

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $g(x) = 3 \cdot e^{2x-1}$

c) $h(x) = x^2 \cdot e^x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

- Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen til f .
- Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f .
- Lag en skisse av grafen til f .

Oppgave 3 (3 poeng)

- Forklar at polynomet $x^3 - ax^2 + 2ax - 8$ alltid er delelig med $(x - 2)$.
- Forkort brøken

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x - 2}$$

Oppgave 4 (3 poeng)

Løs likningsystemet

$$x + 2y - z = 2$$

$$2x - y + z = 3$$

$$3x - 2y + 2z = 2$$

Oppgave 5 (3 poeng)

En rekke er gitt ved

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen S_n av rekken.

b) Bestem summen av den uendelige rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Oppgave 6 (4 poeng)

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved $a_n = n^3 + 1$

a) Skriv opp de fire første leddene i tallfølgen.

b) Vis at leddene a_1, a_2, a_3 og a_4 er delelige med henholdsvis 2, 3, 4 og 5.

c) Vis at a_n er delelig med $n+1$

Oppgave 7 (4 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter for en bedrift. De totale kostnadene $K(x)$ er gitt ved

$$K(x) = 20000 + 120x + 0,05x^2$$

Prisen $p(x)$ for én enhet er gitt ved

$$p(x) = 480 - 0,1x$$

- Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.
- Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bestem den produksjonsmengden som gir det største overskuddet.

Oppgave 8 (4 poeng)

I et terningspill på et kasino blir det kastet to vanlige terninger. Dersom summen av antall øyne er 10, får spilleren 200 kroner. Blir summen av antall øyne 7, får spilleren 50 kroner. Dersom summen blir et annet tall, får ikke spilleren gevinst.

La a være prisen en spiller må betale for ett spill, og X utbyttet til kasinoet ved én tilfeldig spilleomgang.

- Skriv av og fyll ut tabellen nedenfor

| | | | |
|------------|-----------------|-----------|----------|
| x | a | $a - 200$ | $a - 50$ |
| $P(X = x)$ | $\frac{27}{36}$ | | |



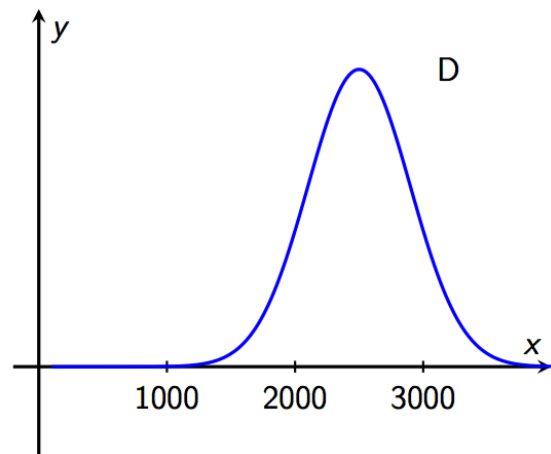
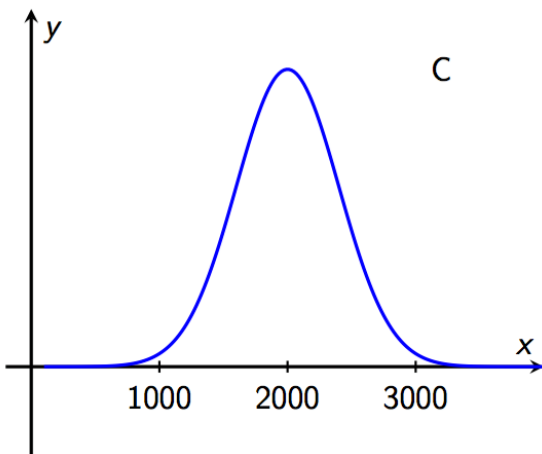
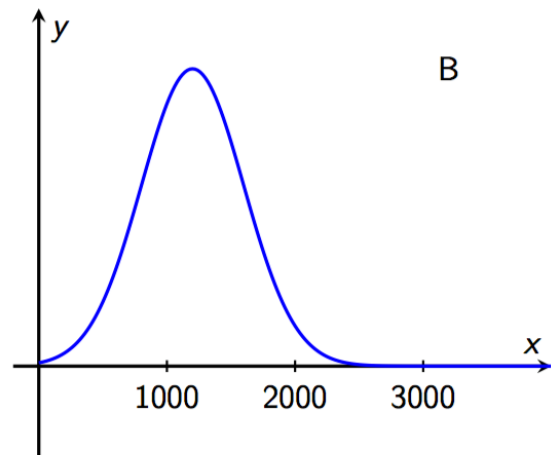
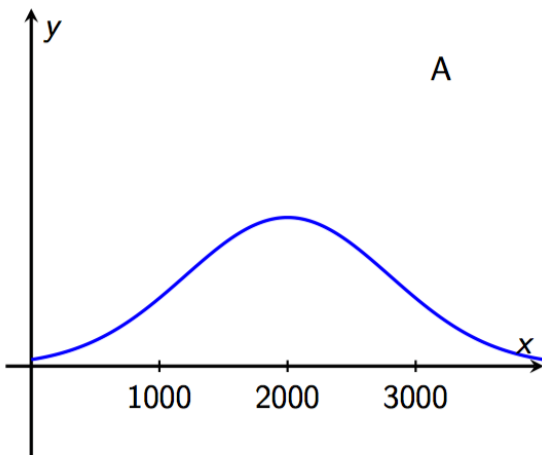
- Hva bør kasinoet sette prisen a til for at de i det lange løp skal ha et gjennomsnittlig utbytte på 5 kroner per spill?

Oppgave 9 (6 poeng)

I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.

Levetiden X til en type lyspærer er normalfordelt med forventet levetid $\mu = 2000$ timer og med et standardavvik $\sigma = 400$ timer.

- a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt lyspære lyser færre enn 1600 timer.
- b) Sannsynligheten er 90 % for at en tilfeldig valgt pære vil lyse i mer enn x timer. Bestem x .
- c) Hvilken av de grafiske framstillingene nedenfor illustrerer X ? Begrunn svaret.



DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Maria trener på et apparat i et treningssenter. La $f(x)$ være treningseffekten, det vil si antall kilojoule som forbrennes per minutt, x minutter etter starten på treningsøkten. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 42(1 - e^{-x}) + 1,05x \quad , \quad x \geq 0$$

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f .
- Bruk grafen til å bestemme treningseffekten etter 3 min og når treningseffekten er 50 kJ/min.

Det samlede energiforbruket E , målt i kilojoule (kJ), i de første t minuttene av treningen er gitt ved

$$E(t) = \int_0^t f(x) \, dx$$

- Bestem det samlede energiforbruket til Maria i løpet av de første 10 minuttene.
- Anslå hvor lenge Maria må trene for at det samlede energiforbruket skal bli 1300 kJ.

Oppgave 2 (8 poeng)

I 1992 skrev forskerne Ward og Whipp en artikkel i tidsskriftet Nature. De brukte regresjon til å hevde at de beste kvinnelige løperne før eller siden vil løpe like raskt som de mannlige på maratondistansen.

I tabellene ser du gjennomsnittsfarten for verdensrekordløp i maraton for noen år.

Menn:

| | | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Årstall | 1909 | 1913 | 1920 | 1935 | 1960 | 1970 | 1988 |
| Fart (m/s) | 4,38 | 4,51 | 4,61 | 4,81 | 5,20 | 5,43 | 5,55 |

Kvinner:

| | | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Årstall | 1963 | 1967 | 1970 | 1973 | 1975 | 1979 | 1985 |
| Fart (m/s) | 3,24 | 3,75 | 3,85 | 4,22 | 4,44 | 4,77 | 4,98 |

- a) Lag lineære modeller f og g for farten til menn og kvinner. La x være antall år etter 1900.
- b) Hvilket år vil kvinner løpe like raskt som menn, ifølge modellene?

Raskeste mannlige løper (Dennis Kimetto) løp i 2014 med en gjennomsnittsfart på 5,72 m/s, mens beste kvinnelige løper (Tirfi Tsegaye) samme år løp med en gjennomsnittsfart på 5,01 m/s.

- c) Hvordan vurderer du gyldigheten til modellene ovenfor ut fra disse resultatene?

En logistisk modell for gjennomsnittlig maratonfart (i m/s) for mennenes rekordløp x år etter 1900 er gitt ved:

$$h(x) = \frac{6,65}{1 + 0,751e^{-0,012x}}$$

- d) Vi tenker oss at vi kan bruke den logistiske modellen også etter år 2000. Hvilket år vil da maraton første gang bli løpt på under to timer? Maratondistansen er 42 195 m.

Oppgave 3 (4 poeng)

Et fond på 50 millioner kroner ble opprettet 1. januar 2015. Hensikten er å dele ut et fast beløp til gode formål den 31.12. hvert år.

Styret for fondet gikk først ut fra at den årlige avkastningen ville bli 10,0 %.

- Hvor mye penger kan maksimalt deles ut hvert år dersom fondet aldri skal gå tomt?
- Når vil fondet være tomt for penger dersom det deles ut 8 millioner kroner hvert år?

Oppgave 4 (4 poeng)

Energiinnholdet i de tre produktene smøreost, helmelk og hvitost kommer fra næringsstoffene fett, karbohydrater og proteiner.

Tabellen nedenfor viser næringsinnhold og samlet energiinnhold i 100 g av hvert av de tre produktene.

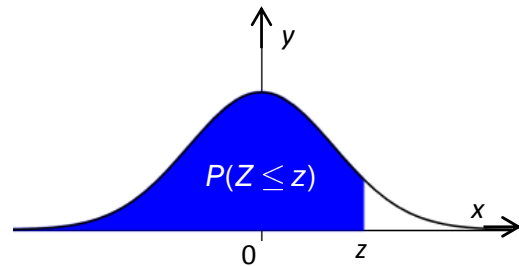
| | Smøreost | Helmelk | Hvitost |
|---------------|----------|---------|---------|
| Fett | 25 g | 3,5 g | 27 g |
| Karbohydrater | 2 g | 4,5 g | 0 g |
| Proteiner | 6 g | 3,3 g | 27 g |
| Energiinnhold | 1010 kJ | 270 kJ | 1500 kJ |

Sett opp et likningssystem og bruk CAS til å bestemme energiinnholdet (i kJ) i 1 g fett, 1 g karbohydrater og 1 g proteiner.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3,09 \leq z \leq 3,09$



| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |