# Eksamen våren 2015 – Løsninger

**DEL 1**
**Uten hjelpemidler**

*Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler*

## Oppgave 1

a
$f(x) = e^{-2x}$
$f'(x) = (-2x)' \cdot e^{-2x} = -2e^{-2x}$

b
$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
$g'(x) = \dfrac{(x^2-1)' \cdot x - (x^2-1) \cdot x'}{x^2} = \dfrac{2x \cdot x - (x^2-1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

c
$h(x) = (3x+1) \cdot e^x + 2$
$h'(x) = (3x+1)' \cdot e^x + (3x+1) \cdot (e^x)' + 0 = 3 \cdot e^x + (3x+1) \cdot e^x \cdot (x)' = 3e^x + 3xe^x + e^x = 4e^x + 3xe^x$

## Oppgave 2

a
Vi ser at funksjonen $f$ har nullpunktene $-3$, $-1$ og 3. Vi kan derfor faktoriser $f(x)$ i førstegradsfaktorene: $f(x) = (x-(-3))(x-(-1)(x-3) = (x+3)(x+1)(x-3)$

b
Vi ser at $f(-3) = 0$, $f(-1) = 0$ og $f(3) = 0$.
Vi kan derfor velge én av disse likningene for å finne $k$:
$f(3) = 3^3 + 3^2 + k \cdot 3 + k = 0$
$27 + 9 + 4k = 0$
$4k = -36$
$k = -9$

## Oppgave 3

a
En rekke er aritmetisk dersom det finnes et tall $d$ slik at hvert ledd i rekka er lik leddet foran pluss $d$. Hvis rekka $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ er aritmetisk, vil $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$ og $a_n = a_{n-1} + d$.

b
Vi kan se på veggen som en aritmetisk rekke, der hver rad med murstein er ett ledd i rekka. Den øverste raden kaller vi ledd nr. 1, den andre raden ledd nr. 2 osv. Vi ser at antall murstein øker med 1 per rekke, det betyr at $d = 1$. Vi har da at $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ og $a_n = n$, der $n$ er antall rader med murstein. Mureren vet at det er totalt 20 rader





med murstein, dvs. at $n = 20$. Vi setter inn $a_1 = 1$, $a_{20} = 20$ og $n = 20$ inn i sumformelen for en aritmetisk rekke, og får:
$S_{20} = \dfrac{1+20}{2} \cdot 20 = \dfrac{21}{2} \cdot 20 = \dfrac{420}{2} = 210$
Det betyr at mureren trenger 210 murstein til denne veggen.

## Oppgave 4

a
Vi gjør om leddene i rekka til desimaltall:
$\dfrac{5}{10} = 0{,}5$, $\dfrac{5}{10^2} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$, $\dfrac{5}{10^3} = \dfrac{5}{1000} = 0{,}005$, osv.
Når vi summerer disse leddene får vi $0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + ... = 0{,}555 + ...$.
Vi ser at ved å fortsette å summere leddene i denne rekka i det uendelige, vil vi få uendelig mange 5-tall etter komma.
I den uendelige geometriske rekka $\dfrac{5}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} + ...$ er $k = \dfrac{1}{10}$ og $a_1 = \dfrac{5}{10}$.
Fordi $-1 < k < 1$ konvergerer rekka.
Vi bruker sumformelen for en geometrisk rekke som konvergerer:
$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}.$$
Tallet $x = 0{,}555...$ kan derfor skrives som brøken $\dfrac{5}{9}$.

b
Tallet $y = 0{,}232323$ kan skrives som summen av den uendelige geometriske rekka $\dfrac{23}{100} + \dfrac{23}{100^2} + \dfrac{23}{100^3} + ...$ I denne rekka er $k = \dfrac{1}{100}$ og $a_1 = \dfrac{23}{100}$.
Vi bruker sumformelen for en uendelig geometrisk rekke som konvergerer:
$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{23}{99}.$$
Tallet $y$ kan derfor skrives som brøken $\dfrac{23}{99}$.

## Oppgave 5

a
$f(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 4 = -1 + 6 - 9 + 4 = 0$

Vi vet nå at divisjonen $f(x) : (x+1)$ går opp:
$(x^3 + 6x^2 + 9x + 4) : (x+1) = x^2 + 5x + 4$
$\underline{x^3 + x^2}$
$5x^2 + 9x + 4$
$\underline{5x^2 + 5x}$
$4x + 4$
$\underline{4x + 4}$
$0$

Vi finner de andre nullpunktene:

$x^2+5x+4=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}$$

$x=-4$ eller $x=-1$

Vi fant ett nytt nullpunkt: $-4$.

**b** Vi finner eventuelle topp- eller bunnpunkter ved å løse $f'(x)=0$:

$f'(x)=3x^2+12x+9$

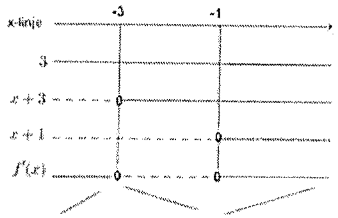
$3x^2+12x+9=0 \quad |:3$

$x^2+4x+3=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm2}{2}$$

$x=-3$ eller $x=-1$

$f'(x)=3(x+3)(x+1)$




Av fortegnslinja ser vi at grafen har et toppunkt når $x=-3$ og et bunnpunkt når $x=-1$.

$f(-3)=(-3)^3+6\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+4=-27+54-27+4=4$

$f(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+4=-1+6-9+4=0$

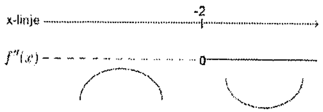
Toppunkt: $(-3\,,4)$ Bunnpunkt: $(-1\,,0)$

**c** $f''(x)=6x+12$

$6x+12=0$

$6x=-12$

$x=-2$




Av fortegnslinja for $f''(x)$ ser vi at grafen til $f$ har et vendepunkt for $x=-2$.

$f(-2)=(-2)^3+6\cdot(-2)^2+9\cdot(-2)+4=-8+24-18+4=2$

Vendepunktet er $(-2\,,2)$





**d** Vi har disse opplysningene:

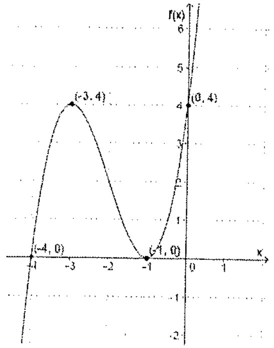
Nullpunkter: $-1$ og $-4$

Toppunkt: $(-3\,,4)$

Bunnpunkt: $(-1\,,0)$

Vendepunkt: $(-2\,,2)$. For vi lager skissen finner vi i tillegg skjæring med $y$-aksen:

$f(0)=0^3+6\cdot0^2+9\cdot0+4=4$




## Oppgave 6

**a** Vi vet at summen av sannsynlighetene for de mulige verdiene for den stokastiske variabelen $X$ er lik én:

$P(0)+P(1)+P(2)=1$

Dette gir oss den første likningen i likningssystemet: $a+b+c=1$

Forventningsverdien E($X$) er gitt ved: $\mu=E(X)=x_1\cdot P(X=x_1)+...+x_m\cdot P(X=x_m)$

$0\cdot a+b+2c=\frac{1}{2}$

Dette gir oss den andre likningen: $b+2c=\frac{1}{2}$

Variansen Var($X$) er gitt ved: $Var(X)=(x_1-\mu)^2\cdot P(X=x_1)+...+(x_m-\mu)^2\cdot P(X=x_m)$

Vi setter inn verdiene og får den tredje likningen:

$$\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot a+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot b+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\cdot c=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot a+\left(\frac{1}{4}\right)\cdot b+\left(\frac{9}{4}\right)\cdot c=\frac{1}{2} \quad |\cdot4$$

$a+b+9c=2$

**b** I: $a+b+c=1$

II: $b+2c=\frac{1}{2}$

III: $a+b+9c=2$

Av I: $a=1-b-c$

Inn i likning III:

$$1-b-c+b+9c=2$$
$$8c=1$$
$$c=\frac{1}{8}$$

Vi setter $c=\frac{1}{8}$ inn i likning II:

$$b+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Vi setter $c=\frac{1}{8}$ og $b=\frac{1}{4}$ inn i likning I:

$$a=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{8-2-1}{8}=\frac{5}{8}$$

Likningssettet har løsningen: $a=\frac{5}{8}$, $b=\frac{1}{4}$ og $c=\frac{1}{8}$.

## Oppgave 7

**a** Vi har at $X$ er normalfordelt med forventningsverdi $\mu=100$ og $\sigma=20$.

Vi definerer $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, som er standard normalfordelt.

Vi har da at $P(X\le 90)=P\left(Z\le\frac{90-100}{20}\right)=P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right)$.

Vi finner i tabellen at $P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right)=0,3085$.

Dette betyr at sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mindre enn 90 kg er ca. 31 %.

**b**

$$P(90\le X\le 110)=P\left(\frac{90-100}{20}\le\frac{Z-100}{20}\le\frac{110-100}{20}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\le Z<\frac{1}{2}\right)=P\left(Z\le\frac{1}{2}\right)-P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right)$$

Av tabellen finner vi at $P\left(Z\le\frac{1}{2}\right)=0,6915$

Det gir at $P\left(Z\le\frac{1}{2}\right)-P\left(Z\le-\frac{1}{2}\right)=0,6915-0,3085=0,383$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt hjortebukk veier mellom 90 og 110 kg, er ca. 38 %.





## Oppgave 8

Tegningene av de fire grafene viser tydelige asymptoter.
Vi finner derfor først ut hva funksjonsuttrykket $f(x)$ nærmer seg når $x$ vokser.

Når vi lar $x$ vokse mot uendelig, vil $e^{-x}$ nærme seg 0. Da nærmer $f(x)$ seg $\frac{100}{1+0}-25=100-25=75$.

Både graf 2, 3 og 4 har $y=75$ som vannrett asymptote.

Når vi lar $x$ vokse mot minus uendelig, vil $e^{-x}$ bli veldig stor, og $f(x)$ vil nærme seg $y=0-25=-25$.

Denne asymptoten finner vi kun hos graf 4, og vi kan derfor konkludere med at funksjonen $f$ tilhører graf 4.

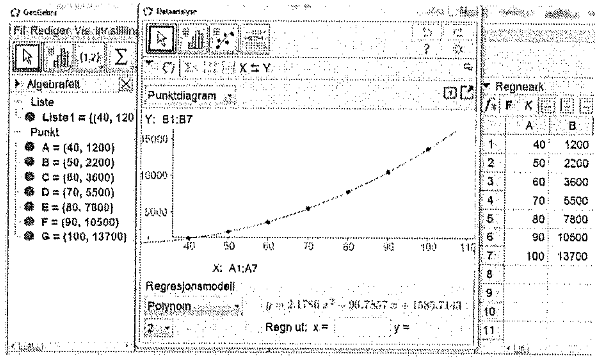
Når vi lar $x$ vokse mot uendelig i funksjonsuttrykket for $g$, ser vi at $e^{-(x-5)}$ går mot 0. Da nærmer $g(x)$ seg $\frac{100}{1+0}=100$. Det er bare graf 1 som har vannrett asymptote lik $y=100$, og derfor må funksjonen $g$ tilhøre graf 1.

# DEL 2
# Med hjelpemidler

*Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.*

## Oppgave 1

a Vi skriver inn verdiene i regnearket i GeoGebra, lager liste med punkter og velger regresjonsanalyse. Som regresjonsmodell velger vi polynom av andre grad.




Vi får et andregradsuttrykk som vi runder av til: $K(x) = 2{,}2x^2 - 97x + 1586$.

b $I(x) = p \cdot x$

Overskuddet er størst når $I'(x) = K'(x)$.

Vi løser denne likningen i CAS når $x = 75$.

| | CAS |
|---|---|
| 1 | K(x):=2.2x^2-97x+1586 <br> → $K(x) := \frac{11}{5} x^2 - 97x + 1586$ |
| 2 | I(x):=p*x <br> → $I(x) := p\,x$ |
| 3 | I'(75)=K'(75) <br> NLøs: $\{p = 233\}$ |

Vi ser at prisen på varen må være 233 kr for at overskuddet skal bli størst mulig.





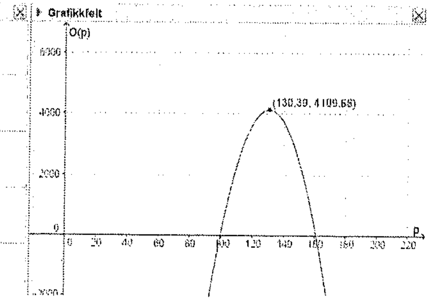
Vi beregner overskuddet:

| | |
|---|---|
| 3 | I(x):=233x <br> → $I(x) := 233\,x$ |
| 4 | K(x):=2.2x^2-97x+1586 <br> → $K(x) := 2.2\,x^2 - 97\,x + 1586$ |
| 5 | O(x):=I(x)-K(x) <br> → $O(x) := -2.2\,x^2 + 330\,x - 1586$ |
| 6 | O(75) <br> → 10789 |

Vi ser at overskuddet blir 10 789 kr.

c Vi definerer antall solgte $x$ enheter, som en funksjon av prisen: $e(p) = 200 - 1{,}2p$ og bruker CAS til å finne et uttrykk for $O(p)$. Vi finner deretter maksimalpunktet til denne overskuddsfunksjonen ved å skrive $O'(p) = 0$:

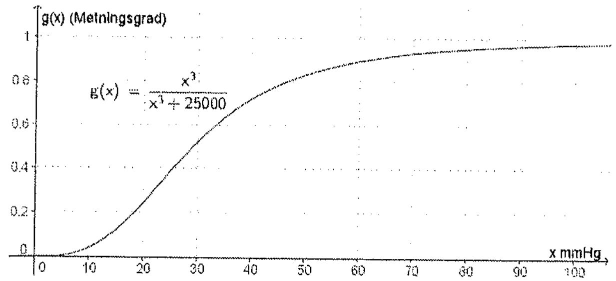
| | CAS |
|---|---|
| 1 | e(p):=200-1.2p <br> → $e(p) := -1.2\,p + 200$ |
| 2 | K(x):=2.2x^2-97x+1586 <br> → $K(x) := 2.2\,x^2 - 97\,x + 1586$ |
| 3 | K(e(p)) <br> → $3.17\,p^2 - 939.6\,p + 70186$ |
| 4 | O(p):=(200p-1.2p^2)-K(e(p)) <br> → $O(p) := -4.37\,p^2 + 1139.6\,p - 70186$ |
| 5 | O'(p)=0 <br> NLøs: $\{p = 130.39\}$ |



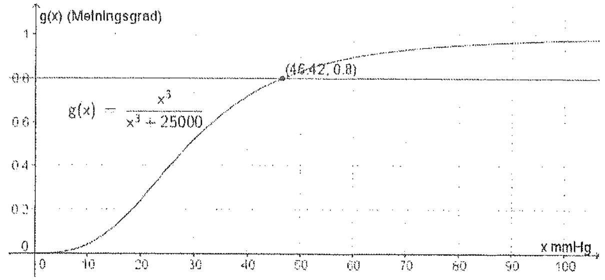

Vi ser at en pris på 130 kr vil gi det største overskuddet.

## Oppgave 2

a Vi tegner grafen i GeoGebra:



b Vi tegner linja $y = 0,8$ og bruker kommandoen Skjæring mellom to objekt til å finne skjæringspunktet mellom grafene.
Vi får punktet (46,42 , 0,8).

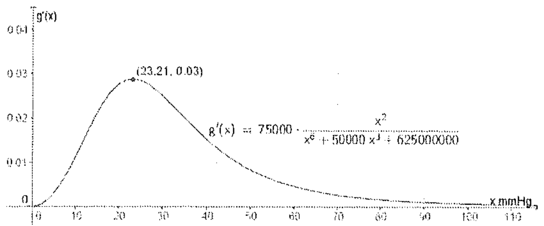



Vi ser at $g(x)$ er større enn 0,8 når $x > 46,42$. Det betyr at deltrykket minst må være ca. 46,5 mmHg for at metningsgraden skal være større enn 0,8.

c Vi skriver $g'(x)$ og får opp uttrykket for økningen i metningsgraden i algebrafeltet:

Algebrafelt
Funksjon
$g(x) = \frac{x^3}{x^3 + 25000}$
$g'(x) = 75000 \cdot \frac{x^2}{x^6 + 50000\,x^3 + 625000000}$

Vi ser at $g'(x)$ vil være positiv for alle $x > 0$. Det betyr at metningsgraden $g(x)$ øker når deltrykket $x$ øker. Vi tegner grafen til $g'(x)$, og ved å bruke kommandoen Ekstremalpunkt finner vi at metningsgraden stiger mest når $x = 23,21$. Stigningen vil avta når metningsgraden nærmer seg sin maksverdi, men altså fortsatt være positiv.




## Oppgave 3

Vi regner først ut det gjennomsnittlige fettinnholdet til de 10 tilfeldige valgte hamburgerne som ble kontrollert:

CAS
1 Gjennomsnitt[11,10,11,12,9,10,11,12,10,11]
→ 10.7

Vi setter opp nullhypotesen $H_0 : \mu = 10$ g mot den alternative hypotesen $H_A : \mu > 10$ g.





Vi skal finne ut hvor sannsynlig det er at det gjennomsnittlige fettinnholdet er 10,7 g under forutsetning av at nullhypotesen er sann. Til dette bruker vi Z-test av gjennomsnitt i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra:

Fordeling | Statistikk
Z-test av et gjennomsnitt
Nullhypotese μ = 10
Alternativ hypotese < > ≠
Utvalg
Gjennomsnitt 10.7
σ 3
N 10
Resultat
Z-test av et gjennomsnitt

| | |
|---|---|
| Gjennomsnitt | 10.7 |
| σ | 3 |
| SF | 0.9487 |
| N | 10 |
| Z | 0.7379 |
| P | 0.2303 |

Vi ser at P-verdien er 23,03 %, altså mye høyere enn signifikansnivået på 5 %. Det betyr at vi beholder nullhypotesen. Denne kontrollen viste at det ikke er god nok grunn til å påstå at fettinnholdet er for stort til at hamburgerne kan bli merket med grønt nøkkelhull.

## Oppgave 4

a Kristins årlige sparebeløp vil utgjøre en rekke der $a_{35}$ vil være det siste beløpet hun setter inn når hun fyller 59 år og $a_1$ er det første beløpet hun setter inn som 25-åring.
Vekstfaktoren er 1,05, og det årlige sparebeløpet settes lik $x$:
$x \cdot 1,05^{35} + x \cdot 1,05^{34} + \ldots + x \cdot 1,05$
Dette kan vi skrive:
$x \cdot 1,05 + x \cdot 1,05^2 + x \cdot 1,05^3 + \ldots + x \cdot 1,05^{35}$
Vi bruker sumformelen for en geometrisk rekke og løser likningen i CAS med $k = 1,05$ og $n = 35$:

CAS
1 2000000=x*1.05*(1.05^35-1)/(1.05-1)
NLøs: {x = 21088.97}

Beløpet hun må sette inn er 21 089 kr, dvs. omtrent 21 000 kr.

b Sluttverdien av de årlige uttakene på 200 000 kr på 65-årsdagen vil utgjøre en rekke der $a_1 = 200\,000 \cdot 1,05$ og $a_5 = 200\,000 \cdot 1,05^5$.
$a_1$ er sluttverdien av beløpet hun tar ut på 64-årsdagen.
Summen av uttakene er: $200\,000 \cdot 1,05^1 + 200\,000 \cdot 1,05^2 + \ldots + 200\,000 \cdot 1,05^5$
Summen av denne rekka må trekkes fra sluttverdien til startbeløpet ved fylte 60 år.

Vi finner dette i CAS:

CAS

1. 2000000*1.05^5-200000*1.05(1.05^5-1)/(1.05-1)

   ✓ $2000000 \cdot 1.05^5 - 200000 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^5 - 1}{1.05 - 1}$

2. $2000000\,(1.05^5) - 200000\,(1.05)\,(1.05^5 - 1)\,/\,(1.05 - 1)$

   ≈ 1392180.56

Vi ser av dette at Kristin har 1 392 181 kr på kontoen den dagen hun fyller 65 år.

## Oppgave 5

**a** Vi skriver inn funksjonsuttrykket i CAS i GeoGebra og regner ut $f(0)$:

CAS

1. f(x):=a/(1+b* e ^(-k*x))

   → $f(x) := \frac{a}{b\,e^{-kx} + 1}$

2. f(0)

   → $\frac{a}{b+1}$

Vi ser at $y$-koordinaten til $P$ er $\frac{a}{b+1}$.

**b** I vendepunktet $V$ er $f''(x) = 0$.

Vi finner den eksakte $x$-verdien (infleksjonspunktet) til vendepunktet i CAS:

CAS

1. f(x):=a/(1+b* e ^(-k*x))

   → $f(x) := \frac{a}{b\,e^{-kx} + 1}$

2. f''(x)=0

   Løs: $\left\{x = \frac{\ln(b)}{k}\right\}$

3. f(ln(b)/k)

   → $\frac{1}{2}\,a$

Vi ser at $y$-koordinaten til vendepunktet $V$ er $\frac{a}{2}$.

**c**

CAS

1. f(x):=a/(1+b* e ^(-k*x))

   → $f(x) := \frac{a}{b\,e^{-kx} + 1}$

2. f'(ln(b)/k)

   → $\frac{1}{4}\,a\,k$

Vi ser at stigningstallet til tangenten er $\frac{a \cdot k}{4}$.