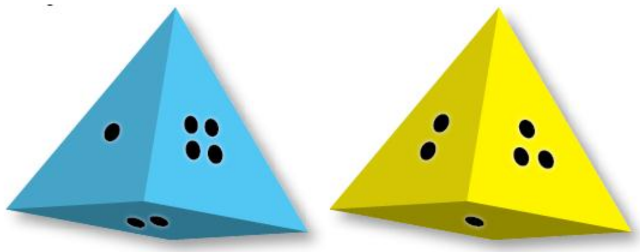
1) Løys likninga $f(x) = 0$

2) Bestem $f'(x)$, og teikn forteiknslinja til den deriverte.

3) Bruk forteiknslinja i 2) til å finne eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

4) Teikn ei skisse av grafen til f.

d) Overflata til eit tetraeder består av fire likesida trekantar. Dei ulike sidene er markerte med høvesvis 1, 2, 3 og 4 auge.



Vi kastar to slike «terningar».

La X vere summen av auga på dei to sidene som vender ned.

1) Skriv av og fyll ut tabellen:

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$					$\frac{3}{16}$		

2) Bestem forventingsverdien $\mathrm{E}(X)$.

e) Ein buss stoppa tre stader på ei rute. På den første haldeplassen kom det på ti barn, fire vaksne og tre pensjonistar. Til saman betalte dei 225 kroner. På neste stoppestad kom det på åtte barn, tre vaksne og to pensjonistar. Dei betalte til saman 170 kroner. På siste haldeplass kom det på ni barn, fire vaksne og tre pensjonistar. Dei betalte til saman 215 kroner.

Set opp og løys eit likningssystem, og bestem billettprisen for barn, vaksne og pensjonistar.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 2 (5 poeng)

Tal som kan skrivast på forma $T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$, kallar vi trekanttal.

a) Skriv opp dei fem første trekanttala.

Vi organiserer oddetala i ein taltrekant slik tabellen nedanfor viser.

n	a_n	a_n	a_n	S_n	S_n
1	1	1		1	
2	3 + 5	8		9	3^2
3	7 + 9 + 11	27	3^3	36	
4	13 + 15 + 17 + 19			100	
5	21 + 23 + 25 + 27 + 29				15^2

b) Skriv av og fyll ut tabellen.
Bruk mønsteret som kjem fram, til å finne ein formel for a_n .

c) Bruk mønsteret til å forklare at vi kan skrive

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

Oppgåve 3 (8 poeng)

Line arvar 100 000 kroner og vil spare pengane til ein ny bil. I byrjinga av eit år set ho dette beløpet på ein konto med fast årleg rente på 4,5 %. I tillegg bestemmer ho seg for å setje 12 000 kroner inn på kontoen i byrjinga av kvart av dei neste åra.

a) Kor mykje pengar står det på kontoen etter 3 år?

b) Kor mange år må ho spare dersom det skal stå 200 000 kroner på kontoen?

c) For å få råd til «draumebilen» må ho likevel låne 150 000 kroner til ei rente på 6,0 % per år. Ho vil bruke 5 år på å betale ned lånet. Det første avdraget betaler ho eitt år etter låneopptaket.

Kor mykje må ho betale kvart år?

d) Line synest at det årlege beløpet blir altfor høgt. Ho vil betale halvparten så mykje kvart år.

Kor lang tid tek det før lånet da er nedbetalt, dersom renta framleis er 6,0 % per år?

Oppgåve 4 (8 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1000}{10 + e^{(3,912 - 0,5x)}} \qquad x \geq 0$$

a) Vis ved rekning at $f(x)$ kan skrivast på forma $f(x) = \dfrac{100}{1 + 5,0 \cdot e^{-0,5x}}$

Funksjonsverdiane til f er talet på individ som har, eller har hatt, ein sjukdom x dagar etter at sjukdommen blei registrert første gongen.

b) Bestem kor mange som hadde sjukdommen da han blei registrert første gongen, ifølgje denne modellen.

c) Teikn grafen til f. Kor mange individ vil få sjukdommen i det lange løp?

d) Bestem kor mange som fekk sjukdommen den sjette dagen etter at sjukdommen blei registrert første gongen.

Oppgåve 5 (7 poeng)

PISA er ei internasjonal undersøking som blir gjennomført kvart tredje år blant skoleelevar i ei rekkje land. Ved undersøkinga i 2009 var det med 4 700 elevar frå Noreg. I naturfag scora dei norske elevane gjennomsnittleg 500 poeng. Det var nøyaktig likt det internasjonale gjennomsnittet. Standardavviket for norske elevar var 90 poeng.

Vi trekkjer tilfeldig ut ein elev blant dei norske deltakarane. I oppgåvene a) og b) kan du rekne med at poengsummen til eleven er normalfordelt med forventingsverdi 500 poeng og standardavvik 90 poeng.

a) Bestem sannsynet for at eleven scora minst 650 poeng.

b) Bestem sannsynet for at eleven scora mellom 475 og 535 poeng.

I verkelegheita kjenner vi ikkje forventa poengsum for norske elevar. Vi veit berre at gjennomsnittet var 500 poeng for dei 4 700 elevane som var med i undersøkinga.

c) Er det grunnlag for å seie at norske elevar var betre enn elevar frå land som scora 495 poeng? Vel sjølv signifikansnivå.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Kjelde: forum.vccn.no (10.12.2011)

Ein bil køyrer x km i løpet av t timar, der x er gitt ved

$$x(t) = 80t + 30 \cdot e^{-0,4t} - 30$$

a) Kor langt køyrer bilen i løpet av den første halvtimen?

b) Bruk digitalt verktøy, og bestem kor lang tid bilen bruker på dei første 500 km.

Det samla bensinforbruket b etter å ha køyrt x km er gitt ved

$$b(x) = 0,07 \cdot x \cdot (1 + e^{-0,5x})$$

der $b(x)$ er målt i liter.

c) Bestem $b'(x)$. Forklar kva for derivasjonsreglar du har brukt.

Kva er den praktiske betydninga av talet $b'(10)$?

Det kan visast at bensinforbruket f målt i liter per time etter t timar er

$$f(t) = b'(x) \cdot x'(t)$$

d) Bestem bensinforbruket per minutt når bilen har køyrt i ein halv time.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^3 + 2x + 3$

2) $g(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$

3) $h(x) = 3x \cdot \ln(2x)$

b) Vi har gitt rekkene

1) $2+4+6+8+10+\cdots$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_{10}

2) $2+5+8+\cdots+89$ Bruk formler og bestem summen til rekken.

3) $1+2+4+8+\cdots$ Bruk formelen for S_n til å bestemme S_8

4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ Bestem summen til den uendelige rekken.

c) Gitt funksjonen

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 \quad , \quad x \in \langle -1, 2 \rangle$$

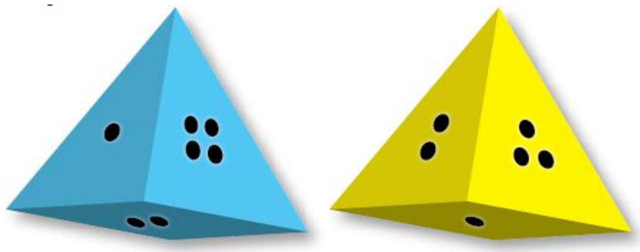
1) Løs likningen $f(x) = 0$

2) Bestem $f'(x)$, og tegn fortegnslinjen til den deriverte.

3) Bruk fortegnslinjen i 2) til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

4) Tegn en skisse av grafen til *f*.

d) Overflaten til et tetraeder består av fire likesidede trekanter. De ulike sidene er markert med henholdsvis 1, 2, 3 og 4 øyne.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

Vi kaster to slike «terninger».

La X være summen av antall øyne på de to sidene som vender ned.

1) Skriv av og fyll ut tabellen:

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$					$\frac{3}{16}$		

2) Bestem forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$.

e) En buss stoppet tre steder på en rute. På første holdeplass kom det på ti barn, fire voksne og tre pensjonister. Til sammen betalte disse 225 kroner. På neste stoppested kom det på åtte barn, tre voksne og to pensjonister. Disse betalte til sammen 170 kroner. På siste holdeplass kom det på ni barn, fire voksne og tre pensjonister. Disse betalte til sammen 215 kroner.

Sett opp og løs et likningssystem, og bestem billettprisen for barn, voksne og pensjonister.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (5 poeng)

Tall som kan skrives på formen $T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$, kalles for trekanttall.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene.

Vi organiserer oddetallene i en talltrekant slik tabellen nedenfor viser.

n	a_n	a_n	a_n	S_n	S_n
1	1	1		1	
2	3 + 5	8		9	3^2
3	7 + 9 + 11	27	3^3	36	
4	13 + 15 + 17 + 19			100	
5	21 + 23 + 25 + 27 + 29				15^2

b) Skriv av og fyll ut tabellen.
Bruk mønsteret som framkommer, til å finne en formel for a_n .

c) Bruk mønsteret til å forklare at vi kan skrive

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

Oppgave 3 (8 poeng)

Line arver 100 000 kroner og vil spare pengene til en ny bil. I begynnelsen av et år setter hun dette beløpet på en konto med fast årlig rente på 4,5 %. I tillegg bestemmer hun seg for å sette 12 000 kroner inn på kontoen i begynnelsen av hvert av de neste årene.

a) Hvor mye penger står det på kontoen etter 3 år?

b) Hvor mange år må hun spare dersom det skal stå 200 000 kroner på kontoen?

c) For å få råd til «drømmebilen» må hun likevel låne 150 000 kroner til en rente på 6,0 % per år. Hun vil bruke 5 år på å betale ned lånet. Det første avdraget betaler hun ett år etter låneopptaket.

Hvor mye må hun betale hvert år?

d) Line synes at det årlige beløpet blir altfor høyt. Hun vil betale halvparten så mye hvert år.

Hvor lang tid tar det før lånet da er nedbetalt, dersom renten fortsatt er 6,0 % per år?

Oppgave 4 (8 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1000}{10 + e^{(3{,}912 - 0{,}5x)}} \qquad x \geq 0$$

a) Vis ved regning at $f(x)$ kan skrives på formen $f(x) = \dfrac{100}{1 + 5{,}0 \cdot e^{-0{,}5x}}$

Funksjonsverdiene til f er antall individer som har, eller har hatt, en sykdom x dager etter at sykdommen ble registrert første gang.

b) Bestem hvor mange som hadde sykdommen da den ble registrert første gang, ifølge denne modellen.

c) Tegn grafen til f. Hvor mange individer vil få sykdommen i det lange løp?

d) Bestem hvor mange som fikk sykdommen den sjette dagen etter at sykdommen ble registrert første gang.

Oppgave 5 (7 poeng)

PISA er en internasjonal undersøkelse som blir gjennomført hvert tredje år blant skoleelever i en rekke land. Ved undersøkelsen i 2009 var det med 4 700 elever fra Norge. I naturfag scoret de norske elevene gjennomsnittlig 500 poeng. Det var nøyaktig likt det internasjonale gjennomsnittet. Standardavviket for norske elever var 90 poeng.

Vi trekker tilfeldig ut en elev blant de norske deltakerne. I oppgavene a) og b) kan du regne med at poengsummen til eleven er normalfordelt med forventningsverdi 500 poeng og standardavvik 90 poeng.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret minst 650 poeng.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret mellom 475 og 535 poeng.

I virkeligheten kjenner vi ikke forventet poengsum for norske elever. Vi vet bare at gjennomsnittet var 500 poeng for de 4 700 elevene som var med i undersøkelsen.

c) Er det grunnlag for å si at norske elever var bedre enn elever fra land som scoret 495 poeng? Velg selv signifikansnivå.

Oppgave 6 (8 poeng)

Kilde: forum.vccn.no (10.12.2011)

En bil kjører x km i løpet av t timer, der x er gitt ved

$$x(t) = 80t + 30 \cdot e^{-0,4t} - 30$$

a) Hvor langt kjører bilen i løpet av den første halvtimen?

b) Bruk digitalt verktøy, og bestem hvor lang tid bilen bruker på de første 500 km.

Det samlede bensinforbruket b etter å ha kjørt x km er gitt ved

$$b(x) = 0,07 \cdot x \cdot (1 + e^{-0,5x})$$

der $b(x)$ er målt i liter.

c) Bestem $b'(x)$. Forklar hvilke derivasjonsregler du har brukt.
Hva er den praktiske betydningen av tallet $b'(10)$?

Det kan vises at bensinforbruket f målt i liter per time etter t timer er

$$f(t) = b'(x) \cdot x'(t)$$

d) Bestem bensinforbruket per minutt når bilen har kjørt i en halv time.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet