

MATEMATIKK

NAVN:

2P-Y



HELLERUD VGS

Noen formler det er lurt å kunne...	
Rektangel	$A = g \cdot h$
Trekant	$A = \frac{g \cdot h}{2}$
Parallelogram	$A = g \cdot h$
Trapes	$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$
Sirkel	$A = \pi \cdot r^2$
Prisme	$V = G \cdot h$
Sylinder	$V = \pi r^2 h$
Pytagoras' setning	$c^2 = b^2 + a^2$, der c er hypotenus, a og b er katetene i en rettvinklet trekant
Proporsjonalitet	Proporsjonale størrelser: $y = ax$ Omvendt proporsjonale størrelser: $y = \frac{k}{x}$
Rette linjer	$y = ax + b$
Vekstfaktor	$1 + \frac{p}{100}$ $1 - \frac{p}{100}$
Økonomi	Prisindeks: $\frac{\text{Pris}_1}{\text{Pris}_2} = \frac{\text{Indeks}_1}{\text{Indeks}_2}$ Kroneverdi: $\text{Kroneverdi} = \frac{100}{\text{Indeksen}}$ Reallønn: $\text{Lønn} \cdot \text{kroneverdi} = \frac{\text{Lønn} \cdot 100}{\text{Indeksen}}$

Forord

Velkommen til Hellerud videregående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra ungdomsskolen må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Denne boka dekker læreplanen i Matematikk 2P-Y. Stoffet og oppgavene er valgt ut med tanke på den type oppgaver som har vist seg å være ganske vanlige til eksamen i 2P-Y.

Til slutt i de fleste kapitlene er det eksamensoppgaver som kan løses hvis du behersker stoffet i dette og tidligere kapitler. Ønsker du høyere karakter enn 3 i faget må du jobbe med disse oppgavene

Forord til 5. utgave:

I denne versjonen av boka har vi lagt inn en del innfyllingsoppgaver. Dette er fordi vi ønsker at boka skal være et nyttig arbeidsverktøy for deg, og et oppslagsverk som du kjenner godt. Ta godt vare på boka, du kommer til å få bruk for den.

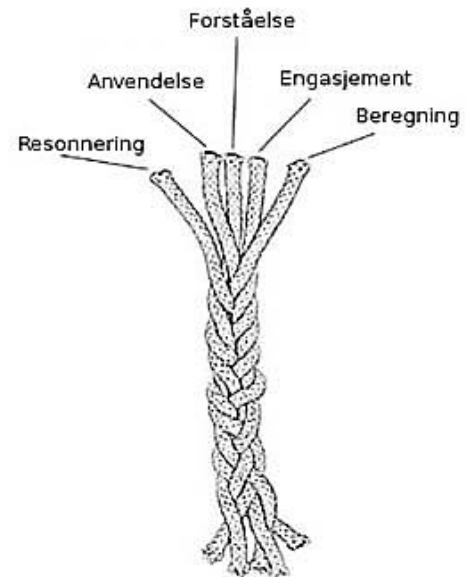
Vi ønsker at du skal delta aktivt i timene. Derfor inneholder boka en del oppgaver hvor det du har tenkt er viktigere enn hvilket svar du har kommet frem til.

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juni 2018

Bildet på forsiden viser skaterampen laget av byggfagselever etter initiativ og iherdig innsats fra Samuel Krueger. Omslaget er laget av MK-lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner
2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt
3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer
4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent
5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk



Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

(Kilde: <http://www.matematikkssenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk>)

Jo Boalers 7 bud

1. Alle kan lære matematikk på høyeste nivå.

- Det er ikke sånn at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

2. Å gjøre feil er verdifullt

- Feil gjør at hjernen din vokser.
Det er bra å streve og gjøre feil

3. Å stille spørsmål er viktig

- Spør om det du lurer på, og svar på andre sine spørsmål.
Spør deg selv: Hvorfor er dette riktig?

4. Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening

- Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre

5. Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere

- I matematikk kan det samme sies på ulike måter, f.eks. ord, bilde, graf, funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

6. Matematikktimene handler om å lære, ikke prestere

- Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats

7. Det er viktigere å tenke grundig enn fort.

- Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boalers «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

Innhold

Forord.....	2
Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?.....	3
Jo Boalers 7 bud	4
Innhold	5
Kapittel 1. Tallregning.....	6
Eksamensoppgaver.....	19
Kapittel 2. Prosentregning.....	22
Eksamensoppgaver.....	49
Kapittel 3. Funksjoner.....	54
Eksamensoppgaver.....	95
Kapittel 4. Matematiske modeller.....	100
Eksamensoppgaver.....	128
Kapittel 5. Sannsynlighetsregning.....	144
Eksamensoppgaver.....	166
Kapittel 6. Statistikk.....	176
Eksamensoppgaver.....	203
Kapittel 7. Potenser og tall på standardform.....	220
Eksamensoppgaver.....	234

Kapittel 1. Tallregning



Mål for Kapittel 1, Tallregning.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og uten digitale verktøy, presentere resultatene og vurdere hvor rimelige de er
- tolke, bearbeide, vurdere og diskutere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske fremstillinger
- forenkle flerleddet uttrykk og løse ligninger av første grad og enkle potensligninger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg forkorter en brøk
- hvordan de fire regneartene blir anvendt i brøkkregning
- hvordan de fire regneartene blir anvendt på heltall
- hvordan jeg regner med negative tall

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvorfor en brøk kan forkortes
- hvorfor et desimaltall er lik/ulik en brøk
- hvordan jeg regner med negative tall

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- gi eksempler på bruk av brøk og desimaltall i hverdagen
- forklare i hvilke tilfeller en må vite omgjøring mellom brøk og desimaltall
- lage og løse flerleddet uttrykk med ulike regnearter
- løse og lage tekstopp-gaver knyttet til tallregning
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – svaret er 7

Lag regnestykker hvor svaret blir 7. Klarer du å lage forskjellige regnestykker som inneholder:

- hele tall?
- desimaltall? Hvor mange desimaler klarer du?
- negative tall?
- brøk?
- potens?
- kvadratrot?
- overslag?
- algebra?

Gjør dette med hver av de fire regnearterne. Til slutt kan du lage regnestykker som inneholder flere regnearter.

I det praktiske liv har vi ofte bruk for å gjøre et raskt anslag over hvor stor verdi et regnestykke har, uten at vi trenger å regne det nøyaktige svaret (som ofte kan være tidkrevende). Dersom man gjør vanskelige regnestykker enklere, slik at man kan løse det ved hjelp av hoderegning, kalles dette å gjøre et overslag.

Det er viktig å være klar over at dersom man gjør et overslag blir ikke svaret helt lik den nøyaktige verdien. For at overslaget skal bli mest mulig lik det riktige svaret brukes følgende tommelfingerregel:

- ved addisjon og multiplikasjon rundes tallene motsatt vei
- ved subtraksjon og divisjon rundes tallene samme vei

Du bør alltid gjøre en vurdering av svaret før du regner nøyaktig verdi.

Fra hver ramme som er **rød** bør du gjøre minst 5 deloppgaver pluss alle tekstoppgavene. Fra hver ramme som er **blå** bør du gjøre alle deloppgavene. Oppgavene med **grønn** ramme er grubleoppgaver. Dette er oppgaver som kan løses på flere forskjellige måter, og som du kan prøve på de hjemme når du har løst dem.

1. De fire regneartene: overslag og tekstopp-gaver

Øvingsopp-gaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsopp-gaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$26 + 72 =$			$2438 + 1789 =$		
$81 + 64 =$			$6218 + 5411 =$		
$58 + 295 =$			$86,8 + 66,2 =$		
$427 + 388 =$			$52,8 + 76 + 12,3 =$		
$687 + 714 =$			$47 + 144 + 24 =$		

Tekstopp-gaver – gjør overslag før du regner ut nøyaktig verdi!

I en klesbutikk koster en jakke 1467 kr, og en bukse 529 kr. Anne kjøper en av hver. Hvor mye koster plaggene til sammen?

I en møbelforretning koster en sofa 8631 kr, en lenestol koster 3289 kr og en fotskammel koster 1745 kr. Ammad kjøper sofaen og fotskammelen. Hvor mye betaler han?

Rasheen kjøper alle møblene nevnt i oppgaven over. Hvor mye betaler hun?

Marius er snekker, og kjøper lister som har lengde: 37,8 cm, 128,3 cm og 85,4 cm. Hvor lange er disse listene til sammen?

En vennegjeng på fire har kjøpt smågodt; Truls kjøpte 2,3 hg, Nouradin kjøpte 8,4 hg, Ali kjøpte 13,5 hg og Yassin kjøpte 9,56 hg. Hvor mye kjøpte de til sammen?

Øvingsopp-gaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsopp-gaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$73 - 27 =$			$2438 - 1789 =$		
$206 - 49 =$			$4218 - 1789 =$		
$515 - 237 =$			$86 - 66,2 =$		
$804 - 757 =$			$144 - 38 - 27 =$		
$618 - 439 =$			$76 - 52,8 - 12,3 =$		

Tekstopp-gaver – gjør overslag før du regner ut nøyaktig verdi!

Sarah handler varer for 157 kr og betaler med en 500-lapp. Hvor mye får hun tilbake?

Stian er 1,83 m høy og Yonas er 1,67 m høy. Hvor mye høyere enn Stian er Yonas?

En Skoda Octavia veier 1272 kg. En Nissan Qashqai veier 1407 kg. Hvor mye tyngre er Nissan enn Skoda?

Rachel har to fisker, en lys og en mørk. Den lyse fisken er 7,5 cm lang, mens den mørke er 16,3 cm lang. Hvor mye lengre er den mørke fisken enn den lyse?

Thea har et tau som er 15 m langt. Av dette tauet lager hun tre hoppetau som er 2,1 m langt, 1,7 m langt og 2,4 m langt. Hvor mye er igjen av det opprinnelige tauet?

Øvingsoppgaver

$35 \cdot 10 =$ _____	$350 \cdot 10 =$ _____	$350 \cdot 100 =$ _____
$42 \cdot 10 =$ _____	$305 \cdot 10 =$ _____	$208 \cdot 1000 =$ _____
$10 \cdot 28 =$ _____	$10 \cdot 622 =$ _____	$100 \cdot 4089 =$ _____
$10 \cdot 67 =$ _____	$10 \cdot 865 =$ _____	$1000 \cdot 28 =$ _____
$92 \cdot 10 =$ _____	$775 \cdot 10 =$ _____	$1299 \cdot 100 =$ _____

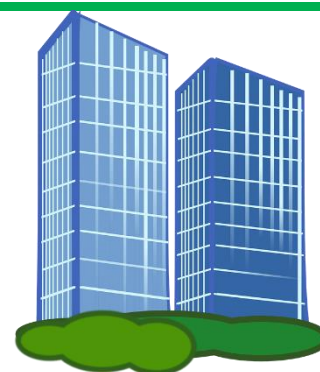
Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$5,2 \cdot 10 =$			$3,05 \cdot 10 =$		
$6,7 \cdot 10 =$			$100 \cdot 4,2 =$		
$10 \cdot 13,6 =$			$13,08 \cdot 100 =$		
$28,43 \cdot 100 =$			$45,8 \cdot 100 =$		
$100 \cdot 432,89 =$			$6,7 \cdot 1000 =$		

Øvingsoppgaver

$4 \cdot 30 =$ _____	$60 \cdot 70 =$ _____	$800 \cdot 60 =$ _____
$50 \cdot 7 =$ _____	$300 \cdot 4 =$ _____	$500 \cdot 200 =$ _____
$60 \cdot 50 =$ _____	$600 \cdot 40 =$ _____	$4000 \cdot 30 =$ _____

En ny kontorbygning med 100 kontorer hadde nettopp blitt oppført. Lars var leid inn for å male numrene fra 1 til 100 på kontordørene.

Hvor mange ganger måtte Lars male tallet 9?



Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$14 \cdot 19 =$			$6,9 \cdot 5,1 =$		
$28 \cdot 43 =$			$31,7 \cdot 7,1 =$		
$62 \cdot 37 =$			$37,8 \cdot 205,8 =$		
$73 \cdot 56 =$			$5,4 \cdot 7,1 \cdot 3,6 =$		
$87 \cdot 53 =$			$6,7 \cdot 12,3 \cdot 28,9 =$		

Tekstoppgaver – gjør overslag før du regner ut nøyaktig verdi!

Jeanette har kjøpt 12 poser bananer, hvor hver av dem veier 13 kg. På kurven på mopeden hennes kan hun maksimalt legge 100 kg. Kan hun legge alle posene i kurven?

I en mappe på Pc-en har Selin 73 bilder som alle har en størrelse på 3,2 MB. Hun har en minnepinne som rommer 200 MB. Får hun plass til alle bildene på minnepinnen?

Elias har 500 kr og fylte 37,4 L bensin på bilen sin til 12,2 kr per liter. Inne på bensinstasjonen selges en film til 50 kr. Har han råd til å kjøpe denne filmen?

Hans har kjøpt et 33 meter langt gjerde som han skal bruke til å lage en hundegård. Hundegården er kvadratisk med sidelengder 7,7 meter. Er gjerdet langt nok?

Alexander har plukket 8,7 kg poteter til en pris på 17,89 kr per kg. Når han kommer til kassen oppdager han at han kun har med 200 kr. Har han nok penger?

Øvingsoppgaver

$30 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$1200 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$10200 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$120 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6500 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$12000 : 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$

$210 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6500 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$12800 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$200 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8000 : 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$

$31000 : 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$

$560 : 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$9200 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$15800 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

Da jeg var 4 år var broren min dobbelt så gammel som meg. Nå er jeg 35 år. Hvor gammel er broren min?

Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$57 : 10 =$			$31,05 : 10 =$		
$69 : 10 =$			$1289 : 100 =$		
$128 : 10 =$			$13,08 : 100 =$		
$256 : 10 =$			$45,8 : 1000 =$		
$378 : 10$			$127 : 1000 =$		

Øvingsoppgaver 17 – Divisjon med hele tiere			
$80 : 4 =$ _____	$210 : 7 =$ _____	$80 : 40 =$ _____	$480 : 60 =$ _____
$120 / 3 =$ _____	$350 : 5 =$ _____	$120 : 30 =$ _____	$420 / 30 =$ _____
$180 : 2 =$ _____	$360 : 6 =$ _____	$180 : 20 =$ _____	$650 : 50 =$ _____
$150 / 5 =$ _____	$560 / 8 =$ _____	$150 / 30 =$ _____	$720 / 30 =$ _____

Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$40 / 6 =$			$51 / 4 =$		
$23 / 4 =$			$77 : 5 =$		
$19 : 3 =$			$101 : 4 =$		
$50 : 7 =$			$178 : 5 =$		
$67 : 8 =$			$257 / 8 =$		

Tekstoppgaver – gjør overslag før du regner ut nøyaktig verdi!

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Betim skal fylle koppen sin med 1 liter, men koppen tåler ikke mer enn 1 kg. Vil koppen hans tåle vekten av 1 liter jord?

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Solin skal ha med 1 kg jord, men har bare et spann som rommer 1 liter. Er spannet stort nok til å frakte 1 kg jord?

Yassin har kjøpt 763 g smågodt som han skal fordele i 5 poser. Det skal være minst 150 g i hver pose. Har han kjøpt nok smågodt?

Hakan skal henge opp et veggskap. Han skapet veier 118 kg. Han har 4 hengefester, og hvert av hengefestene tåler 32 kg. Er det trygt å henge opp dette skapet?

I en tank er det 616 L olje. Kristoffer skal fylle oljen over på kanner. I hver kanne er det plass til 15,3 L. Kristoffer har 30 kanner. Har han nok kanner til all olja?

2. Potenser og kvadratrøtter: betydning og overslag

For å forenkle regnestykker bruker vi følgende regler innenfor matematikk:

- Når like tall adderes kan regnestykket endres til multiplikasjon
- Når like tall multipliseres kan regnestykket endres til potens
- Den motsatte regnearten til potens er kvadratroten

Øvingsoppgaver – Trekk sammen til multiplikasjon

$$5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 + 3 + 3 + 3 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12 + 12 + 12 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1,3 + 1,3 + 1,3 + 7,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$21 + 21 + 21 + 21 + 21 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5 + 2,7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,4 + 2,4 + 2,4 + 3,2 + 3,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver – Utvid til addisjonsstykker

$$3 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 + 4 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 + 4 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \cdot 2 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 + 2 \cdot 6,7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 \cdot 3 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 + 3,5 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 \cdot 3 + 2,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,5 \cdot 3 + 2 \cdot 3,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 \cdot 6,1 + 1,8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7,3 \cdot 2 + 3 + 8,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \cdot 7,2 + 3,8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,1 \cdot 3 + 4,2 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver – Regn ut

$$3 + 2 \cdot 2,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$18 : 3 + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 - 56/7 + 4,57 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$21 - 2 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$21 - 14 : 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 + \frac{64}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4,1 + 2,1 \cdot 3 - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 + 4,5 \cdot 2 - 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,1 \cdot 2 + 8 - 21 : 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

En potens består av et grunntall og en eksponent.

- Grunntallet forteller hvilket tall som blir multiplisert
- Eksponenten forteller hvor mange ganger grunntallet blir multiplisert

Det er et krav i 1P at du kan verdien når grunntallet er mellom 0 og 10, og eksponenten er 2.

Øvingsoppgaver – Trekk sammen til potens

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12 \cdot 12 \cdot 12 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3 \cdot 7,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot 2,7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,4 \cdot 2,4 \cdot 2,4 \cdot 3,2 \cdot 3,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver – Utvid til multiplikasjonsstykker

$$3^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 + 4^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 \cdot 4^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4^2 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \cdot 6,7^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7^3 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 + 3,5^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8^3 \cdot 2,1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2,5^3 + 3,1^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6,2^2 + 1,8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7,3^2 \cdot 8,1^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7,2^3 \cdot 3,8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2^3 + 4,2 \cdot 3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver – Regn ut

$$0^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$10^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$13^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8,1^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$3,7^2 =$			$100 - 5,23^2 =$		
$6,2^2 =$			$31 + 8,89^2 =$		
$5,5^2 =$			$4,7 \cdot 4,2^2 =$		
$7,7^2 =$			$3,2^2 + 5,7^2 =$		
$7,75^2 =$			$8,7^2 \cdot 2,1^3 =$		

Når du skal finne kvadratroten til en verdi må du finne grunntallet til den potensens med eksponent 2 som har den verdien du skal finne kvadratroten av.

Skrevet på en annen måte: hvilket tall multiplisert med seg selv får den verdien du skal ta kvadrat rot av?

Øvingsoppgaver – Fyll ut tabellen		
$\sqrt{0} =$ _____	$\sqrt{25} =$ _____	$\sqrt{100} =$ _____
$\sqrt{1} =$ _____	$\sqrt{36} =$ _____	$\sqrt{121} =$ _____
$\sqrt{4} =$ _____	$\sqrt{49} =$ _____	$\sqrt{144} =$ _____
$\sqrt{9} =$ _____	$\sqrt{64} =$ _____	$\sqrt{169} =$ _____
$\sqrt{16} =$ _____	$\sqrt{81} =$ _____	$\sqrt{196} =$ _____

Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig	Øvingsoppgaver	Omtrent riktig	Nøyaktig
$\sqrt{7} =$			$\sqrt{113} =$		
$\sqrt{18} =$			$\sqrt{137} =$		
$\sqrt{43} =$			$\sqrt{61,7} =$		
$\sqrt{29} =$			$\sqrt{0,7} =$		
$\sqrt{71} =$			$\sqrt{-1} =$		

3. Brøk: stambrøk, likeverdige brøker og brøkdel av en mengde

I delkapittel 1 og 2 har vi behandlet tall som en absolutt verdi. Noen ganger har vi behov for å uttrykke et tall som verdi i forhold til en mengde. Til dette bruker vi brøk og prosent (som er en brøk med 100 som nevner).

Øvingsoppgaver – Fyll ut tabellen			
Stambrøk	Likeverdige brøker	Desimal	Prosent
1			
$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$			
$\frac{60}{600}$			

Øvingsoppgaver 38 – Fullfør reglene under
For å finne det halve dividerer man det hele med: eller multiplisere det hele med:
For å finne en tredel dividerer man det hele med: eller multiplisere det hele med:
For å finne en firedel dividerer man det hele med: eller multiplisere det hele med:
For å finne en femdel dividerer man det hele med: eller multiplisere det hele med:
For å finne en tidedel dividerer man det hele med: eller multiplisere det hele med:

Øvingsoppgaver 39 – Regn ut ved å enten bruke multiplikasjon eller divisjon

$\frac{1}{3} \text{ av } 27 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{10} \text{ av } 68 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{2} \text{ av } 310 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{5}{6} \text{ av } 60 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{4} \text{ av } 32 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{3} \text{ av } 210 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{2}{5} \text{ av } 4219 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{7}{12} \text{ av } 60 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{5} \text{ av } 45 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{5} \text{ av } 235 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{2}{3} \text{ av } 6,9 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{3}{8} \text{ av } 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{2} \text{ av } 47,3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1}{4} \text{ av } 70 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{3}{10} \text{ av } 86,78 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{4}{7} \text{ av } 100 = \underline{\hspace{2cm}}$

Øvingsoppgaver 43 – Finn stambroken og desimalen

$\frac{60}{180} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{21}{210} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{26}{104} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{0,6}{2,4} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{30}{120} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{80}{320} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{32}{320} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{3,5}{17,5} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{71}{355} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{61}{183} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{2,4}{7,2} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{0,6}{6} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{18}{180} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{65}{650} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{0,8}{4} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{3,75}{7,5} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Liv, Tor og Jan er ivrige samlere av fyrstikkesker. Hver av dem har en fin samling i mange forskjellige farger og fasonger, både norske og utenlandske.

Liv og Tor har til sammen 66 fyrstikkesker.

Tor og Jan har til sammen 76 esker.

Jan og Liv har til sammen 70 esker.

Hvor mange fyrstikkesker har hver enkelt?

Hva er alderen på de små guttene gitt at:

- Produktet av aldrene til alle tre er 72.
- To av guttene er tvillinger
- Den yngste er ikke tvilling.

Øvingsoppgaver 45 – Forkort brøkene så mye du klarer

$$\frac{4}{32} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{30}{75} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{192}{216} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{306}{1224} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{10}{25} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{42}{63} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{144}{576} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{618}{1854} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{12}{40} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{45}{75} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{308}{416} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2679}{5358} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{9}{27} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{48}{108} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{675}{950} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{323}{1615} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Tekstoppgaver 5 - forkort brøkene så mye du klarer

- a) I 2015 kostet en bok 125 kr. Året etter gikk prisen opp til 150 kr. Hvor stor brøkdel gikk prisen opp?
- b) Du har blandet 15 L (150 dL) saft og skal helle over på kopper som rommer 2 dL. Hvor stor brøkdel av saften får du plass til i hver kopp?
- c) Avstanden i virkeligheten mellom to steder er 1,5 km (150000 cm). På et kart er avstanden mellom de samme stedene 5 cm. Hvor stor brøkdel er avstanden på kartet i forhold til virkeligheten?
- d) I 2012 kostet en vare 80 kr. I 2016 kostet den samme varen 60 kr. Hvor stor brøkdel gikk prisen ned?

Øvingsoppgaver 46 – Regn ut

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{13}{17} \cdot \frac{15}{23} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{53} \cdot \frac{5}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver 47 – Forkort brøkene før du regner ut

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{6}{14} \cdot \frac{10}{24} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{12} \cdot \frac{5}{15} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{45} \cdot \frac{5}{21} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{21} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{12}{35} \cdot \frac{15}{20} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Øvingsoppgaver 48 – Utvid disse brøkene med valgfri faktorer mellom 2 og 10

$$\frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{2}{7} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{6}{7} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{7}{12} = \frac{\quad}{\quad}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{9} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{11}{18} = \frac{\quad}{\quad}$$

Øvingsoppgaver 49 – Utvid disse brøkene slik at nevneren blir 24

$$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{6}{7} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{7}{12} = \frac{\quad}{24}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{5}{12} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{24} \quad \frac{11}{18} = \frac{\quad}{24}$$

Øvingsoppgaver 50 – Finn felles nevner og regn ut svarene

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{\quad}{\quad}$$
$$\frac{5}{7} + \frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{8}{11} - \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$$

Øvingsoppgaver 51 – Fullfør reglene under

Når jeg utvider brøk må jeg:

Når jeg skal utvide brøk til en bestemt nevner må jeg:

Når jeg skal finne felles nevner for 2 eller flere brøker må jeg:

Blandede oppgaver

Eksamensoppgaver

E1

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)



Andersen kjøper fem bord. I enden av hvert bord står det et tall som forteller hvor mange centimeter bordet er. Se bildet under.

Gjør overslag og finn ut omtrent hvor mye Andersen må betale når bordene koster 8,95 kroner per meter.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

E2

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)



I butikk A koster et beger med 500 g druer 49,90 kroner.

En dag har butikk A følgende tilbud:

I butikk B koster druene 69,90 kroner per kilogram.

**KJØP 3 BEGER MED
DRUER,
BETAL FOR 2**

Du skal kjøpe 1,5 kg druer. I hvilken butikk lønner det seg å handle?

E3

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

På flyplassen i Amsterdam koster en mp3-spiller 210 euro. En euro koster 8,33 norske kroner. Gjør et overslag over hvor mye mp3-spilleren koster i norske kroner.

E4

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Liv fyller 41,5 liter drivstoff på bilen sin. Hun betaler 509,62 kroner. Bruk informasjonen på bildet. Gjør overslag og finn ut om Liv har en bil som bruker bensin (95) eller diesel (D).




E5

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)

Markus har vært på Island.

I banken betalte han 5,25 norske kroner for 100 islandsk

Land	Kode	Kurs
Island 	ISK	5,25



- a) Gjør et overslag over hvor mye han måtte betale for å komme inn i Hallgrímskirken. Markus fant etter hvert en enkel metode for å gjøre overslagsregning fra islandske kroner til norske kroner:

”Jeg stryker først en null på slutten av det islandske beløpet. Så deler jeg det som står igjen, på to. Da finner jeg ut omtrent hvor mange norske kroner det islandske beløpet tilsvarer.”

- b) Forklar hvorfor denne metoden gir et godt overslag.

E6

(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)



14,90 kroner
per flaske



48,20 kroner
per kilogram

Hanna vil kjøpe 6 flasker vann og 2,5 kg druer. Gjør overslag og finn ut omtrent hvor mye hun må betale.

E7

(Eksamen 1P vår 2014 Del 1)

I en tank er det 616 L olje. Du skal fylle oljen på kanner. I hver kanne er det plass til 15,3 L.

Gjør overslag og finn omtrent hvor mange kanner du trenger.

Kapittel 2. Prosentregning



Mål for Kapittel 4, Prosentregning.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- tolke og bruke formler som gjelder dagligliv og yrkesliv
- regne med forhold, prosent, prosentpoeng og vekstfaktor

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg regner prosent av en mengde
- hvordan jeg finner ny verdi når prosentavslaget er gitt
- hvordan jeg finner gammel verdi fra nedsatt verdi og oppgitt prosentavslag
- hva prosentpoeng er og hvordan det er annerledes fra prosent
- hva vekstfaktor er og hvordan vi bruker den til å regne med renter og verdier som strekker seg over lang tid

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

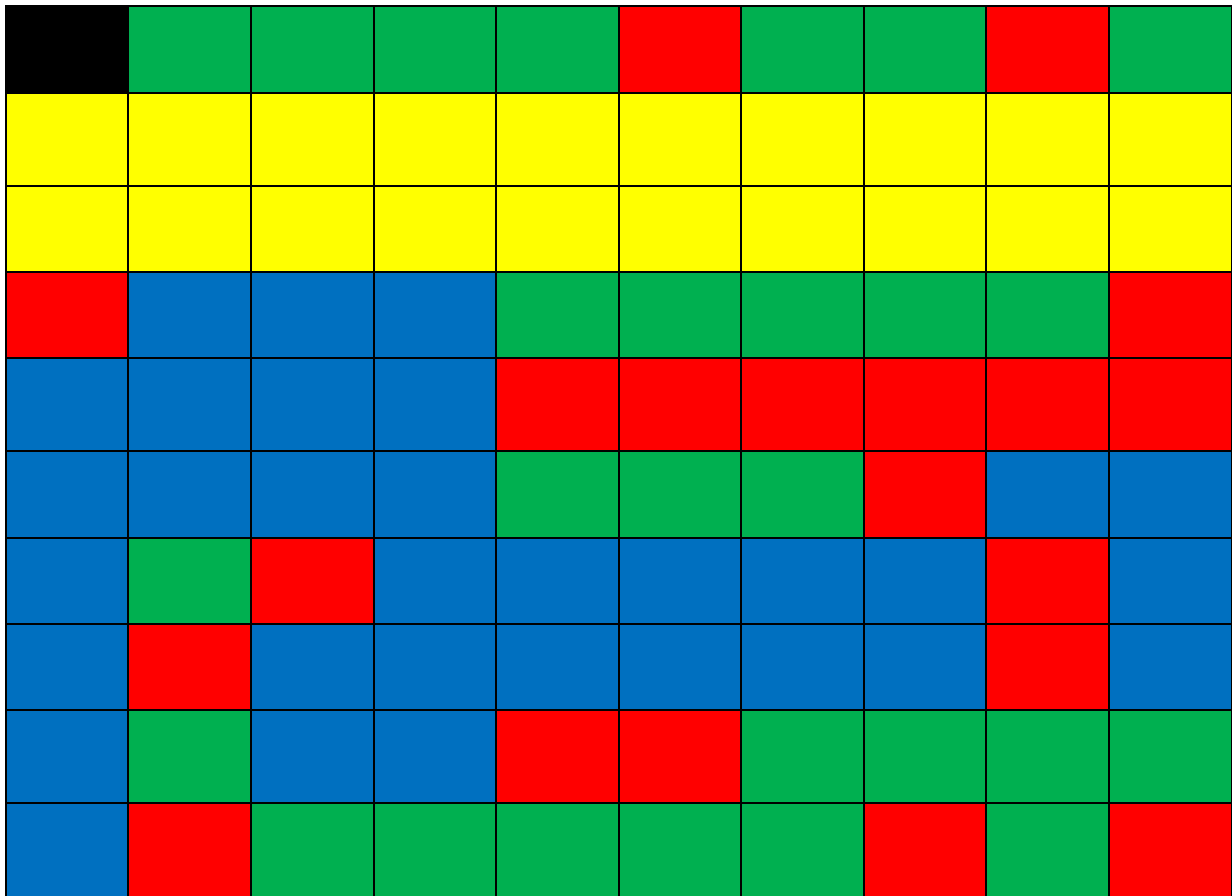
- hvorfor prosent er et nyttig verktøy
- hvorfor jeg kan finne ny og original verdi ved å få oppgitt prosentsats
- hvorfor det er nyttig å snakke om prosentpoeng i mange praktiske sammenhenger og ikke prosent

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- gi eksempler på bruk av prosent, prosentpoeng og vekstfaktor i dagliglivet
- lage og løse tekstoppgaver knyttet til prosent
- delta i en diskusjon rundt endring i prosent/verdi og oppgi begrunnelse for argumentene dine
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

1. Prosent betyr hundre deler.

Oppgave 1. Bruk fargene i rutenettet, og fyll ut tabellen nedenfor.

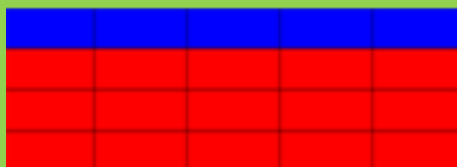


Farge	Antall av 100	Brøk	Desimal	Prosent
Blå				
Rød				
Grønn				
Sort				
Gul				

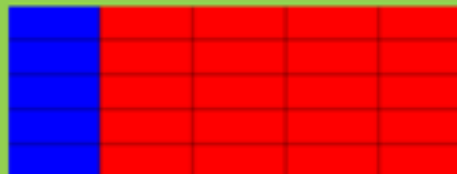
Utforskende oppgave – når det ikke er 100 ruter

Under ser du tabeller med ulikt antall ruter. Rutene i hver tabell er enten røde eller blå.

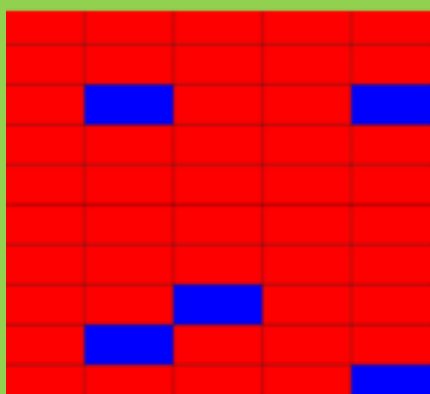
- Tell antall blå ruter og tell antall ruter til sammen i tabellen (både røde og blå). Skriv antall blå ruter i forhold til antall ruter til sammen som en brøk.
- Hvor mange kopier av hver tabell må du ta for å få 100 ruter? Hvor mange av de rutene vil være blå?



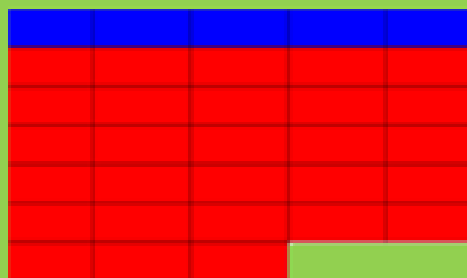
$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$



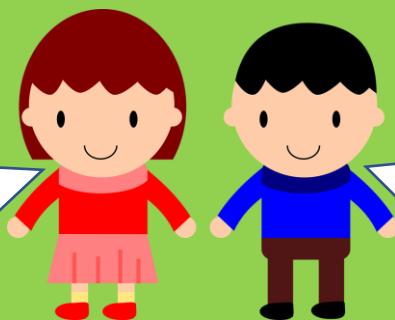
$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$



$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

- Forklar hvordan disse to personene tenker:

I alle tabellene er det fargelagt like mange blå ruter.



Det er fargelagt flest blå ruter tabellen øverst til venstre.

2. Brøk – desimal – prosent

Øvingsoppgaver – Fyll ut tabellen. Disse sammenhengene er det forventet at du kan uten hjelpemidler.

Brøk	Likeverdige brøker	Desimal	Prosent
$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$			
$\frac{1}{10}$			

Øvingsoppgaver – Fyll ut tabellen. På noen av disse oppgavene må du kanskje bruke kalkulator

Brøk	Desimal	Prosent	Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$			$\frac{37}{56}$		
	0,48		$\frac{85}{127}$		
	0,61		$\frac{21}{18}$		
	0,7			0,8	
$\frac{5}{100}$				0,9	
		37 %			7 %
		8 %			113 %

3. Å regne ut prosenttallet.

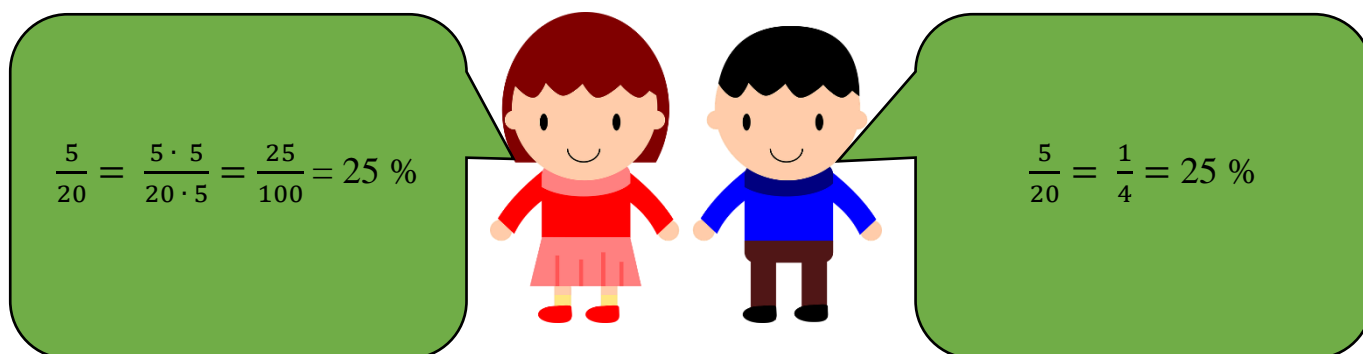
Prosentregningen i 1P er delt i to hoveddeler: det du skal klare uten hjelpemidler og det du skal klare med hjelpemidler. Delkapitlene 3.1 – 3.3 viser hvordan du kan regne uten hjelpemidler.

3.1 Utvide til hundredeler eller gjenkjenne brøker.

<u>Metode 1, trygg havn:</u>	<u>Metode 2, gjenkjenne brøker:</u>
$2 \cdot 50 = 100$	$\frac{1}{2} = 50 \%$
$3 \cdot 33 \approx 100$	$\frac{1}{3} \approx 33 \%$
$4 \cdot 25 = 100$	$\frac{1}{4} = 25 \%$
$5 \cdot 20 = 100$	$\frac{1}{5} = 20 \%$
$10 \cdot 10 = 100$	$\frac{1}{10} = 10 \%$

Eks:

I en klasse på 20 elever har 5 av elevene planlagt å reise bort i juleferien. Hvor mange prosent av klassens elever skal reise bort i juleferien?



Forklar hvordan disse to personene tenker, gjerne ved hjelp av rutenett. Hvilken metode likte du best? Hvilke begrensninger har metodene? Hva kan du gjøre om ingen av metodene fungerer?

Oppgave 1

I en klasse på 20 elever var det 14 jenter. Hvor mange prosent av elevene var jenter? Hvor mange var gutter?

Oppgave 2

I en klasse på 25 elever spiller 5 av elevene fotball. Hvor mange prosent av elevene i klassen spiller fotball? Hvor mange prosent spiller ikke fotball?

Oppgave 3

I september er det 20 skoledager. På 13 av disse dagen skinte sola. Hvor mange prosent av dagene var det ikke sol?

Oppgave 4

En elev trillet 10 terninger. 3 av disse landet på et oddetall. Hvor mange prosent av terningene viste partall?

Oppgave 5

I en klasse på 33 elever kom 3 av elevene for sent til første time. Omtrent hvor mange prosent av elevene kom tidsnok til timen?

Oppgave 6

I en gruppe med elever var det 8 jenter og 12 gutter. Hvor mange prosent av elevene i denne gruppa var gutter? Hvor mange prosent av elevene i denne gruppa var jenter?

VG3 ST består av to klasser; A- og B-klassen. Skolen arrangerer juleball for VG3, og påmeldingen viser at alle elevene i A-klassen og halvparten av elevene i B-klassen skal på juleballet. Hvor mange prosent av elevene på VG3 ST er påmeldt på juleballet?

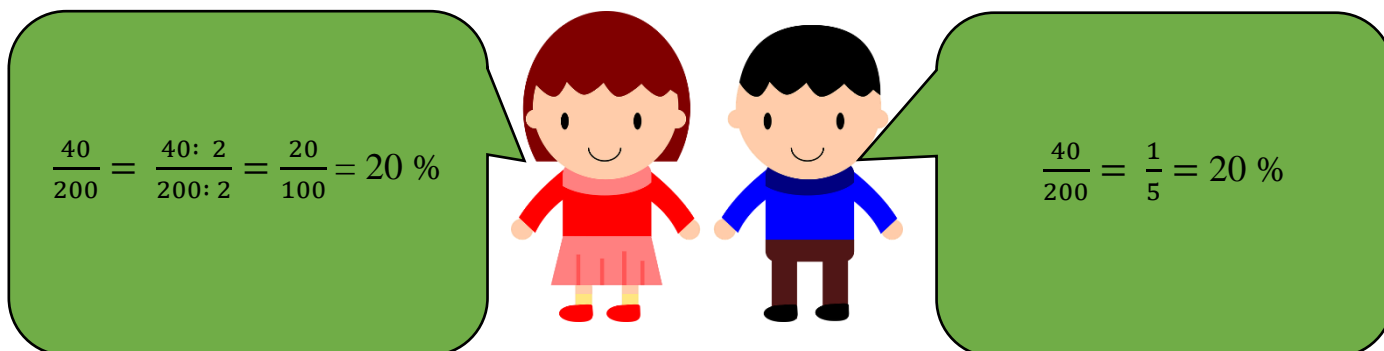
På VG1 var andelen gutter ca. 43 %. Bruk Excel til å lage minst tre forslag på antall gutter og jenter på dette trinnet.



3.2 Forkorte til hundredeler eller gjenkjenne brøker

Eks:

På en videregående skole er det 200 elever på VG1. 40 av disse elevene tar 1T. Hvor mange prosent av elevene tar 1T



Forklar hvordan disse to personene tenker, gjerne ved hjelp av rutenett. Hvilken metode likte du best? Hvilke begrensninger har metodene? Hva kan du gjøre om ingen av metodene fungerer?

Oppgave 7

Jonas skal kjøpe en bukse til 500 kroner. Han oppdager en liten flekk på buksa og blir derfor tilbudt 100 kr i avslag. Hvor mange prosent avslag blir han tilbudt?

Oppgave 8

På en videregående skole er det til sammen 1000 elever. 400 av disse går på VG3. Hvor mange prosent av elevene går på VG3? Hvor mange prosent av elevene går ikke på VG3?

Oppgave 9

Timelønnen til Tahir økte fra 160 kr til 176 kr. Hvor mange prosent økte lønnen?

Oppgave 10

I en gate bor det 400 mennesker. Av disse er 80 over 50 år. Hvor mange prosent av menneskene i denne gata er under 50 år?

Oppgave 11

I skobutikken selges et par sommersko til 360 kr. Tidligere hadde disse skoene kostet 600 kr. Hvor mange prosent rabatt får du på disse skoene?

Oppgave 12

I en klesbutikk på Tveita-senteret kostet en høstjakke 800 kr. Nå som det har blitt vinter selges denne jakka med en rabatt på 240 kr. Hvor mange prosent er rabatten på?



Prisen på en bukse var 799 kr, men ble solgt med rabatt. Bruk Excel til å lage minst tre forslag til rabatten i kroner og prosent.

3.3 Når vanskegraden øker

Oppgave 13

I en klasse på 30 elever valgte 9 av elevene 1T. Hvor mange prosent av klassens elever valgte 1T?

Oppgave 14

Et trinn besto av 120 Elever. Av disse gikk 80 elever på ST. Hvor mange prosent av elevene på trinnet gikk på ST?

Oppgave 15

Timelønnen til Tahir økte fra 160 kr til 176 kr. Hvor mange prosent økte lønnen?

Oppgave 16

I en gate bor det 400 mennesker. Av disse er 80 over 50 år. Hvor mange prosent av menneskene i denne gata er under 50 år?

Oppgave 17

I skobutikken selges et par sommersko til 360 kr. Tidligere hadde disse skoene kostet 600 kr. Hvor mange prosent rabatt får du på disse skoene?

Oppgave 18

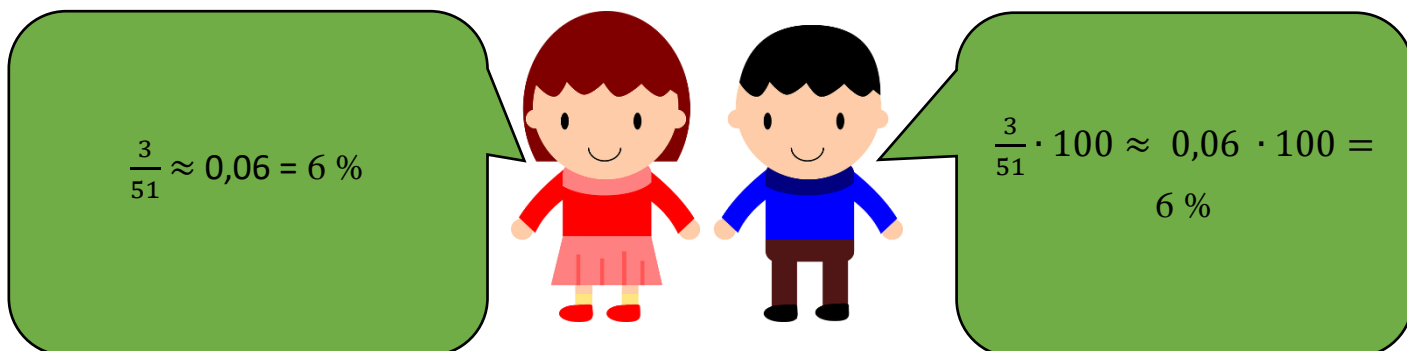
I en klesbutikk på Tveita-senteret kostet en høstjakke 800 kr. Nå som det har blitt vinter selges denne jakka med en rabatt på 240 kr. Hvor mange prosent er rabatten på?

3.4 Med kalkulator eller regneark

Noen utregninger er såpass vanskelige at det er lurt å bruke hjelpemidler.

Eks:

I en boks med kalkulatorer fungerer 48 slik de skal og 3 mangler batteri. Hvor mange prosent av kalkulatorene er ikke klare for bruk?



Forklar hvordan disse to personene tenker. En av metodene kalles prosentformel, en av metodene kalles prosentfaktor. Hvem bruker hvilken metode? Hvilken likte du best?

Oppgave 19

I 2010 var det ca. 4 860 000 innbyggere i Norge. Av disse var 637 356 mellom 10 og 19 år. Hvor stor prosent av befolkningen var mellom 10 og 19 år?

Oppgave 20

2817 av 11 200 velgere stemte på AP i et kommunevalg. Hvor mange prosent stemte AP?

Oppgave 21

En flaske rommer 0,75 L. Trine heller 0,63 L vann i flasken. Hvor mange prosent av volumet i flasken utgjør dette?

Oppgave 22

En murer blander betong. Til dette bruker han 2,4 kg sand + 1,2 kg sement + 1,5 kg pukk. Hvor mange prosent av blandingen er sand? Hvor mange prosent av blandingen utgjør sement? Hvor mange prosent av blandingen utgjør pukk?

På Hellerud VG1 går 62 % av elevene på ST, 21 % på MK og 17 % på BA. Bruk Excel til å lage minst 2 forslag til antall elever på de ulike studieretningene.



4. Å regne ut delen.

Prosentregningen i 1P er, som nevnt tidligere, delt i to hoveddeler: det du skal klare uten hjelpemidler og det du skal klare med hjelpemidler. Delkapitlene 4.1 – 4.2 viser hvordan du kan regne uten hjelpemidler.

4.1 Å gå fra 100 % til...

Hvordan komme fra start til mål ved å kun bruke multiplikasjon og/eller divisjon?						
Start	Fremgangsmåte	Mål		Start	Fremgangsmåte	Mål
100 %		1 %		100 %		30 %
100 %		10 %		100 %		40 %
100 %		50 %		100 %		60 %
100 %		33 %		100 %		75 %
100 %		20 %		100 %		15 %
100 %		25 %		100 %		12,5 %
100 %		5 %		100 %		Velg % selv

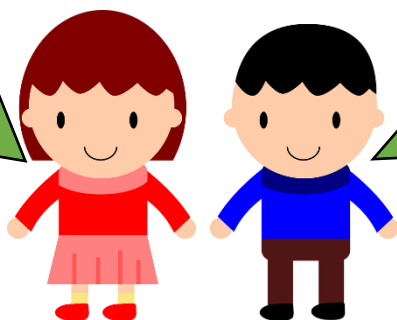
4.2 Å regne delen uten kalkulator

Eks:

Et brød besto av 35 brødskeer. Til frokost spiste familien 20 % av brødskeivene. Hvor mange brødskeer ble spist til frokost?

$$20\% = \frac{100\%}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

7 brødskeer ble spist til frokost



$$\frac{20}{100} \cdot 35 = 0,2 \cdot 35 = 7$$

9 brødskeer ble spist til frokost

Forklar hvordan disse to personene tenker, gjerne ved hjelp av rutenett. Hvilken metode likte du best? Hvilke begrensninger har metodene? Hva kan du gjøre om ingen av metodene fungerer?

Oppgave 23

På et håndballag med 20 jenter har 25 % av jentene allerede hatt bursdag. Hvor mange av jentene har hatt bursdag? Hvor mange av jentene har ikke hatt bursdag?

Oppgave 24

På Meny er en sjokolade, som egentlig kostet 50 kr, satt ned med 10 %r. Hvor mye er avslaget på? Hvor mye må du betale for sjokoladen?

Oppgave 25

En flaske med saft kostet egentlig 48 kr, men ble solgt med 33 % avslag. Hvor mye må du betale for flaska med saft?

Oppgave 26

I en klasse på 25 elever var 20 % av elevene syke. Hvor mange av klassens elever var friske?

Magnus er deltidsansatt på Meny, og har dermed timelønn. Fra 2018 til 2019 steg lønna hans med noen kroner. Bruk Excel til å lage minst tre forslag på hva den gamle timelønna var og hvor mye den steg med i prosent.



Oppgave 27

Opprinnelig pris på en genser er 600 kr. På grunn av en liten flekk selges denne med 5 % rabatt. Hvor stor er rabatten? Hvor mye må du betale for genseren?

Oppgave 28

En skobutikk selges et par sommersko med opprinnelig pris på 360 kr med 40 % rabatt. Hvor mye utgjør dette? Hva må du betale for skoene?

Oppgave 29

På en videregående skole er det til sammen 800 elever. 30 % av disse går på VG1. Hvor mange elever går på VG1?

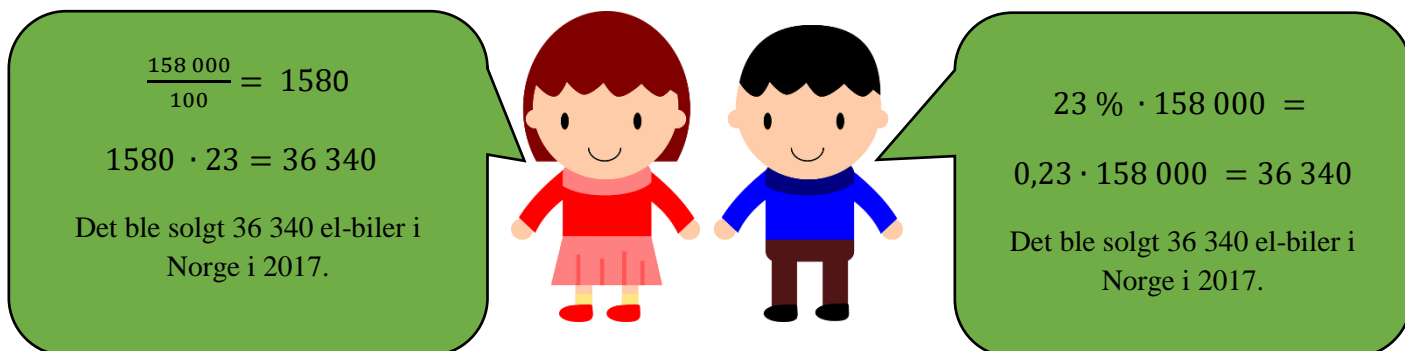
Oppgave 30

75 % av elevene på skolen i oppgave c) går på VG1 og VG2. Hvor mange elever er dette?

4.3 Med kalkulator eller regneark

Eks:

I 2017 ble det solgt ca. 158 000 nye biler i Norge. 23 % av disse var el-biler. Hvor mange el-biler ble solgt i Norge i 2017?



The illustration shows a girl and a boy standing between two green speech bubbles. The girl's bubble on the left shows a two-step calculation: first, dividing 158,000 by 100 to get 1,580, and then multiplying that result by 23 to get 36,340. The boy's bubble on the right shows a direct calculation: multiplying 23% by 158,000, which is equivalent to 0,23 multiplied by 158,000, also resulting in 36,340. Both bubbles conclude that 36,340 electric cars were sold in Norway in 2017.

$$\frac{158\,000}{100} = 1\,580$$
$$1\,580 \cdot 23 = 36\,340$$

Det ble solgt 36 340 el-biler i Norge i 2017.

$$23\% \cdot 158\,000 =$$
$$0,23 \cdot 158\,000 = 36\,340$$

Det ble solgt 36 340 el-biler i Norge i 2017.

Forklar hvordan disse to personene tenker. En av metodene kalles «veien om 1 %», en av metodene kalles prosentfaktor. Hvem bruker hvilken metode? Hvilken likte du best?

Oppgave 31

I en klasse på 25 elever kom 13 % av elevene for sent. Hvor mange elever kom for sent?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 32

På en skole med 548 elever gikk 31 % av elevene på Vg1. Hvor mange elever gikk på Vg1?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 33

I en klasse på 30 elever sluttet 13,3 % i løpet av skoleåret. Hvor mange av elevene i klassen sluttet?

Oppgave 34

Vilde hadde en timelønn på 192 kr. Når hun jobber lørdager skal hun ha 28 % tillegg. Hvor mange kroner tillegg har hun på lørdager?

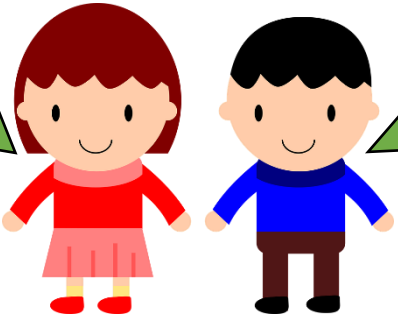
Det viser seg at Magnus fikk et lønnstillegg på 6 kr. Bruk Excel til å komme med minst tre forslag på hva den gamle timelønna var og hvor mange prosent lønnsøkning han fikk.



5. Å finne 100 %

Eks:

På et VG1-trinn valgte 20 % av elevene 1T. Dette utgjorde 32 elever. Hvor mange elever gikk på VG1-trinnet på den skolen?



20 % · 5 = 100 %
32 · 5 = 160

Det gikk 160 elever på VG1-trinnet på den skolen.

20 % = 32
1 % = 32/20 = 1,6
100 % = 1,6 · 100 = 160

Det gikk 160 elever på VG1-trinnet på den skolen.

Forklar hvordan disse to personene tenker. En av metodene kalles «veien om 1 %». Klarer du å se hvem som bruker denne metoden? Hvilken likte du best? Har noen av metodene noen begrensninger?

Oppgave 35

Prisen på en vare økte med 500 kr. Dette utgjorde en prisøkning på 10 %. Hvor mye kostet varen før og etter prisøkningen?

Oppgave 36

En TV ble satt ned med 20 %. Da ble den 1000 kr billigere. Hvor mye kostet den før den ble satt ned?

Oppgave 37

12,5 % av elevene på en skole spiller fotball på fritiden. Dette utgjør 60 elever. Hvor mange elever er det på skolen?

Oppgave 38

Verdien på en aksje steg med 7 %. Dette gjorde at aksjen ble 16,94 kr dyrere. Hvor mye kostet aksjen før verdistigningen?

Trine fikk et lønnstillegg på 8 kr. Bruk Excel til å komme med minst tre forslag på hvor mange prosent dette utgjorde, og hvor høy den opprinnelige timelønna var.



Utfyllingsoppgave – prosentregning

I denne oppgaven skal du reflektere litt rundt prosentbegrepet og bruke dette i utregninger

1. Hva betyr prosent?
2. Skriv som hundredeler, desimaltall og prosent:

Brøk	Hundredeler	Desimaltall	Prosent
$\frac{1}{2}$	= $\frac{\quad}{100}$	=	=
$\frac{1}{3}$	=	=	=
$\frac{1}{4}$	=	=	=
$\frac{1}{5}$	=	=	=
$\frac{4}{200}$	=	=	=

3. 5 av 25 elever spiser matpakka i kantina. Hvor mange prosent tilsvarer det?
4. Hanna har 1000 kr i banken. Etter at hun har satt inn bursdagspengene fra mormor har hun 1250 kr i banken. Hvor mange prosent mere penger har Hanna i banken nå?
5. I en kasse er det 1000 legoklosser. 15% av klossene er røde.
 - a) Hvor mange klosser er 10%?
 - b) Hvor mange klosser er 5%?
 - c) Kan du bruke svaret i a) og b) til å finne hvor mange klosser som er røde? Vis.

6. Ole kjøper en skjorte på salg. Skjorta kostet før salget 500 kr. Den er nå på salg til 30% rabatt.
- a) Hvor mange prosent er 500 kr her? _____
 - b) Forklar hvorfor den nye prisen på skjorta er 70% av den opprinnelige prisen
 - c) Hvor mange kroner er 10%?
 - d) Kan du bruke svaret i b) og c) til å finne ut hva Ola må betale for skjorta på salg? Vis.
7. Caspian har spilt med Pokemon kortene sine og tapt 5% av dem. Han har nå 475 kort igjen.
- a) Hvor mange prosent er 475 kort her?
 - b) Hvor mange kort er 1%?
 - c) Hvor mange prosent kort hadde han før han startet å spille? _____
 - d) Kan du bruke svaret i b) og c) til å finne ut hvor mange kort han hadde før han startet å spille? Vis.
8. Dag har kjøpt nye skjorter. Han har økt antallet skjorter med 10% og har nå 22 skjorter i skapet.
- a) Hvor mange prosent er 22 skjorter her?
 - b) Hvor mange skjorter er 1%?
 - c) Hvor mange prosent skjorter hadde han før han kjøpte de nye? _____
 - d) Kan du bruke svaret i b) og c) til å finne ut hvor mange skjorter han hadde i skapet før han kjøpte nye? Vis.

6. Å finne ny verdi

6.1 Negativ vekst

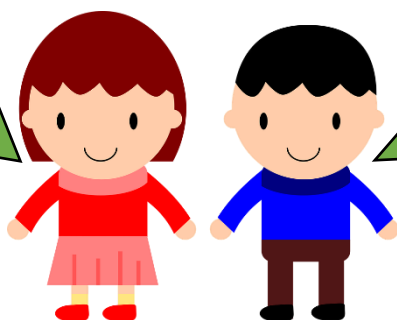
Eks:

På starten av skoleåret hadde matematikklæreren en bunke med 120 kladdebøker. Når høstferien kom hadde læreren delt ut 25 % av disse. Hvor mange bøker var det igjen i bunken?

$$100 \% - 25 \% = 75 \% = 0,75$$

$$120 \cdot 0,75 = 90$$

Læreren hadde igjen 90 kladdebøker.



$$25 \% \text{ av } 120 = 0,25 \cdot 120 = 30$$

$$120 - 30 = 90$$

Læreren hadde igjen 90 kladdebøker.

Forklar hvordan disse to personene tenker. En av metodene kalles vekstfaktor. Hvem bruker denne metoden? Hvilken likte du best?

$$- 7 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 18 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 7,5 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 18,3 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 10,2 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 17,5 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 10 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 20 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 30 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 40 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 50 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$- 60 \% = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Verdien på en moped sank med 12 %. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage minst tre forslag på nypris og verdien etter ett år.



Oppgave 39

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Hva er verdien til bilen om ett år?

Oppgave 40

Ved skolestart høsten 2018 begynte 550 elever på en VGS. I løpet av skoleåret hadde 10 % sluttet. Hvor mange elever fullførte skoleåret?

Oppgave 41

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 42

En familie skulle kjøre fra Oslo til Trondheim, en strekning som er ca. 500 km lang. Etter 2 timer hadde de kjørt 30 % av avstanden. Hvor mange km har de igjen å kjøre?

Oppgave 43

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

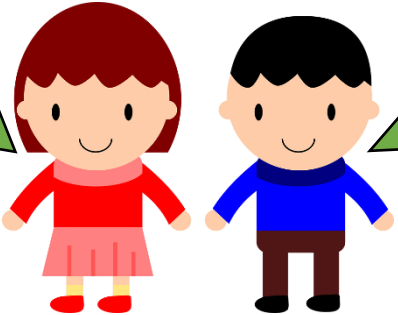
Fra 2018 til 2019 sank antallet reinsdyr i en flokk med noen prosent. I 2019 var det kun 158 dyr igjen. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage minst tre forslag på hvor mange reinsdyr det var i flokken i 2018 og hvor mange prosent bestanden sank med.



6.2 Positiv vekst

Eks:

I 2014 hadde en VGS 50 primærøkere. I 2018 hadde dette tallet steget med 20 %. Hvor mange primærøkere hadde denne skolen i 2018?



100 % + 20 % = 120 % = 1,2
 $50 \cdot 1,2 = 60$
Skolen hadde 60 primærøkere i 2018.

20 % av 50 = $0,2 \cdot 50 = 10$
 $50 + 10 = 60$
Skolen hadde 60 primærøkere i 2018.

Forklar hvordan disse to personene tenker. En av metodene kalles vekstfaktor. Hvem bruker denne metoden? Hvilken likte du best?

+15 % = _____ = _____	+20 % = _____ = _____
+25 % = _____ = _____	+40 % = _____ = _____
+ 7% = _____ = _____	+ 9 % = _____ = _____
+17,5 % = _____ = _____	+27,4 % = _____ = _____
+ 8,3 % = _____ = _____	+ 9,54 % = _____ = _____
+ 2,1 % = _____ = _____	+ 0,8 % = _____ = _____

Verdien på en leilighet steg med 8 %. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage minst tre forslag på dagens verdi på leiligheten og verdien etter ett år.



Oppgave 44

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Hva er verdien til bilen om ett år?

Oppgave 45

I 2017 var prisen på en jakke 1400 kr. I 2018 ble prisen satt opp med 10 %. Hvor mye kostet jakka i 2018?

Oppgave 46

Elevtallet på en VGS var 600. Året etter steg elevtallet med 7 %. Hvor mange elever gikk på skolen året etter?

Oppgave 47

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 48

På mandag kostet bensin 12,53 kr/L. Tirsdag hadde prisen økt med 2,3 %. Bruk vekstfaktor til å regne ut hvor mye bensinen kostet per liter på tirsdagen?

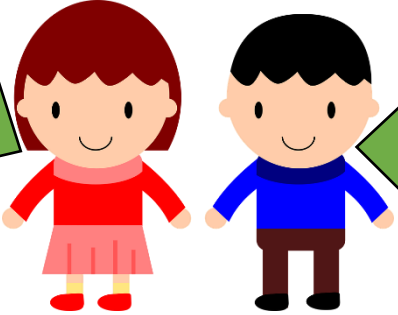
Befolkningen i Norge vokser med en liten prosent hvert år. I 2018 bodde det ca. 5,2 millioner mennesker i Norge. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage minst tre forslag på innbyggertallet i 2017 og hvor mange prosent befolkningen steg med.



6.3.1 Flere prosentvise endringer

Eks:

Prisen på utenlandske penger (ofte kalt valutakurs) forandrer seg hver dag. 3. juni 2018 var prisen på Euro 9,53 kr. Dagen etter gikk prisen opp med 3 %, deretter steg prisen med ytterligere 5 % før den falt med 2 %. Hva var prisen på Euro etter disse tre endringene?



The image shows two cartoon characters, a girl with red hair and a boy with black hair, standing between two green speech bubbles. The left bubble contains the following text:

$$\begin{aligned} + 3 \% &= 103 \% = 1,03 \\ + 5 \% &= 105 \% = 1,05 \\ - 2 \% &= 98 \% = 0,98 \end{aligned}$$
$$9,53 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 0,98 = 10,10$$

Prisen på aksjen var kr 10,10 etter disse tre endringene.

The right bubble contains the following text:

$$\begin{aligned} + 3 \% &= 103 \% = 1,03 \\ 9,53 \cdot 1,03 &= 9,81 \\ + 5 \% &= 105 \% = 1,05 \\ 9,81 \cdot 1,05 &= 10,30 \\ - 2 \% &= 98 \% = 0,98 \\ 10,30 \cdot 0,98 &= 10,10 \end{aligned}$$

Prisen på aksjen var kr 10,10 etter disse tre endringene.

Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvilken likte du best? Hva om det er enda flere endringer?

Hellerud VG1 består av 5 ST-klasser. I løpet av VG1 sluttet en liten prosentandel. Året etter, da disse elevene gikk på VG2, steg antall elever med noen få prosent, og det samme skjedde da elevene gikk på VG3. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage minst tre forslag på hvor mange elever som startet på VG1 og som fullførte VG3.



På Tveita-senteret er det to matbutikker. I dag koster en saftflaske det samme på begge butikkene. Butikk A øker først prisen med 10 %, deretter med 10 % en gang til. Butikk B øker prisen med 20 %. Vil butikkene fortsatt ha lik pris på saftflaska etter disse prisendringene?

På Tveita-senteret er det to matbutikker. I dag koster en saftflaske det samme på begge butikkene. Butikk A øker først prisen med 20 %, deretter setter den ned prisen med 10 %. Butikk B setter først ned prisen med 10 %, deretter setter den opp prisen med 20 %. Vil butikkene fortsatt ha lik pris på saftflaska etter disse prisendringene?

Oppgave 49

Hanne har en timelønn på 160 kr. Første året økte timelønnen med 3,8 %, deretter økte den med 2,7 %, og det tredje året økte lønnen med 3,1 %. Hva ble den nye timelønna hennes etter disse tre endringene?

Oppgave 50

På mandag kostet bensin 12,53 kr/L. Tirsdag hadde prisen sunket med 2 %. Onsdag sank prisen med ytterligere 3,7 % før den steg med 4,1 % på torsdag. Bruk vekstfaktor til å regne ut hvor mye bensinen kostet per liter etter torsdagens prisøkning.

Befolkningen i Snillfjord kommune endres med en liten prosentandel hvert år. Fra 2015 til 2016 økte antallet innbyggere, mens det sank fra både 2016 til 2017 og fra 2017 til 2018. I 2018 var innbyggertallet 982. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage et forslag på innbyggertallet i 2015 og hvor mange prosent innbyggertallet endret seg med.

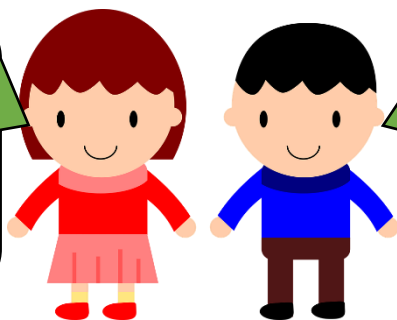
6.3.2 Flere like prosentvise endringer

Eks:

I dag kan en leilighet selges for 2,1 millioner kroner. Det er forventet at verdien på leiligheten stiger med 8 % hvert år de neste fire årene. Hvor mye kan leiligheten selges for om 4 år dersom dette stemmer?

$$2,1 \cdot 1,08 \cdot 1,08 \cdot 1,08 \cdot 1,08 = 2,86$$

Leiligheten kan selges for 2,86 millioner kroner om 4 år.



$$2,1 \cdot 1,08^4 = 2,86$$

Leiligheten kan selges for 2,86 millioner kroner om 4 år.

Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvilken likte du best? Hva om det er enda flere endringer?

Oppgave 51

Hvis vi setter for eksempel 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en viss prosent av det beløpet vi har på kontoen. Hvor mye vil vi ha på kontoen om 5 år dersom renten er på 3 %? Hvor mye har vi etter 10 år og 15 år?

Oppgave 52

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året, inntil ingen vil ha den lenger når den blir mer enn fem år. Hvor mye er PC-en verdt etter 5 år?

Oppgave 53

Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$\text{Salgspris} = 320\,000 \cdot 0,85^5$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

7. Å finne gammel verdi

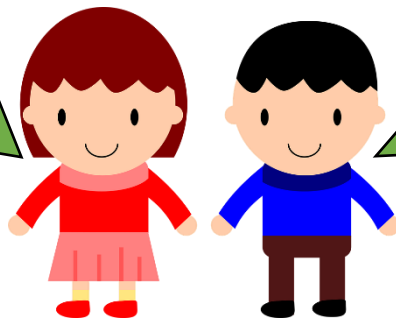
7.1 En prosentvis endring

Eks:

På 17. mai solgte en kiosk 1260 is. Dette var en nedgang på 10 % fra i fjor. Hvor mange is solgte kiosken i fjor?

$$\begin{aligned} 100\% - 10\% &= 90\% = 0,9 \\ x \cdot 0,9 &= 1260 \\ x &= \frac{1260}{0,9} \\ x &= 1400 \end{aligned}$$

Kiosken solgte 1400 is på 17. mai i fjor.



$$\begin{aligned} 100\% - 10\% &= 90\% = 0,9 \\ \text{Salg av is i fjor} &= \frac{1260}{0,9} \end{aligned}$$

Kiosken solgte 1400 is på 17. mai i fjor.

Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvilken likte du best? Kan man tippe seg frem til svaret? Hvordan hadde regnestykket blitt dersom issalget hadde økt med 10 %?

Oppgave 54

Prisen på en bukse ble satt ned med 15 %. Nå koster buksa 765 kr. Hvor mye kostet buksa før prisreduksjonen?

Oppgave 55

Elevtallet på en VGS økte med 4 % fra august 2017 til august 2018? I august 2018 var elevtallet ved skolen 582. Hvor høyt var elevtallet i august 2017?

Oppgave 56:

På 16-årsdagen sin kjøpte Mariam en moped. Det er vanlig at verdien til mopeder går det med en viss prosent hvert år. På 17-årsdagen sin setter hun opp følgende regnestykke:

$$\text{Nypris på moped} = \frac{14450}{0,85}$$

Hvor mye antar Mariam at verdien til mopeden er på 17-årsdagen hennes? Hvor mange prosent antar hun at verdien synker hvert år?

Hvor mye kostet mopeden da den var ny?

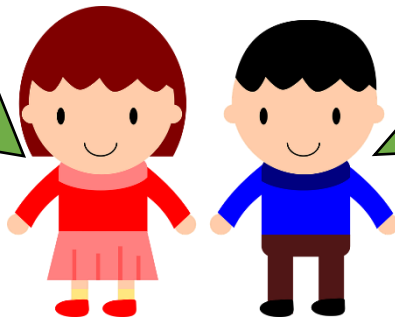
7.2 Flere prosentvise endringer

Eks:

Prisen på Euro gikk opp 10 %, deretter sank den med 8 % før den steg med 7 %. Nå koster 1 Euro 9,59 kr. Hvor mye kostet den før prisendringene?

$$\begin{aligned}x \cdot 1,1 \cdot 0,92 \cdot 1,07 &= 9,59 \\x \cdot 1,083 &= 9,59 \\x &= \frac{9,59}{1,083}\end{aligned}$$

1 Euro kostet 8,85 kr før prisendringen



$$\begin{aligned}9,59 : 1,07 &= 8,96 \\8,96 : 0,92 &= 9,73 \\9,73 : 1,1 &= 8,85\end{aligned}$$

1 Euro kostet 8,85 kr før prisendringen

Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvilken likte du best? Kan man gjøre metode 2 raskere?

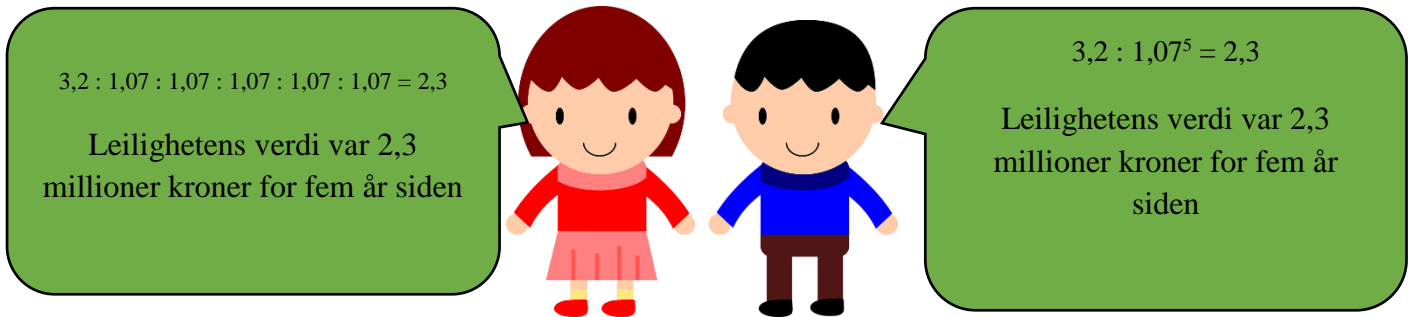
Inntakstallet på Hellerud VGS har endret seg (både opp og ned) med en viss prosentandel fra år til år de siste tre årene. I august i år begynte 620 elever på Hellerud. Bruk Excel og vekstfaktor til å lage et forslag på prosentvis endring de siste tre årene og hvor mange elever som begynte på Hellerud for tre år siden.



7.3 Flere like prosentvise endringer

Eks:

I dag kan en leilighet selges for 3,2 millioner kroner. Man antar at verdien til denne leiligheten har steget med 7 % hvert år de siste fem årene. Hvor mye var leiligheten verdt for fem år siden?



The illustration shows a girl with red hair and a boy with black hair standing between two green speech bubbles. The girl's bubble contains the calculation $3,2 : 1,07 : 1,07 : 1,07 : 1,07 : 1,07 = 2,3$ and the text 'Leilighetens verdi var 2,3 millioner kroner for fem år siden'. The boy's bubble contains the calculation $3,2 : 1,07^5 = 2,3$ and the text 'Leilighetens verdi var 2,3 millioner kroner for fem år siden'.

Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvilken likte du best? Hva om det er enda flere endringer?

Oppgave 55

For fire år siden satte Espen inn et beløp i banken. Pengene har stått urørt med 3 % årlig rente. I dag har han kr 112 550,88 på kontoen. Hvor stort var beløpet Espen satt inn for fire år siden?

Oppgave 56

Verdien til en aksje har sunket med 2,5 % seks dager på rad. I dag kan aksjen kjøpes for kr. 128,86. Hva var verdien til aksjen for seks dager siden?

Oppgave 57:

I en kommune ble det hvert år laget en telling av antall hjort, og nye tellinger har blitt laget hvert år etter. Det viser seg at antall hjort i kommunen synker med en fast prosent hvert år. Du finner følgende regnestykke som gjelder for i år:

$$\text{Antall hjort ved første telling} = \frac{850}{0,95^i}$$

Hvor mange hjort er i kommunen ved årets telling, hvor mange år er det siden første telling, og hvor mange prosent synker hjortebestande med hvert år?

Hvor mange hjort var det ved første telling?

Utfyllingsoppgave – Prosentvis endring i flere perioder

I denne oppgaven skal du reflektere litt rundt vekstfaktorer og bruke dette i utregninger

1. Regn ut

$$4 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 1,5 =$$

$$4 \cdot 0,5 =$$

2. Her har vi multiplisert 4 med ulike tall.

a) Hva skjer med et tall når det multipliseres med noe som er større enn 1?

b) Hvor mye endres det når det multipliseres med 1,5?

c) Hva skjer med et tall som multipliseres med noe som er mindre enn 1?

d) Hvor mye endres det når det multipliseres med 0,5?

3. Finn vekstfaktoren til noe som øker med 3%

4. Finn vekstfaktoren til noe som avtar med 8%

5. Fyll ut tabellen

- a. Regn først ut vekstfaktorene ut fra endringen i prosent
- b. Regn så ut ny pris på en vare som koster 2500 kr i utgangspunktet.

Endring	Utregning = Vekstfaktor	Utregning = Ny pris
+200 %		
+100 %		
+ 50 %		
+ 30 %		
+12,5 %		
+10 %		
+ 1 %		
+ 0,1 %		
0,0 %		
-0,1 %		
-1 %		
-10 %		
-12,5 %		
-30 %		
-50 %		
-100 %		

6. Berit har 25 000 kr i banken. Hun setter ikke inn flere penger og tar heller ikke ut noe. Hun får 1,5% rente per år.

a) Hva er vekstfaktoren i denne situasjonen her?

b) Hvor mye har Berit i banken om 1 år?

c) Hvor mye har Berit i banken om 10 år?

7. En bil som ble kjøpt for 5 år siden er i dag verdt 155 297 kr. Verdien har avtatt med 15% hvert år siden den var ny. Vi antar at verdien vil fortsette å avta på samme måte de neste årene fremover.

a) Hva er vekstfaktoren i denne situasjonen her?

b) Hva kostet bilen da den var ny?

c) Når er bilen verdt mindre enn vrakpanten på 3000 kr?

8. Noe å tenke på:

Hvorfor er $4 \cdot 1,5^{-1}$ mindre enn 4? Skriv ned forklaringen din.

Blandede oppgaver

B1

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)

Tidligere kostet en vare 50 kroner. Nå koster varen 90 kroner.
Hvor mange prosent har prisen økt med?

B2

Tidligere kostet en vare 90 kroner. Nå koster varen 50 kroner.
Hvor mange prosent har prisen minnet med?

B3

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)

I løpet av noen år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time.
Hvor mange prosent steg timelønnen?

B4

(Eksamen 1P våren 2015, Del 1)

Skriv som prosent

- a) 0,451
- b) $\frac{5}{25}$

B5

(Eksamen 1P høsten 2016, del 1)

a) Skriv som prosent

- 1) $\frac{1}{5}$
- 2) $\frac{135}{250}$

b) I en klasse er $\frac{3}{4}$ av elevene jenter. 20 % av jentene spiller håndball. Ingen av guttene spiller håndball. Hvor mange prosent av elevene i klassen spiller håndball?

B6



a) I et borettslag ble det stemt over et forslag som krevde 2/3 flertall for å bli vedtatt. 46 av 74 stemte for forslaget. Ble forslaget vedtatt?

- b) I et annet borettslag stemte 81 for og 39 mot et forslag som også krevde 2/3 flertall. Ble dette forslaget vedtatt?

B7

(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

Det bor ca. 7,2 milliarder mennesker på jorda. 15 % har ikke tilgang til rent vann. Omtrent hvor mange mennesker har ikke tilgang på rent vann?

B8

(Eksamen 2P våren 2008, Del 2)

I butikker ser en ofte tilbud av typen ”Ta tre, betal for to”. Du får altså tre varer til prisen for to.

- a) En klesbutikk hadde et slikt tilbud på T-skjorter. Der kostet én T-skjorte 129 kroner. Hvor mange prosent avslag vil du få ved å benytte deg av tilbudet ”Ta tre, betal for to”?

- b) 🤔 I tegneseriestripen nedenfor har Pondus tolket tilbudet annerledes. Hvor mange prosent avslag fikk han?



B9



Hos en frisør betaler du full pris for de fire første klippene, men får 50 % rabatt på det femte. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du ser på disse fem klippene samlet?


B10

(Eksamen 2P våren 2011, Del 1)

Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din og fyll inn det som mangler.

Prosentvis endring	Vekstfaktor
+ 2 %	
- 68 %	
	0,25
	2

B11

- a) I følge Aftenposten 20. juni 2013 har antall leverte brev per postkasse gått ned fra 750 i år 2000 til 450 i 2012. Hvor mange prosent har antall brev per postkasse minnet?
- b)  Posten antar at i 2020 vil antall brev ha falt til 230 per postkasse i året. De sier at da har to tredjedeler av posten forsvunnet på 20 år. Undersøk om denne påstanden er riktig.

B12

(Eksamen våren 2013, Del 1)



En vare koster nå 210 kr. Prisen er da satt ned med 30 %.
Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

B13

I mai 2013 eksporterte norske bedrifter varer og tjenester for 72,9 milliarder kroner. Dette var 11,2 % mindre enn i mai 2012. Hvor stor var eksporten i mai 2012?

B14

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 2)

Siri setter inn 12 000 kroner på en ny bankkonto. Hun lar pengene stå urørt og får 4,5 % rente per år.

Hvor mye vil hun ha på kontoen etter 15 år?

B15

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Stian har en bil som i dag er verdt 270 000 kroner. Verdien til bilen har avtatt med 10 % det siste året. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 10 % hvert år i årene framover.

- 1) Hvor mye vil bilen være verdt om ett år?
- 2) Hvor mye var bilen verdt for ett år siden?

B16

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)



En vare selges i to forskjellige butikker. Prisen er den samme i begge butikkene. I butikk A settes prisen opp med 20 %. I butikk B settes prisen først opp med 10 % og så etter noen dager med 10 % til. Marit påstår at prisen da fremdeles er den samme i begge butikkene.

Forklar Marit hvorfor dette ikke er riktig. Bruk gjerne et eksempel når du forklarer.

B17

(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)

En bil koster 250 000 kroner. Bilens verdi avtar med 15 % per år.

Forklar hvilket av regnestykkene nedenfor som kan brukes for å finne hvor mye bilen er verd etter 10 år.

- 1) $250\,000 - 10 \cdot \frac{250\,000 \cdot 15}{100}$
- 2) $250\,000 \cdot 0,15^{10}$
- 3) $250\,000 \cdot 0,85^{10}$

B18



Fra 2009 til 2012 steg norske boligpriser i gjennomsnitt med 8,3 % hvert år. Hvor mange prosent steg boligprisene totalt fra 2009 til 2012? (Nei, svaret er ikke 24,9 %!)

B19

(Eksamen 1P våren 2010, Del 2)



Ola skal bygge hus. Huset vil koste 2 300 000 kroner. Han har 150 000 kroner i banken. Resten må han låne. I Husbanken får han låne 80 % av det huset vil koste. Renten i Husbanken er 4 % per år. Resten av pengene må han låne i en privat bank til 6 % rente per år.

- a) Hvor mye penger får Ola låne i Husbanken, og hvor mye må han låne i den private banken?
- b) Hvor mange kroner må han til sammen betale i renter i Husbanken og den private banken det første året?

Ola kan trekke fra 28 % av rentekostnadene på skatten. Dette kalles et skattefradrag.

- c) Hvor store blir renteutgiftene til Ola det første året, dersom vi tar hensyn til skattefradraget?

B20

En bensinstasjon reklamerer for bilvask: "Kjøp kupongkort med 5 vask, betal for 3. Spar 40 %." Stemmer dette?


B21

(Eksamen 1P våren 2014, Del 2)

Prisen på en vare er satt opp 10 % fem ganger. Opprinnelig kostet varen 246 kroner.

- a) Hvor mye koster varen nå?
- b) Hvor mange prosent er prisen totalt satt opp?

Prisen på en annen vare også satt opp 10 % fem ganger. Nå koster varen 550 kroner.

- c)  Hva kostet denne varen opprinnelig?

Kapittel 3. Funksjoner



Mål for kapittel 3, funksjoner.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- redegjøre for begrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner
- undersøke kombinasjoner av polynomfunksjoner, rotfunksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å fastsette nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultatene

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- hva en lineær- og polynomfunksjon er
- hva nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt er og hvordan jeg finner det ved hånd og ved bruk av grafisk verktøy
- hvordan grafisk fremstille en funksjon både for hånd og ved bruk av digitale verktøy
- hvilken informasjon en grafisk fremstilling av en funksjon skal inneholde
- hvordan jeg finner stigningstall og konstantledd i en funksjon

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- hvordan jeg finner stigningstallet og konstantleddet til en lineær funksjon
- hva en funksjon fremstiller
- hvorfor en grafisk fremstilling må inneholde noe grunnleggende informasjon utover funksjonen

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- tolke en funksjon, både ved funksjonsuttrykk og grafisk
- forklare de praktiske betydningene av en funksjon
- lage og løse sammensatte tekstoppgaver knyttet til funksjoner
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – Måle og presentere

I denne oppgaven skal dere jobbe i par. Dere skal utføre, måle og notere. Bli enige om hvem som gjør hva.

Dere skal måle (enten vekten eller lengden) av ulikt antall gjenstander du får av læreren din. Deretter skal dere presentere resultatene for resten av klassen. Dette skal dere gjøre ved å

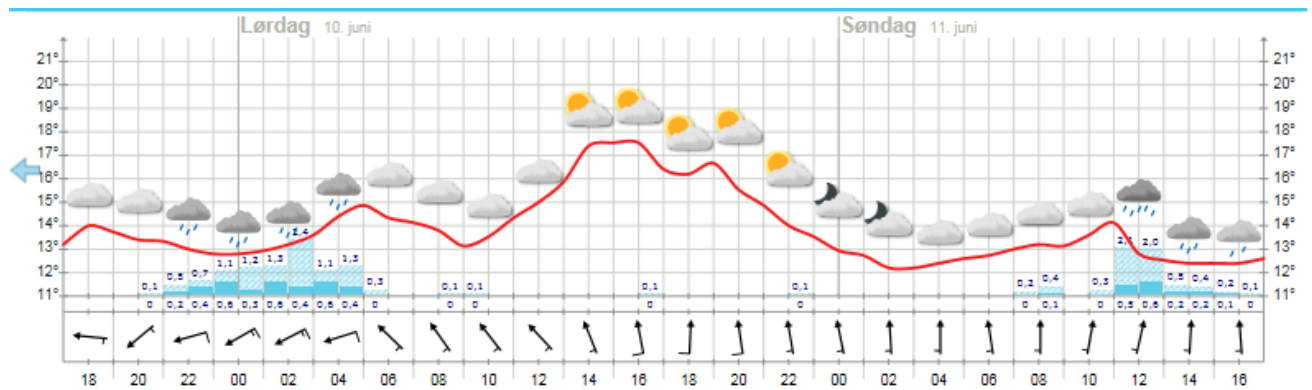
- fylle ut tabellen nedenfor til venstre
- fremstille resultatene i et koordinatsystem dere får av læreren
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

Måle:			Måle:	
Antall	Måltall i		Antall	Måltall i
0			0	
1			1	
2			2	
3			3	
4			4	

Deretter får dere en startverdi av læreren din. Dere skal nå gjøre det samme som dere gjorde ovenfor. Altså, du skal:

- fylle ut tabellen ovenfor til høyre
- fremstille resultatene i det samme koordinatsystemet
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

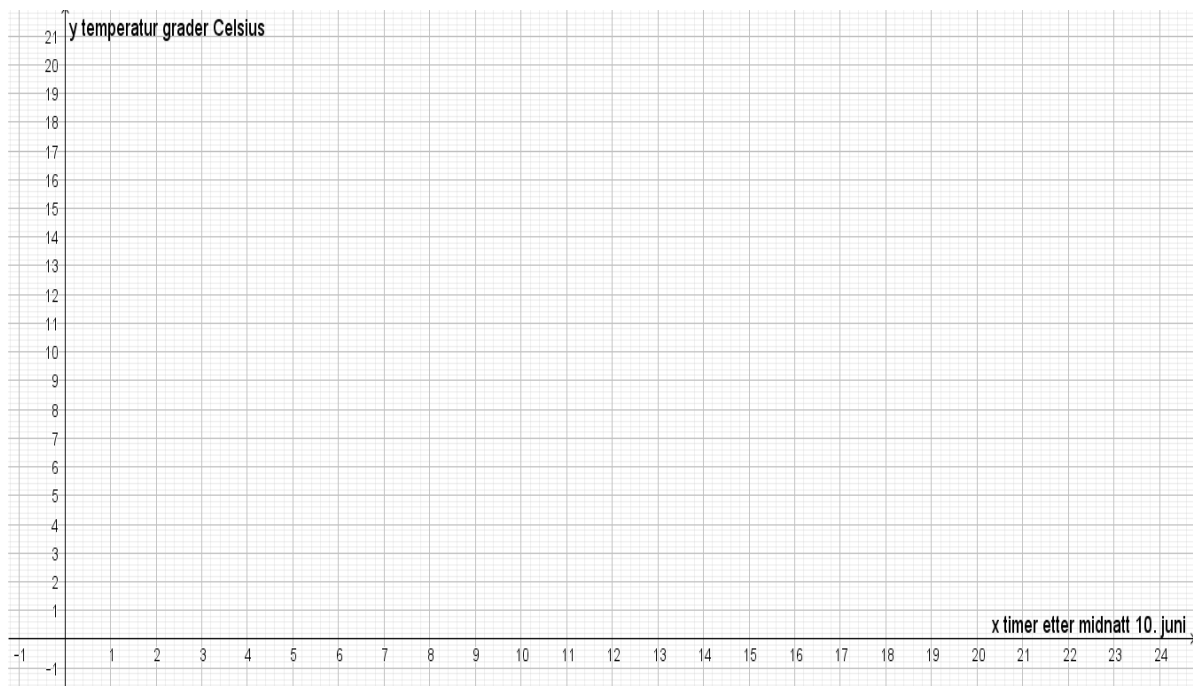
En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.



Se på bildet over fra yr.no som viser varselet for Hellerud videregående skole. Angi tidspunktene som hele timer, og temperaturen med én desimal. Starttidspunktet er kl. 17:00 fredag 9.juni.

- a) Når er det varmest på søndag?
 1. Hva er temperaturen da?
 2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
- b) Når blir det kaldest på lørdag?
 1. Hva er temperaturen da?
 2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
- c) Når vil det være varmest i perioden? (marker på figuren)
- d) Når vil det være kaldest i perioden? (marker på figuren)
- e) Hvor stor er forskjellen mellom det varmeste og kaldeste på lørdag og hvor mange timer går det fra det er kaldest til varmest?
- f) Hvor mye stiger temperaturen med per time fra det kaldeste til det varmeste på lørdag?
- g) Hvor mange ganger er temperaturen $15\text{ }^{\circ}\text{C}$? (marker på figuren)
- h) Når er temperaturen $13\text{ }^{\circ}\text{C}$? (marker på figuren)

- i) I hvilken periode er temperaturøkningen sterkest? (marker på figuren)
- j) I hvilken periode er temperaturreduksjonen sterkest? (marker på figuren)
- k) Tegn en framstilling av temperaturutviklingen i løpet av lørdag 10. juni i et koordinatsystem. Merk av temperatur hver time og tegn. Beskriv deretter temperaturutviklingen det døgnet med egne ord og relevante matematiske begreper.



Beskrivelse med ord:

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

1. Noen begreper

1.1 Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

1.2 Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*.

Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

1.3 Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

1.4 Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

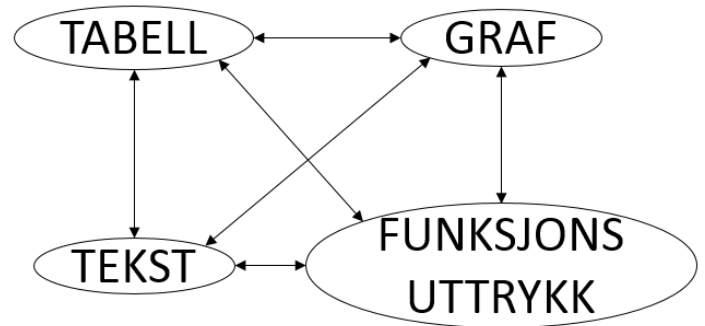
Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

2. Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

- 1) en *tabell*
- 2) en *graf*
- 3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.
- 4) En tekst



Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for x .

Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for y .

2.1 Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr

Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr

Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3,5 = 70$ kr

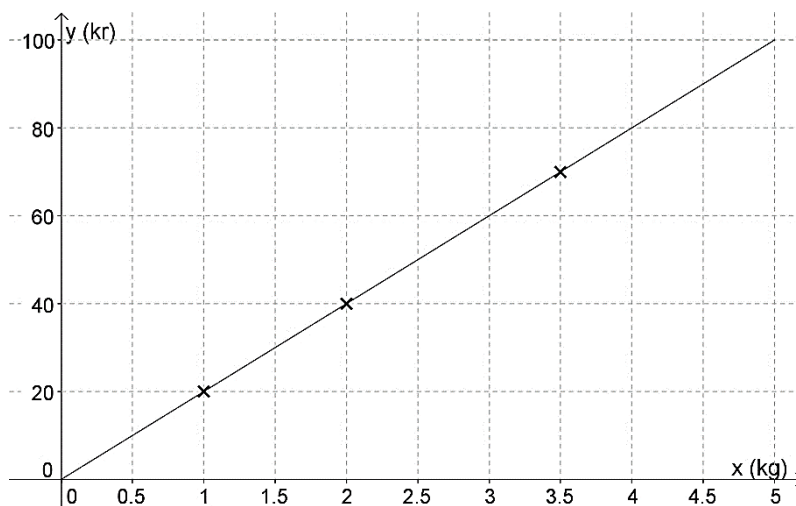
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (x) og prisen av posen (y) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenhetene* i tabellen.

2.2 Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *graf*en til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

3. Lineære funksjoner

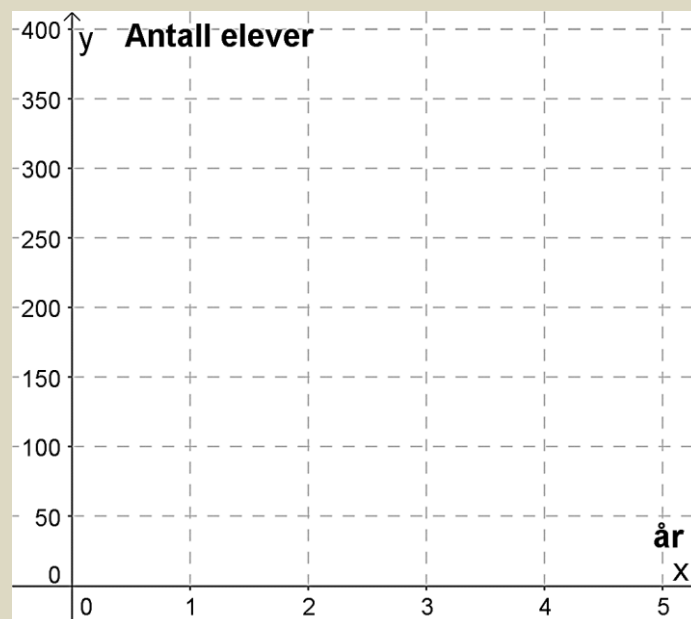
I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

Oppgave 1

Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

- a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? _____
- b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? _____
- c) Hvor mange elever er det ved skolen om 4 år? _____
- d) Merk av elevtallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet under:

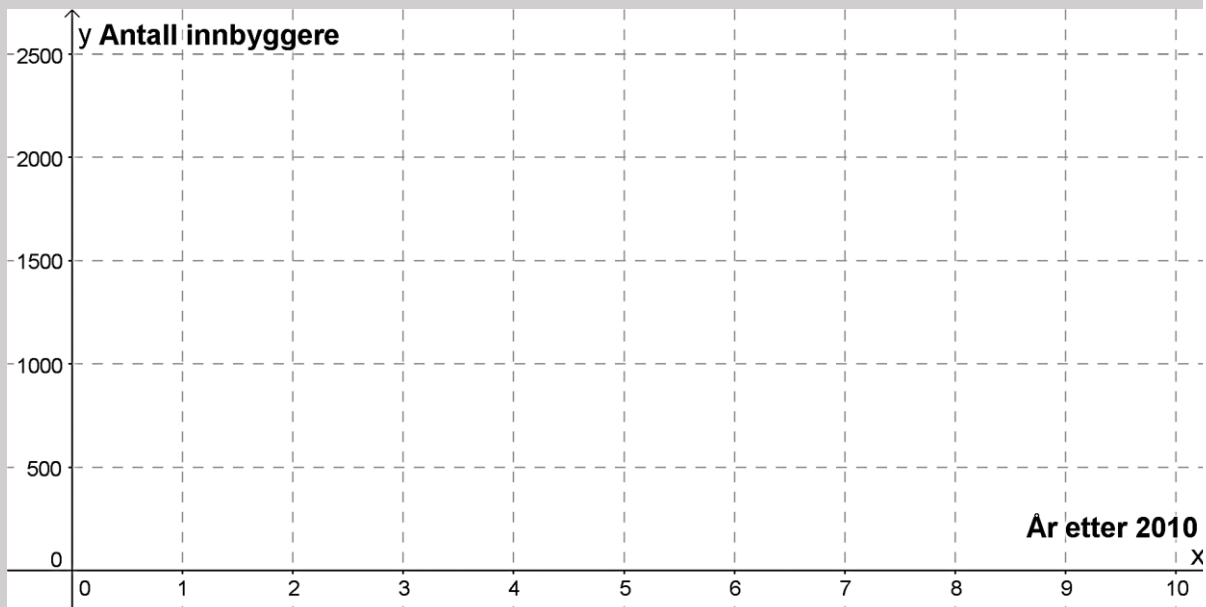


- e) Legg merke til at de tre punktene ligger på en rett linje, og tegn linja som går gjennom punktene.
- f) Når vil elevtallet ved skolen passere 300 dersom denne utviklingen fortsetter?

Oppgave 2

I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Årene etterpå har antall innbyggere avtatt (gått ned, minket) med 250 per år.

- a) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2012? _____
- b) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2015? _____
- c) Hvis vi regner med at utviklingen vil fortsette, hvor mange innbyggere vil det være i bygda i 2020? _____
- d) Merk av innbyggertallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet



- e) Legg merke til at de tre punktene ligger langs en rett linje og tegn linja gjennom punktene.

Grafene i oppgave 1 og oppgave 2 viser begge lineær vekst.

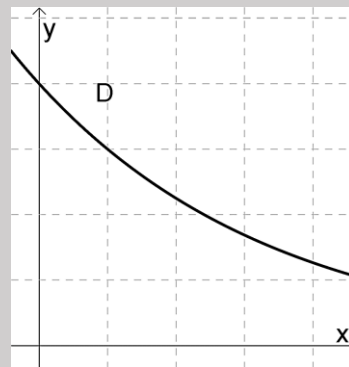
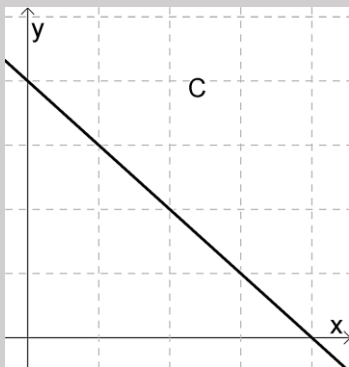
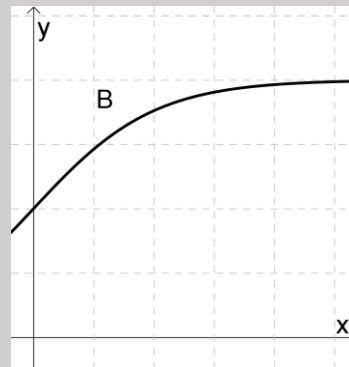
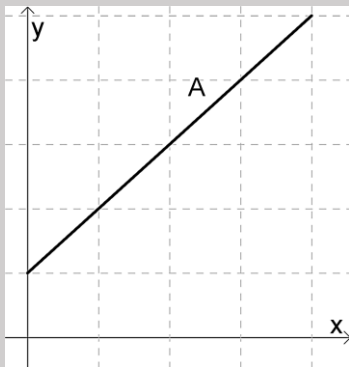
- Hva er likt?
- Hva er forskjellig?

Den grafiske tolkningen av lineær vekst er en **rett linje**.

Ved lineær vekst er **veksten lik** per enhet. Vi kan både ha positiv vekst (noe øker) og negativ vekst (noe avtar)

Oppgave 3

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser lineær vekst.



a) Forklar hvilke(n) graf(er) som viser lineær vekst, og begrunn svaret.

b) Beskriv en praktisk situasjon som passer til de(n) grafen(e) som viser lineær vekst.

Oppgave 4

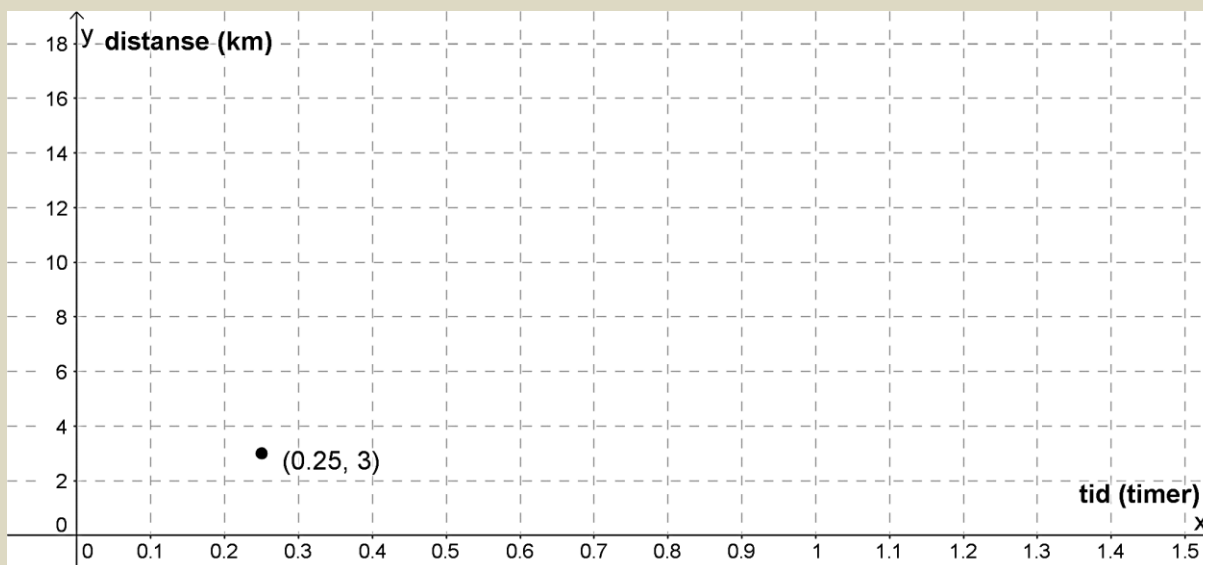
Vi løper på tredemølle med jevn fart 12 km/t og vil finne ut hvor langt vi løper dersom vi holder denne farten

- a) Fyll ut resten av tabellen under og merk av avstandene som punkter i koordinatsystemet.

x (tid (timer))	$f(x)$ (distanse (km))
0,25	3
0,5	
1	
1,5	

- b) Hvorfor viser denne situasjonen lineær vekst?
-

- c) Merk av punktene i koordinatsystemet og trekk en rett linje gjennom dem.



- d) Bruk grafen til å finne ut omtrent hvor lenge du må løpe for å ha løpt 10 km
-

- e) Hvor langt løper du i løpet av en time?
-

Praktisk tolkning av en lineær funksjon

Alle lineære funksjoner har

- **konstantledd** (der grafen skjærer y-aksen)
- **stigningstall** (hvor mye funksjonsverdien øker med når x-verdien øker med 1)

Som regel kaller man konstantleddet b og stigningstallet a . (a og b står for tall).

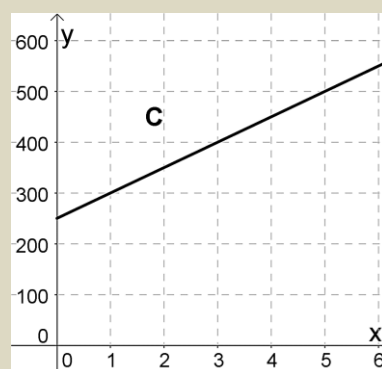
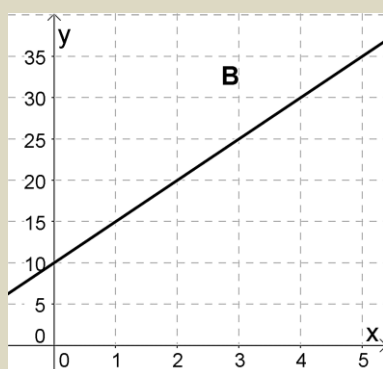
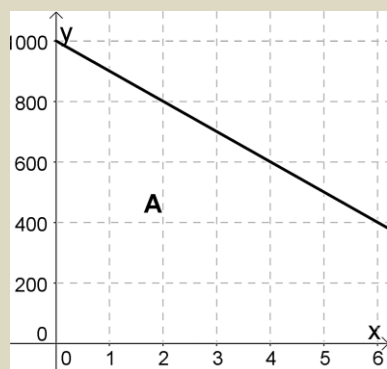
Uttrykket til en lineær funksjon kan da alltid skrives som

$$f(x) = a \cdot x + b \text{ eller } f(x) = b + a \cdot x$$

Oppgave 5

a) Hva er konstantleddet og stigningstallet til funksjonene i grafene under?

b) Hva er uttrykket til hver av funksjonene i grafene under?



A: $a =$ _____

B: $a =$ _____

C: $a =$ _____

$b =$ _____

$b =$ _____

$b =$ _____

$f(x) =$ _____

$f(x) =$ _____

$f(x) =$ _____

Det er interessant å vite uttrykket til en lineær funksjon fordi det gir oss informasjon om hva funksjonen beskriver. Vi skal nå finne uttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2:

Eksempel 1

- 1) Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

Antall elever totalt vil være $150 + \text{endringen}$.

Endringen er $+25$ hvert år, altså $25 \cdot \text{antall år}$.

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med x

Antall elever etter x år er gitt ved funksjonen $f(x) = 150 + 25 \cdot x$

- 1) I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Hvert år siden da har antall innbyggere avtatt (sunket) med 250.

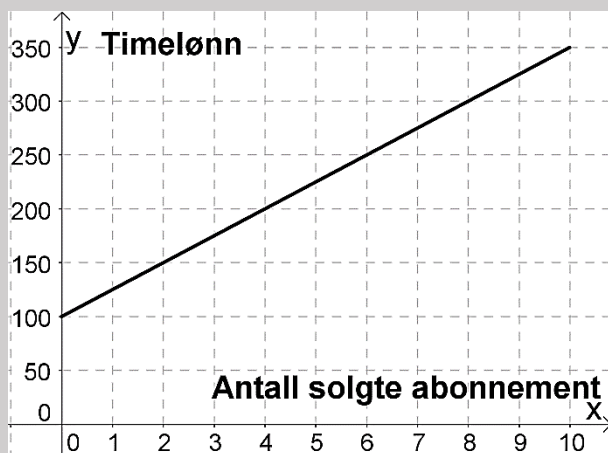
Antall innbyggere totalt vil være $2500 + \text{endringen}$

Endringen her er negativ (blir færre), -250 hvert år, altså $-250 \cdot \text{antall år}$

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med x

Antall innbyggere etter x år er gitt ved funksjonen $f(x) = 2500 - 250 \cdot x$

Oppgave 6



Emma arbeider som telefonselger.

Timelønna hennes er delvis provisjonsbasert, dvs at hun får et fast beløp hver time, i tillegg til en bestemt sum per abonnement hun selger.

Bestem uttrykket til funksjonen.

Hva sier uttrykket om lønna til Emma?

Oppgave 7

En fotobedrift selger album med bilder.

Prisen på albumet med x antall bilder er gitt ved funksjonen $P(x) = 100 + 20x$.

Hva er prisen på albumet (uten bilder)? _____

Hva er prisen for ett bilde? _____

Hvor mye vil et album med 10 bilder koste? _____

Lineære funksjoner i GeoGebra


Vi kan bruke en graftegner (GeoGebra) til å tegne lineære funksjoner. Vi skriver da inn funksjonsuttrykket i GeoGebra. Det er viktig å sette navn på aksene i koordinatsystemet. I eksemplet under repeterer vi fra 1P hvordan vi gjør det.

Eksempel:

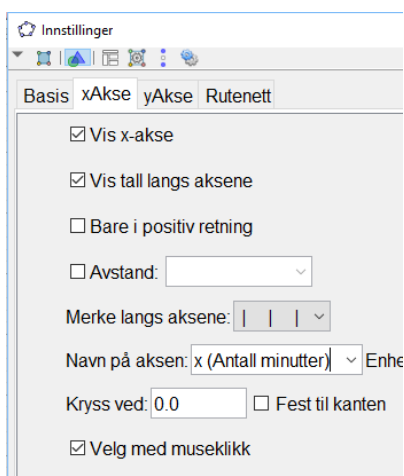
Ole skal lade opp mobiltelefonen sin. Displayet viser at han har 23% igjen på batteriet og batteriet lades med 1% i minuttet. Uttrykket $f(x) = x + 23$ viser oppladingsprosenten til batteriet etter x minutter. Vi skal tegne funksjonen de første 60 minuttene.

Vi går på **Skriv inn** og velger **Funksjon(Funksjon,start,slutt)**. Vi skriver inn det som står etter = i uttrykket og 0 på start og 60 på slutt slik **Funksjon(x+23,0,60)** og trykker enter.

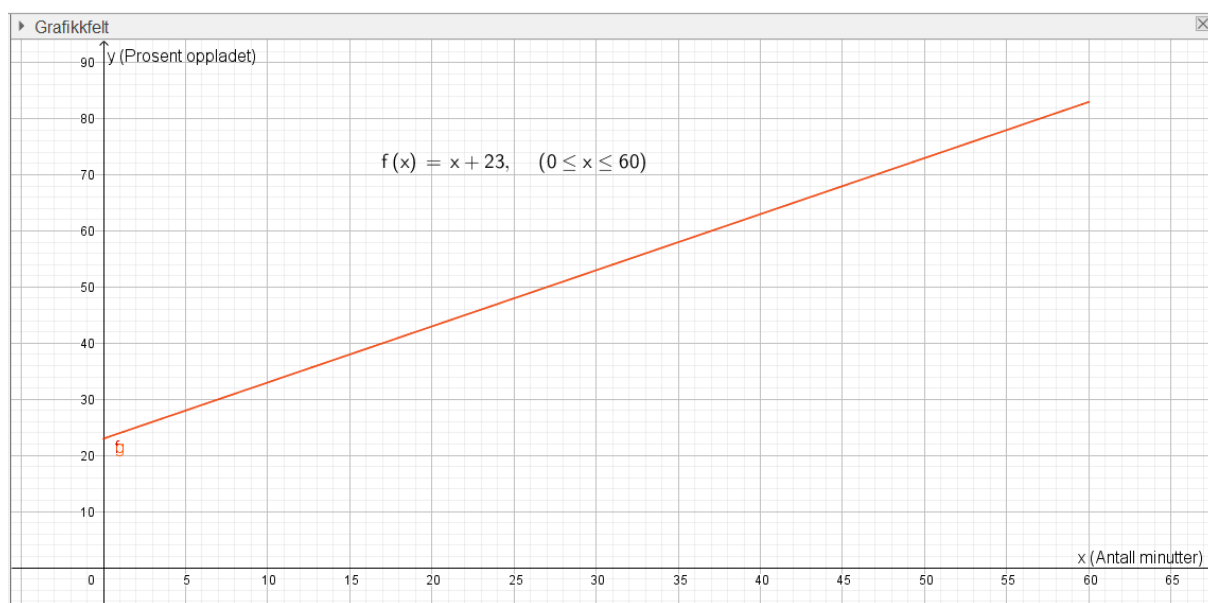


Vi stiller aksene med  og drar i x og y-aksen slik at grafen legger seg over x-aksen fra 0 til 60.

Vi setter navn på aksene ved å **høyreklikke i Grafikkfeltet**, velge **Grafikkfelt** og x- og y-akse etter tur. Der det står **Navn på aksene** skriver vi inn hva x og y er.



Da blir bildet i GeoGebra slik:



Oppgave 8

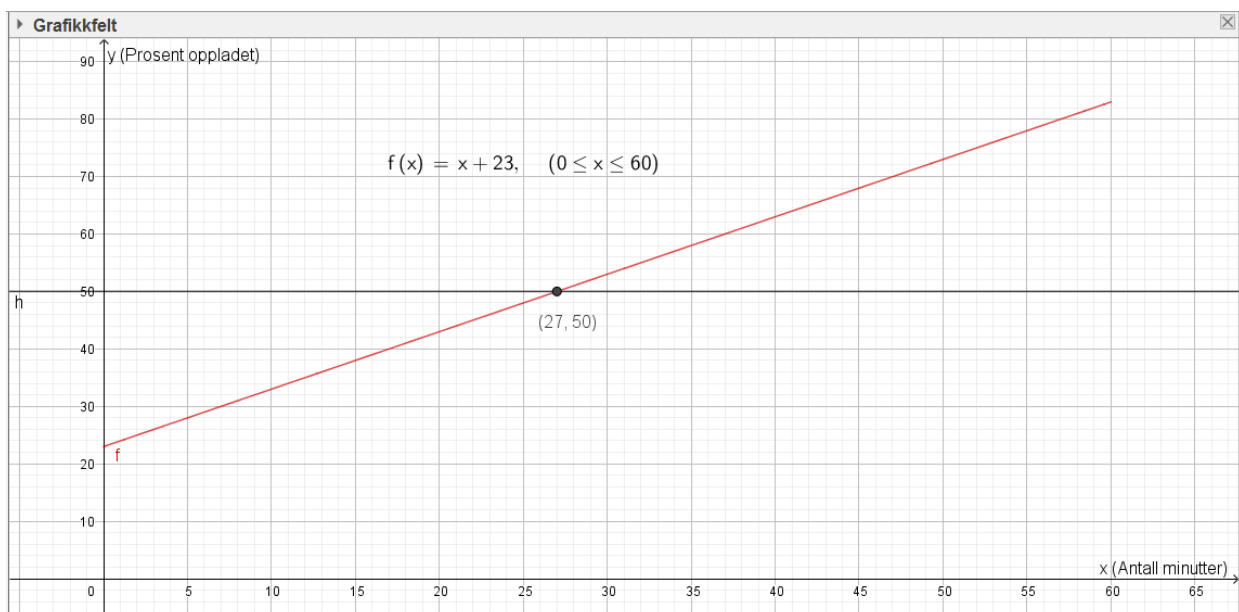
Bestem funksjonsuttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2. Tegn dem i hvert sitt koordinatsystem i GeoGebra og la $0 \ll x \ll 10$. Skriv ut grafene og lim dem inn her:

Vi kan bruke grafen til å finne informasjon om situasjonen vi har tegnet.

Eksempel.

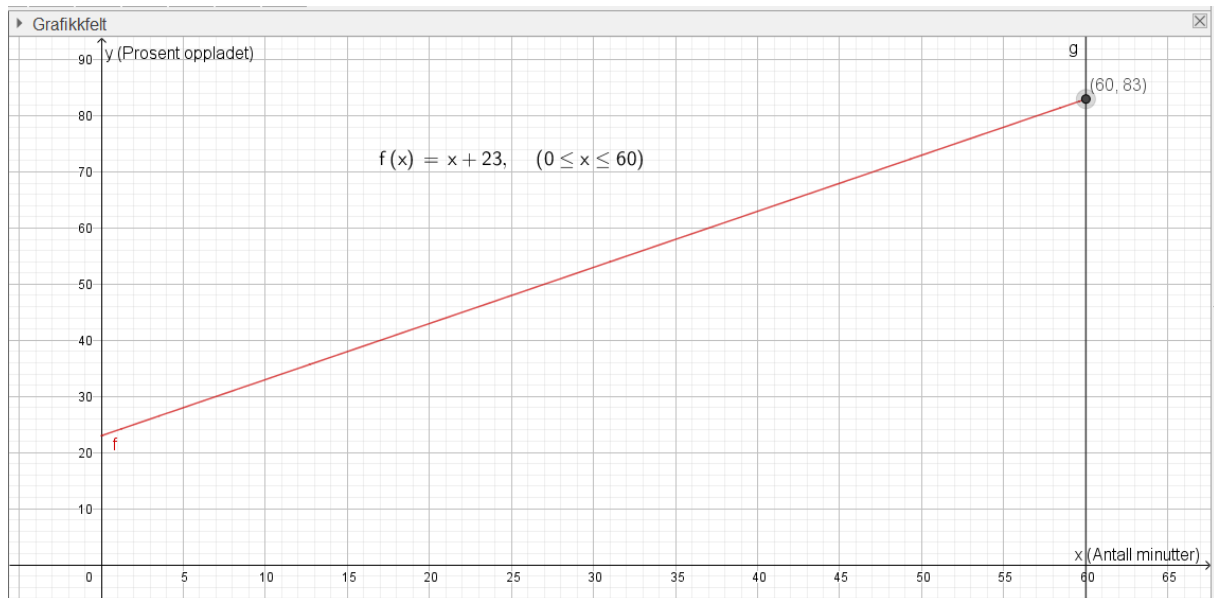
Ole lurer på når batterikapasiteten er på 50% og hvor mange prosent han har på batteriet etter 60 minutter.

Vi finner batterikapasiteten på y-aksen og skriver derfor inn $y = 50$ på **Skriv inn** og trykker enter. Vi får da frem en rett linje som krysser grafen. Vi leser av x-verdien i skjæringspunktet med grafen ved å bruke **Skjæring mellom to objekt** (i nedtrekksmenyen til andre knapp fra venstre).



Vi ser at batterikapasiteten er 50% etter 27 minutter.

Når vi skal finne batterikapasiteten etter 60 minutter, gjør vi det samme som ovenfor. Men vi finner minuttene på x-aksen. Derfor skriver vi inn $x = 60$ på **Skriv inn** istedenfor. Vi leser så av y-verdien i skjæringspunktet med grafen.



Vi ser at batterikapasiteten er på 83% etter 60 minutter.

Du må alltid lime inn GeoGebra bildet i besvarelsen din og skrive svartekst og fremgangsmåte (hvilke kommandoer du har brukt i GeoGebra)

Oppgave 9

Vi har en vekta og et begerglass. Vi slår på vekta og setter begerglasset på vekta. Vi legger i en og en terning og leser av hva vekta viser. Uttrykket

$$y = 5x + 100$$

Viser vekta y når vi har lagt på x antall terninger.

- Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 20
- Hva viser vekta når vi har lagt på 7 terninger?
- Hvor mange terninger ligger det på vekta når den viser 150 gram?
- Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
- Hvor mye veier en terning?

Oppgave 10

Per fyller bensintanken helt full. Han vil se hvor langt han kan komme på en full tank.
Uttrykket

$$y = -0,5x + 45$$

viser hvor mange liter han har igjen på tanken når han har kjørt x mil.

- Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 100
- Hvor mye har Per igjen på tanken når han har kjørt 30 mil?
- Hvor langt har Per kjørt når det er 10 liter igjen på tanken?
- Hvor langt har han kjørt når tanken er tom?
- Hvor krysser denne linja y -aksen? Hva forteller denne verdien?
- Hvor mange liter bruker bilen per mil?

4. Eksponentielle funksjoner

I praksis kan det være lett å blande eksponentiell og lineær vekst, et mål er derfor å kunne avgjøre når veksten er eksponentiell og når den er lineær.

«Ja, Nei, Hvorfor?»

Timelønna til Peter er 200 kr. Han får to ulike tilbud om lønnsøkning:

Tilbud A: 10 % etter 6 måneder, deretter nye 10 % etter 12 måneder.

Tilbud B: 20 kr etter 6 måneder, deretter nye 20 kr etter 12 måneder

Vil Peter ha den samme lønna etter 12 måneder uavhengig av hvilket tilbud han velger?

Eksempel 2

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Hvor mye er det på konto etter 1 år? Etter 2 år? Hvorfor blir økningen forskjellig disse årene?

Etter 1 år vil si at 10000 kr har økt med 5 %. 1 % av 10000 kr er $\frac{10000}{100} = 100$ kr. 5 % er da $100 \cdot 5 = 500$. Etter 1 år er det $10000 + 500 = 10500$ kroner i fondet.

Etter 2 år vil si at 10500 kr har økt med 5 %. 1 % av 10500 kr er $\frac{10500}{100} = 105$ kr. 5 % er da $105 \cdot 5 = 525$. Etter 2 år er det $10500 + 525 = 11025$ kroner i fondet.

Det første året øker fondet med 500 kr, det andre året øker fondet med 525 kr. Økningen er altså større det andre året, fordi tallet vi regner 5 % av er større.

Oppgave 11

Ved en skole er det 1000 elever. Antallet elever **vekser** med omtrent 10 % hvert år.

- a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? _____
- b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? _____
- c) Hvorfor er endringen eksponentiell? _____

Oppgave 12

- a) En flatskjerm koster 10 000 kr. Vi antar at verdien **avtar** med 10 % hvert år.
- b) Hva er verdien til flatskjermen etter 1 år? _____
- c) Hva er verdien til flatskjermen etter 2 år? _____
- d) Hvorfor er endringen eksponentiell? _____

Oppgave 13

Tabellen under viser økningen i antall treningstimer til en svømmer fra hun er 15 til hun er 20 år.

- a) Regn ut økningen i antall timer fra et år til det neste, fyll inn i tabellen
- b) Regn ut økningen i prosent fra et år til det neste, fyll inn i tabellen
- c) Er økningen i antall treningstimer eksponentiell? Begrunn svaret.

Alder	15	16	17	18	19	20
Timer	500	550	605	665	730	803
Økning i timer						
Økning i prosent						

Ved eksponentiell vekst er endringen **prosentvis lik** per enhet.

Uttrykket til eksponentielle funksjoner

Fra kapitlet om prosent og oppgavene over ser vi at verdien alltid endrer seg med samme prosent fra en periode til den neste når veksten er eksponentiell. Da kan vi skrive verdien etter x år som ett regnestykke. Vi ser på situasjonen fra eksempel 2:

Eksempel 3

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Vekstfaktoren er $100 \% + 5 \% = 105 \% = \frac{105}{100} = 1,05$

Startverdi: 10000

Uttrykk for verdi etter 1 år: $10000 \cdot 1,05$

Verdien etter 2 år: $10000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 10000 \cdot 1,05^2$

Verdien etter 3 år: $10000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 10000 \cdot 1,05^3$

Verdien etter x år: $10000 \cdot \underbrace{1,05 \cdot 1,05 \cdot \dots \cdot 1,05}_{x \text{ antall år}} = 10000 \cdot 1,05^x$

Uttrykk for eksponentiell vekst: **Startverdi** · **Vekstfaktor**^{antall perioder}

Oppgave 14

Skriv opp uttrykket for antallet elever om x år ved skolen i oppgave 8

Oppgave 15

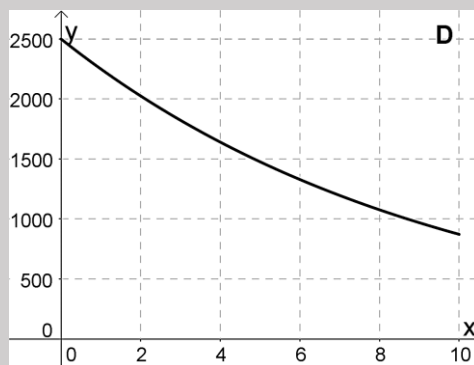
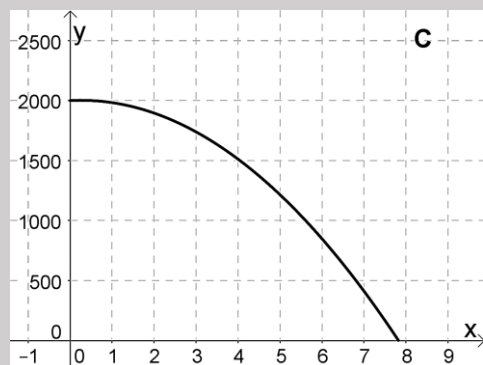
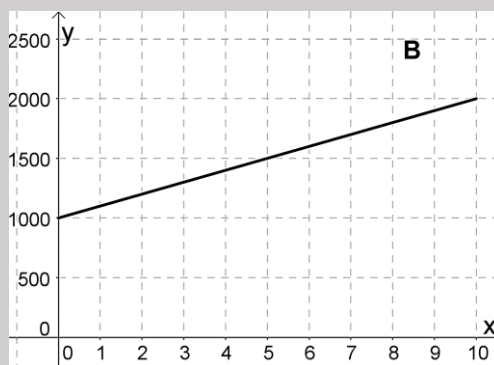
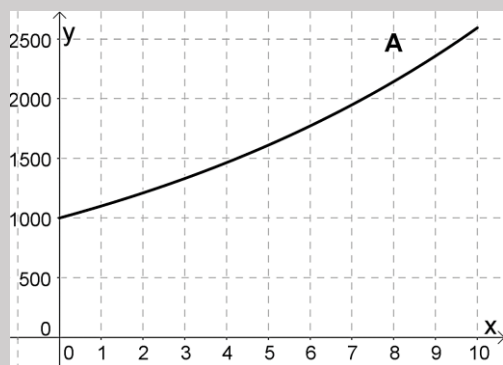
Skriv opp uttrykket for verdien til flatskjermen om x år i oppgave 9

Grafen til eksponentielle funksjoner

Hvordan ser grafen ut til noe som vokser eller avtar med samme prosent?

Oppgave 15

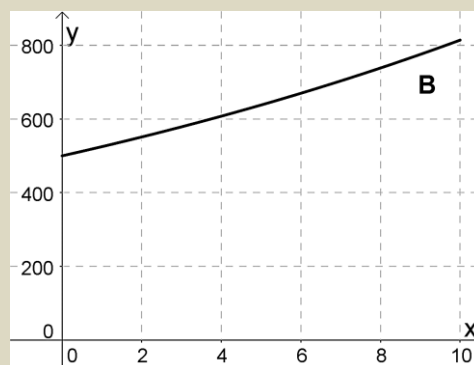
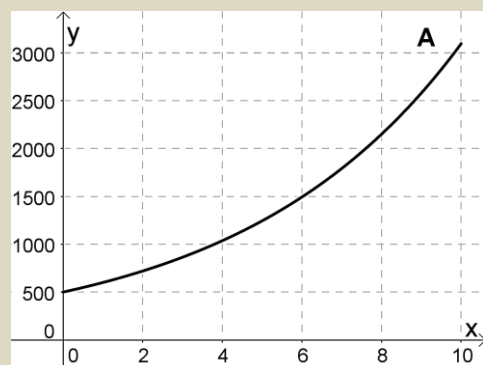
Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser eksponentiell vekst.



Forklar hvorfor grafen(e) viser eksponentiell vekst

Oppgave 16

Hvilken graf nedenfor er grafen til funksjonen $f(x) = 500 \cdot 1,20^x$? Begrunn svaret



Ekspontielle funksjoner i GeoGebra

Vi kan jobbe med eksponentialfunksjoner i GeoGebra på samme måte som med lineære funksjoner.

Oppgave 17

Da Dennis ble født satte foreldrene inn penger i et aksjefond. Uttrykket

$$f(x) = 10000 \cdot 1,05^x$$

viser hvor mye han har i aksjefondet etter x år.

- Tegn grafen til f når x er mellom 0 og 20 år.
- Hvor mye har Dennis i aksjefondet etter 10 år?
- Når har han mer enn 15 500 kr i aksjefondet?
- Hvor mange kroner satte foreldrene til Dennis inn i aksjefondet da han ble født? Forklar.
- Hvor mange prosent rente får han i avkastning per år? Forklar.

Oppgave 18

Funksjonen

$$E(x) = 650 \cdot 0,9^x$$

viser elevtallet ved en skole x år etter 2010.

- Hva forteller tallene i uttrykket?
- Tegn grafen til E for perioden 2010 til 2020.

Funksjonen

$$N(x) = 355 \cdot 1,10^x$$

viser elevtallet ved naboskolen x år etter 2010.

- Hva forteller tallene i uttrykket? Forklar.
- Tegn grafen til N i det samme koordinatsystemet som E .
- Når er det like mange elever på de to skolene.
- I 2016 ble de to skolen slått sammen. Hvor mange elever var det da ved den nye skolen?

5. Polynomfunksjoner

“Polynom” betyr “flere ledd”. En polynomfunksjon består av en sum av potenser av x . Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

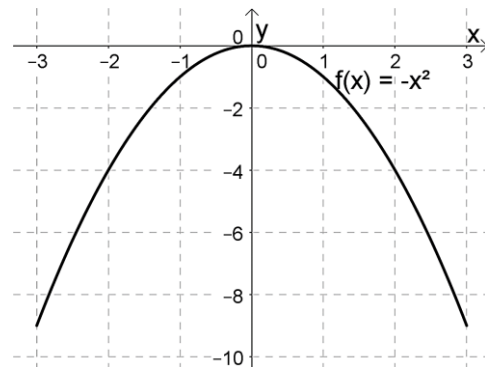
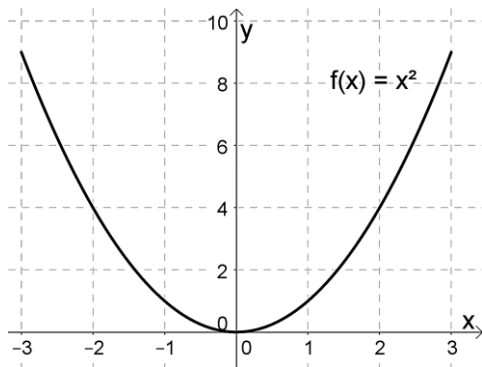
Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon*.

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene f og g ovenfor.

Grafen til en polynomfunksjon

En polynomfunksjon av grad 2 (=andregradsfunksjon) vil alltid ha et toppunkt eller et bunnpunkt, under ser du grafen til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = -x^2$.

Hva er likt og hva er forskjellig med disse grafene? Hvorfor er det slik?



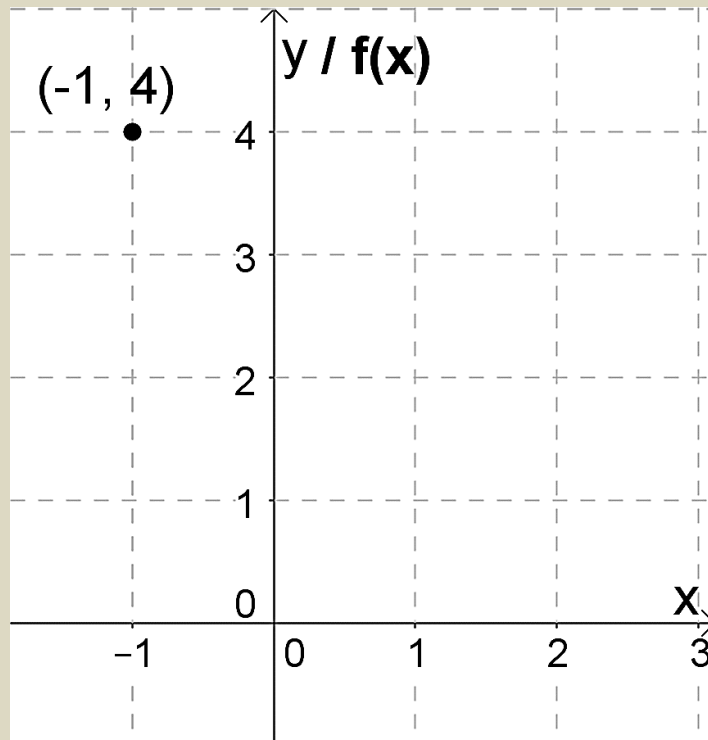
Oppgave 19

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

- a) Hva kan vi si om hvordan grafen vil se ut før vi tegner den?
- b) Gjør utregninger og fyll ut resten av tabellen:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4				

- c) Marker resten tallene fra tabellen som punkter i koordinatsystemet og tegn grafen.



Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

Eksempel 4

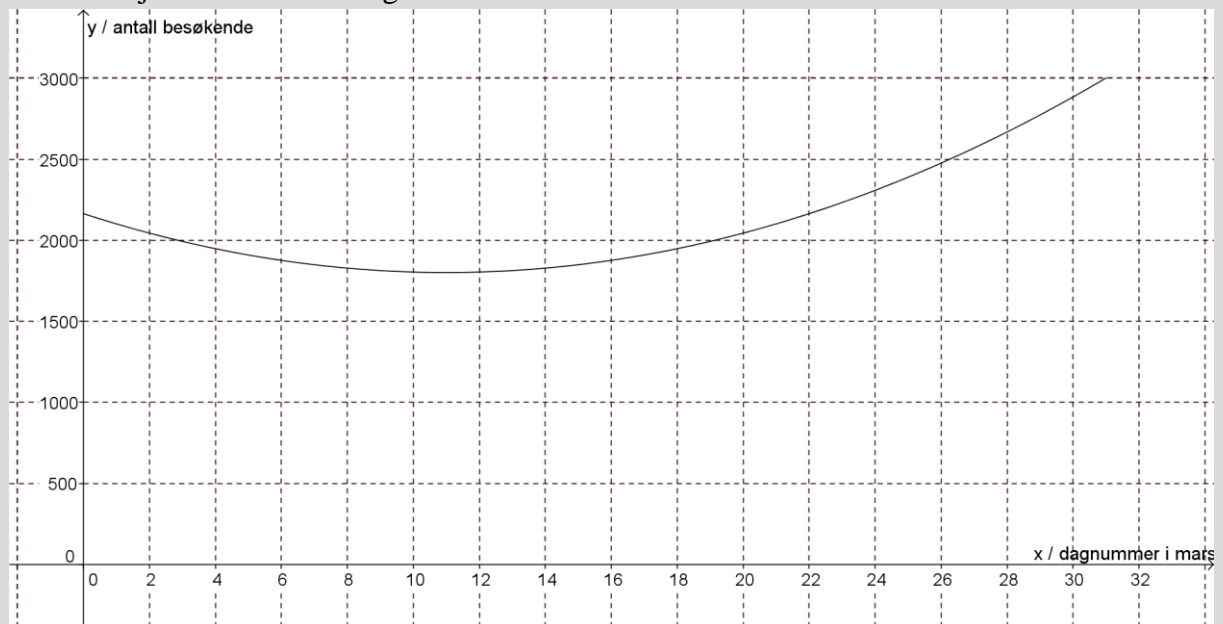
Funksjonen $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$ er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret x i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.

Tegn grafen til funksjonen når x ligger mellom 0 og 31.

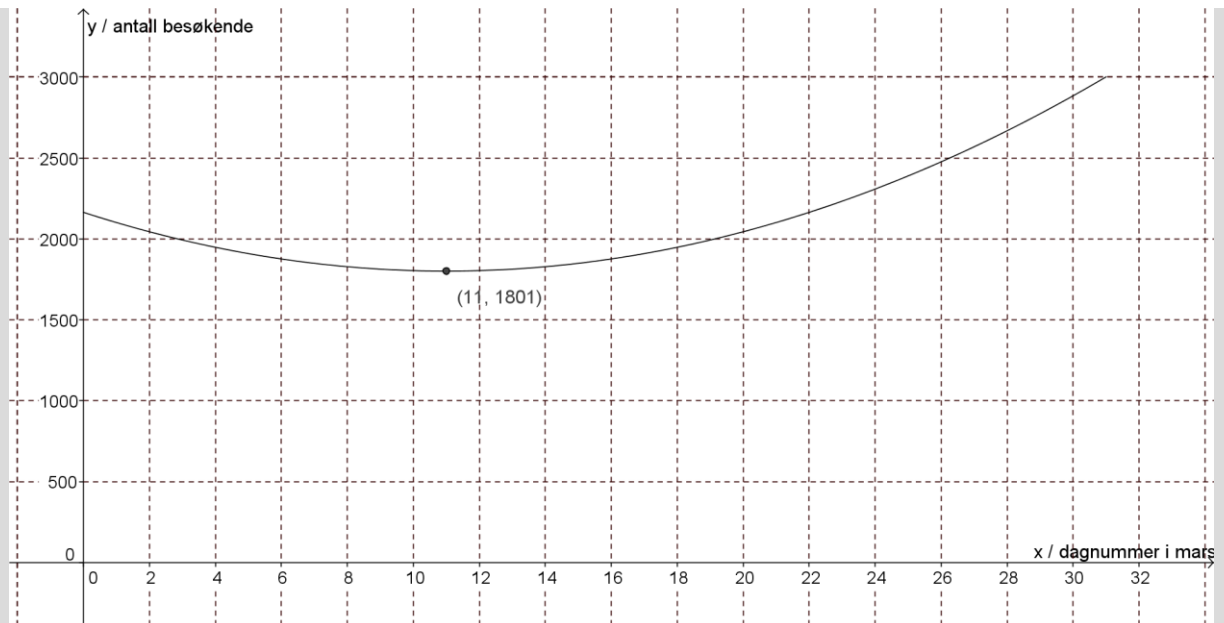
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon(3x² - 66x + 2164,0,31)**. Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra $x = 0$ til $x = 31$. Så skriver vi en passende tekst på aksene.

Etter å ha justert aksene skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet $f(x)$. For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt(f)**.



Vi ser at det var færrest besøkende for $x = 11$, altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

Oppgave 8

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$, der x er prisen på en enhet av varen i kroner.

- Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 100.
- For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

Oppgave 9

Funksjonen $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$ beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune x år etter år 2000. $x = 0$ er altså år 2000, $x = 1$ er år 2001 osv.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.
Her må du altså la x ligge mellom 0 og 13.
- Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

Nullpunkt

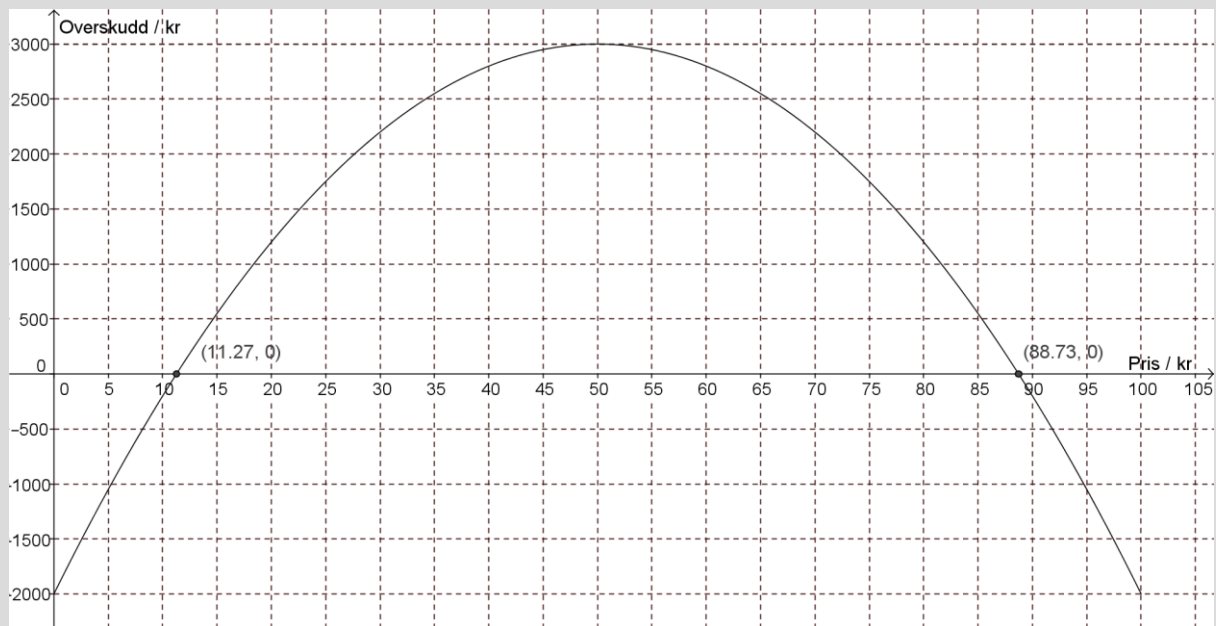
Et punkt der grafen til en funksjon treffer x -aksen kalles et *nullpunkt* til funksjonen. I et slikt punkt er funksjonsverdien lik null.

Vi ser først på hvordan vi finner nullpunkter i GeoGebra.

Eksempel 5

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 16. Først taster vi inn funksjonen:

Funksjon(-2x²+200x-2000,0,100). GeoGebra kaller funksjonen for f . Så skriver vi kommandoen **Nullpunkt(f)**.



Det ene nullpunktet er $x = 11,27$, og har koordinatene $(11,27, 0)$. Alle nullpunkter vil ha y -koordinat 0. Det andre nullpunktet er $x = 88,73$, og har koordinatene $(88,73, 0)$.

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under x -aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer x -aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.

Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.

Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

Oppgave 20

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$, der x er prisen på en enhet av varen.

- Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 300.
- For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
- Når går bedriften med overskudd?

Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.

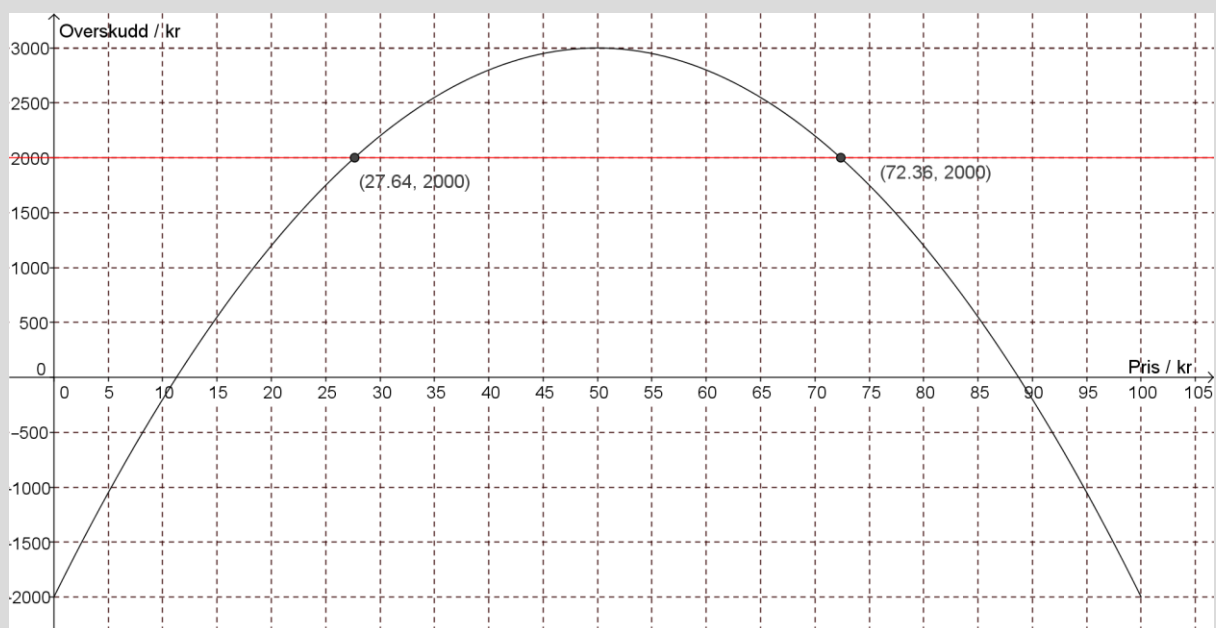
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

Eksempel 6

Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 16.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja $y = 2000$ og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er $(27.64, 2000)$ og $(72.36, 2000)$. Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja $y = 2000$ mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

Oppgave 21

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved $T(x) = -0,24x^2 + 1,2x + 16$, der $T(x)$ står for antall celsiusgrader, og x for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.

Her må du altså la x ligge mellom 0 og 8.

b) Når var temperaturen lik 16 °C?

c) Når var temperaturen høyere enn 16 °C?

Oppgave 22

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter x sekunder er ballen tilnærmet $h(x)$ meter over bakken, der

$$h(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

- Tegn grafen til h når x er mellom 0 og 3 sekunder
- Hvor høyt over bakken er ballen etter 2 sekunder?
- Når er ballen 18 meter over bakken?
- Når er ballen på sitt høyeste over bakken?
- Når treffer ballen bakken?

Oppgave 23

Firmaet FISKEMAT produserer og selger frossenfisk. Kostnaden K ved produksjonen er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 0,012x^2 + 14x + 7000$$

der x er antall produserte enheter per uke.

- Tegn grafen til K for x mellom 0 og 2500.
- Hva er kostnaden når firmaet produserer 750 enheter?
- En uke var kostnaden 40 105 kr. Hvor mange enheter ble produsert denne uka?

FISKEMAT kan selge produktene for 45 kr per enhet.

- Forklar at salgsinntekten er gitt ved $I(x) = 45x$
- Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som K .
- Når er salgsinntekten lik kostnaden?
- Når er salgsinntektene større enn kostnadene? Hva betyr dette?

6. Potensfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er a og b faste tall. Eksempler:

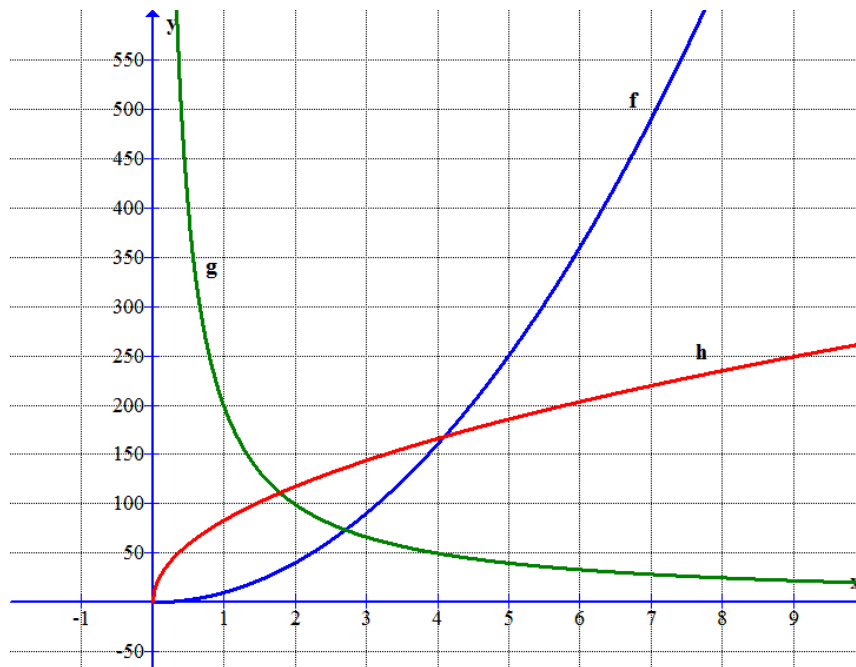
$$f(x) = 10 \cdot x^2$$

$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$

$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

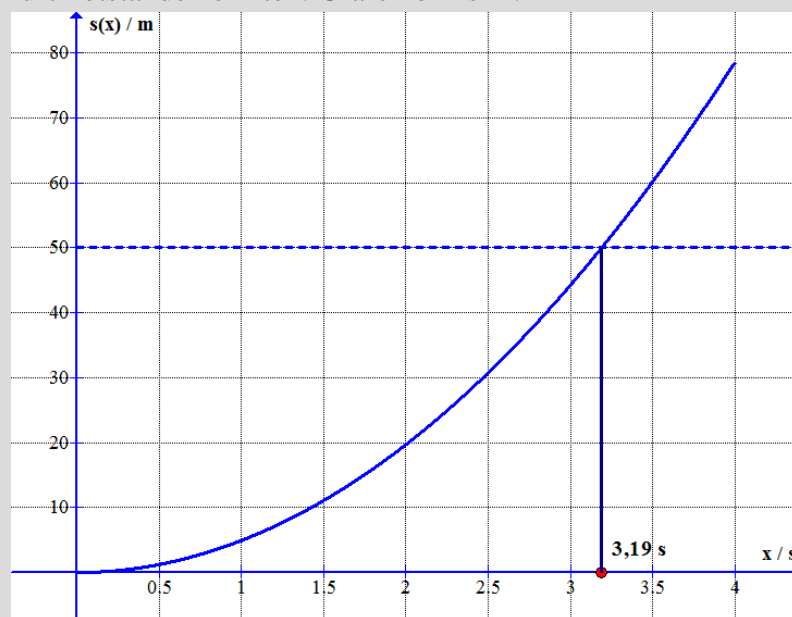
Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som \sqrt{x} , slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 7

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter x sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x) = 4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..

For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja $y = 50$ i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

Oppgave 10

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle x meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x) = 0,45\sqrt{x}$.

- Tegn grafen til t når $0 \leq x \leq 100$. \sqrt{x} skriver du som $\text{sqrt}(x)$ i Geogebra. (sqrt = square root.)
- Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?
- Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

7. Vekstfart

7.1 Konstant vekstfart

Vekstfarten til en størrelse som forandrer seg med tiden viser hvor *raskt* størrelsen forandrer seg. Vi ser først på eksempler hvor en størrelse forandrer seg like mye i like lange tidsrom. Da sier vi at veksten er *jevn*, og vekstfarten er *konstant*. Slik vekst beskrives med en *lineær* funksjon.

Eksempel 8

Et tre vokser jevnt og med 0,6 m hvert år. Da er vekstfarten 0,6 m/år.

Eksempel 9

Det vi i dagligtale kaller fart, er egentlig vekstfarten til en strekning som en bil eller noe annet forflytter seg. Hvis farten til en bil er 80 km/h, betyr det at strekningen som bilen kjører øker 80 km på en time.

Eksempel 10

Et tre vokser jevnt, og høyden øker fra 2,1 til 4,5 m på 3 år. Høyden øker altså med $4,5 \text{ m} - 2,1 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$ på 3 år. Da er vekstfarten $\frac{2,4 \text{ m}}{3 \text{ år}} = 0,8 \text{ m/år}$

Oppgave 24

Vekten av en melon øker jevnt fra 2,6 kg til 5,9 kg på 3 uker. Hva er vekstfarten til vekten av melonen? Husk målenhet på svaret.

Eksempel 11

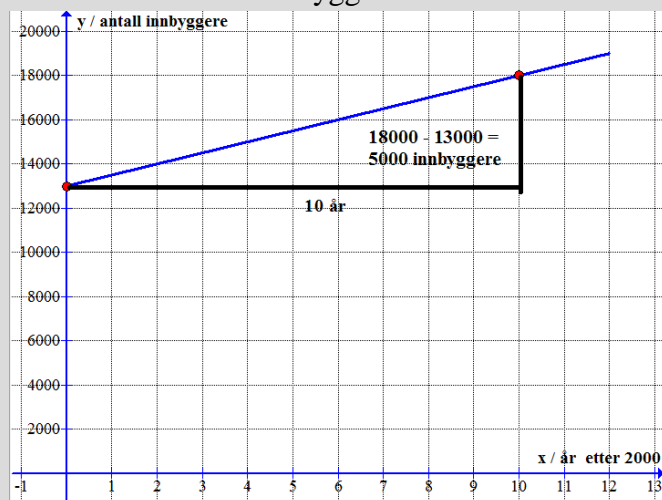
Antall bakterier i ei skål med næring er gitt ved funksjonen $b(x) = 300x + 1000$, hvor x er antall timer som er gått etter at bakteriene ble plassert i skåla. Da er vekstfarten lik stignings-tallet til denne lineære funksjonen. Vekstfarten er konstant og lik 300 bakterier/time.

Oppgave 25

Den 1. juni var 50 m² av en sjø dekket med alger. t uker senere var arealet som var dekket, beskrevet av funksjonen $A(t) = 50 + 20t$. Hva var vekstfarten til arealet av det algedekkede området? Husk målenhet.

Eksempel 12

Grafen viser antall innbyggere i en kommune fra år 2000 og utover. År 2000 svarer til $x = 0$.



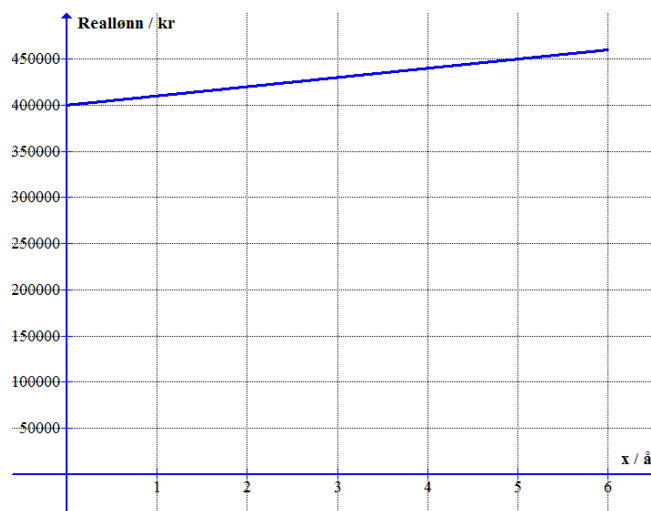
For å beregne vekstfarten finner vi to punkter på grafen som er lette å lese av. Ved å bruke de to punktene som er vist, får vi at vekstfarten er

$$\frac{5000 \text{ innbyggere}}{10 \text{ år}} = 500 \text{ innbyggere/år}$$

Oppgave 11

Grafen viser hvordan reallønna til Asgar har utviklet seg de siste 6 årene.

Finn vekstfarten til reallønna.



Eksempel 13

En sommerdag synker temperaturen jevnt noen timer. På 4 timer har temperaturen minket fra 25 grader til 19 grader, altså med 6 grader.

Hvis noe *minker* etter hvert som tiden går, er vekstfarten *negativ*.

Her blir vekstfarten $\frac{-6 \text{ grader}}{4 \text{ timer}} = -1,5 \text{ grader/time}$.

Funksjonen som beskriver temperaturutviklingen blir da $T(x) = -1,5x + 25$ når x er tiden som har gått siden temperaturen var 25 grader.

Oppgave 26

Temperaturen i en kopp med varmt vann synker jevnt noen minutter. Temperaturen minker fra 100 grader til 90 grader på 4 minutter.

- Finn vekstfarten til temperaturen.
- Lag en funksjon som viser temperaturen i vannet som funksjon av tiden x .

Oppgave 27

I en kommune sank innbyggertallet jevnt gjennom flere år. I 2008 var det 20 000 innbyggere i kommunen og i 2012 var det 18 000 innbyggere.

- Finn vekstfarten til innbyggertallet.
- Lag en funksjon som viser innbyggertallet $I(x)$, hvor x er antall år som har gått siden 2008 (slik at $x = 0$ tilsvarer år 2008, $x = 1$ tilsvarer 2009 osv.)
- Hva vil innbyggertallet være i 2015 hvis utviklingen fortsetter på samme måten?
- Når vil innbyggertallet være lik 15 000?

7.2 Gjennomsnittlig vekstfart

Hvis veksten *ikke* er jevn, vil heller ikke vekstfarten være den samme hele tiden. Da bruker vi ofte *gjennomsnittlig* vekstfart.

Eksempel 14

Grafen til høyre viser høyden til en plante de første 15 dagene etter at den ble plantet. Av grafen kan vi lese at høyden er 50 mm ved $x = 0$, 90 mm ved $x = 5$ og 160 mm ved $x = 10$.

Fordi grafen ikke er en rett linje, er vekstfarten ikke konstant. Vi kan imidlertid regne ut gjennomsnittlige vekstfarter.

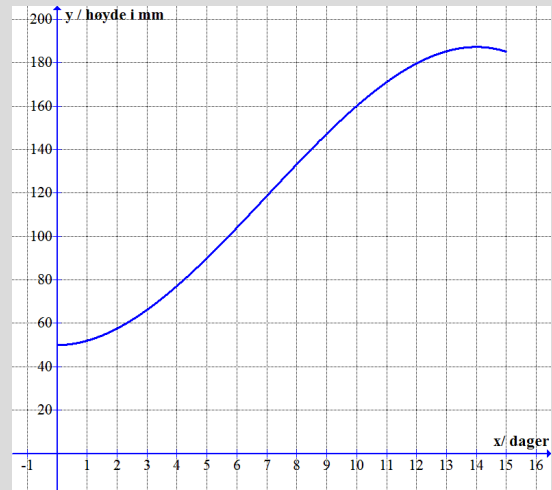
To eksempler:

Gjennomsnittlig vekstfart de fem første dagene:

$$\frac{90 \text{ mm} - 50 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{40 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 8 \text{ mm/dag}$$

Gjennomsnittlig vekstfart fra dag 5 til dag 10:

$$\frac{160 \text{ mm} - 90 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{70 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 14 \text{ mm/dag}$$



Oppgave 128

Finn gjennomsnittlig vekstfart de ti første dagene for planten i eksemplet foran.

Eksempel 15

Vi kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av GeoGebra.

Funksjonen som beskriver høyden av planten i forrige eksempel er

$$h(x) = -0,1x^3 + 2,1x^2 + 50$$

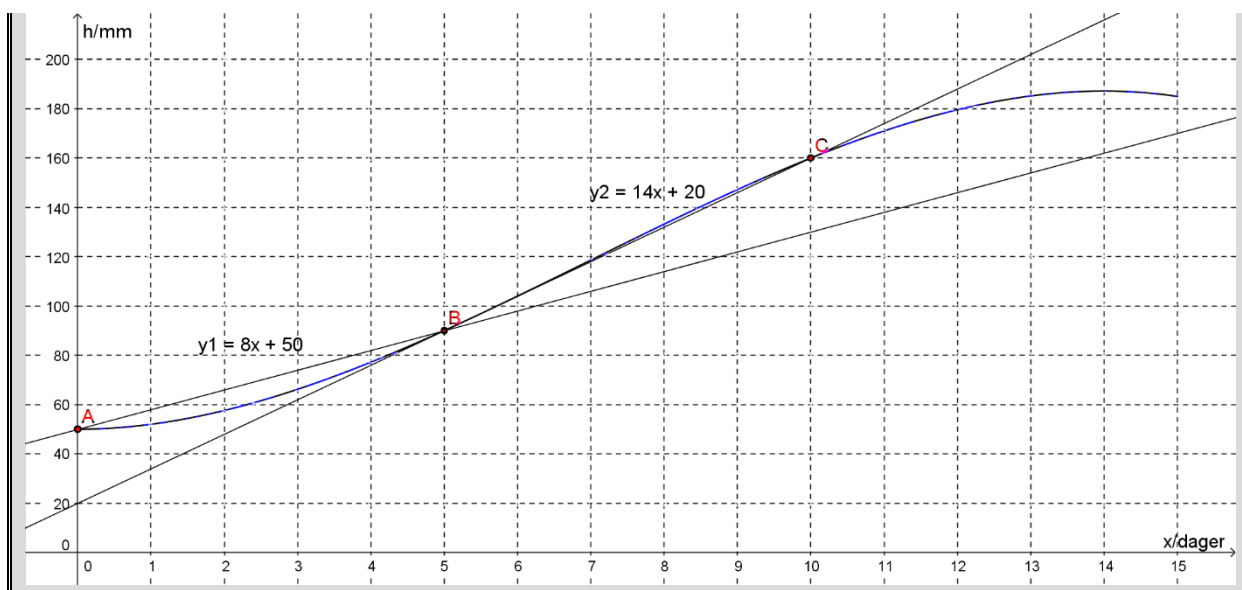
Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon(-0.1x^3+2.1x^2+50,0,15)**.

Vi setter inn punktene **A** = (0, 50), **B** = (5, 90) og **C** = (10, 140) på grafen.

Vi velger verktøyikonet linje mellom to punkter.

Høyreklikk på linjen og endre funksjonsuttrykket til $y = ax + b$. Stigningstallet **a** er lik gjennomsnittlige vekstfart.

Svaret blir **a = 8 mellom punkt A og B**, og **a = 14 mellom punkt B og C** som stemmer med utregningene i eksempel 12, 8 mm/dag og 14 mm/dag.



7.3 Momentan vekstfart

Momentan vekstfart er vekstfarten på et bestemt tidspunkt, altså i et bestemt øyeblikk (sammenlign “moment” = øyeblikk på engelsk).

Den momentane vekstfarten er størst der grafen er brattest. Hvis vi igjen ser på grafen i forrige eksempel som viser høyden til planten, kan det se ut som grafen er brattest omtrent når $x = 7$ dager.

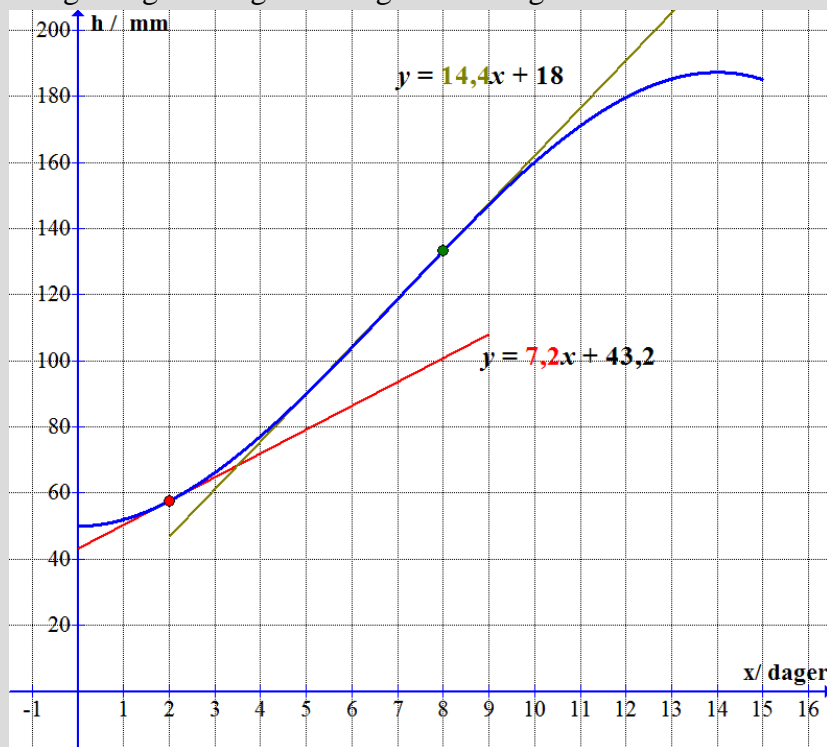
For å finne verdien til den momentane vekstfarten i et bestemt øyeblikk x , må vi tegne *tangenten* til grafen for denne verdien av x . *Da er den momentane vekstfarten stigningstallet til tangenten.* Dette kan vi gjøre i Geogebra.

Eksempel 16

Vi fortsetter å undersøke veksten til planten i eksemplene foran.

Under har vi tegnet grafen, og tangenter for $x = 2$ og $x = 8$. Vi tegner en tangent til funksjonen f i $x = 2$ i Geogebra med kommandoen **Tangent(2,f)**.

Geogebra gir oss også likningene for tangentene. De er skrevet inn på figuren under.



Fra likningene til tangentene på figuren ser vi at den momentane vekstfarten er 7,2 mm/dag etter 2 dager og 14,4 mm/dag etter 8 dager.

Oppgave 29

Vekten i kg av en voksende melon er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$V(x) = -0,0024x^3 + 0,02x^2 + 0,21x + 1,0$$

der x er antall uker etter at vekten var 1,0 kg. Uttrykket gjelder bra de åtte første ukene.

- Tegn grafen til V når x ligger mellom 0 og 8 uker.
- Finn momentan vekstfart når $x = 2$ og når $x = 6$. Husk å skrive målenhet på svaret.
- Hva er vekten av melonen etter 2 uker?
- Regn ut gjennomsnittlig vekstfart mellom uke 2 og uke 8

Viktige begreper

Konstantledd	
Stigningstall	
Variabel	
Funksjonsuttrykk	
Punkt	
Graf	
Tallintervall	
Tallområde	
Toppunkt	
Bunnpunkt	
Nullpunkt	

GeoGebra – fremgangsmåte

Lage graf for et bestemt tallområde	
Lage graf utfra punkter	
Skrive inn aksetitler	
Tilpasse x- og y-aksen	
Svare på oppgaver	
Finne en x- eller y-verdi når den andre er oppgitt	
Finne topp- og bunnpunkt	
Finne nullpunkt	
Finne gjennomsnittlig endring mellom to x-verdier	
Finne momentan endring/vekstfart	

Oppsummerende oppgave

Funksjonen T gitt ved

$$T(x) = -0,08x^3 + 1,29x^2 - 3,9x + 1,2, \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser temperaturen i grader Celsius $T(x)$ på Hellerud 1. april et år x timer etter midnatt

- a) Bruk graftegner til å tegne grafen til T .

Fremgangsmåte:

- b) Når var temperaturen over $10\text{ }^\circ\text{C}$?

Svar tekst:

Fremgangsmåte:

- c) Hva var temperaturen kl 01:00?

Svar tekst:

Fremgangsmåte:

- d) Når var temperaturen $0\text{ }^\circ\text{C}$?

Svar tekst:

Fremgangsmåte:

e) Hva var den laveste og den høyeste temperaturen disse timene?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

f) Hvor mange grader økte temperaturen med i gjennomsnitt per time fra den var på det laveste til den var på det høyeste?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

g) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen T når $x=11$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret

Svartekst:
Fremgangsmåte:

Lim inn bildet fra GeoGebra her:

Eksamensoppgaver funksjoner

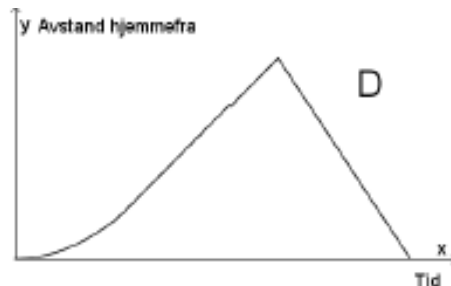
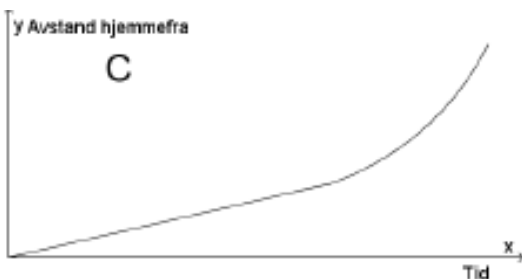
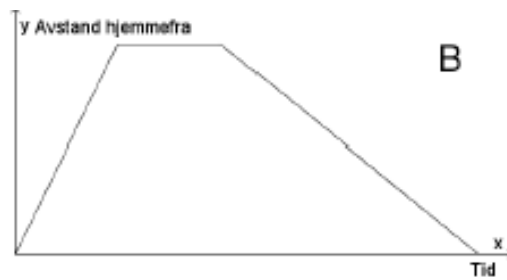
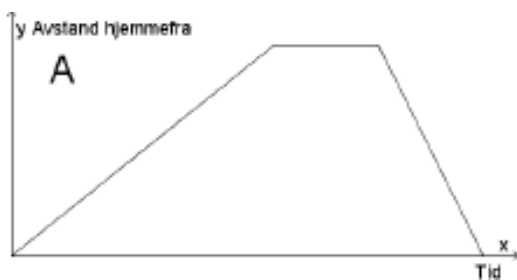
E1

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 4p)

Nedenfor har vi beskrevet fire ulike situasjoner.

Situasjon	Beskrivelse
1	Eline tar en løpetur. Hun starter hjemmefra i rolig tempo og øker så tempoet etter hvert. Etter en stund snur hun og løper raskt tilbake samme vei.
2	Eline løper hjemmefra for å rekke bussen. Etter å ha ventet noen minutter skjønner hun at hun ikke rakk bussen, og går tilbake samme vei.
3	Eline starter hjemmefra og går opp en bratt bakke. Hun tar en liten pause på toppen av bakken før hun løper tilbake samme vei.
4	Eline starter hjemmefra og padler over fjorden. I starten har hun motvind, men etter hvert avtar vinden, og farten øker.

Nedenfor ser du grafiske framstillinger som beskriver sammenhengen mellom tid og Elines avstand hjemmefra for hver av de fire situasjonene.



Hvilken graf passer til situasjon 1?

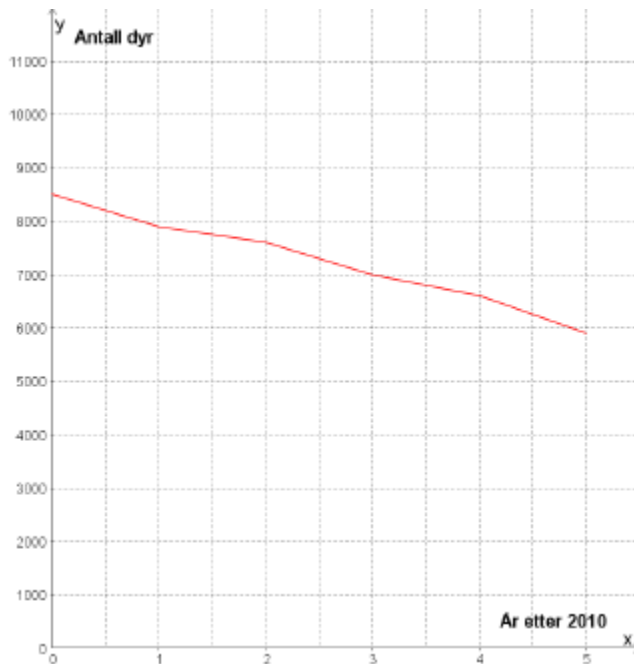
Hvilken graf passer til situasjon 2?

Hvilken graf passer til situasjon 3?

Hvilken graf passer til situasjon 4?

E2

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 4p)



Linjediagrammet ovenfor viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

- Bestem en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.
- Hvor mange dyr av arten vil det være i området i 2018 ifølge funksjonen fra oppgave a) ?
- Hvor mange år vil det gå før det ikke er flere dyr av arten igjen i området ifølge funksjonen fra oppgave a) ?

E3

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 2p)

Siri har kjøpt bil. Hun antar at verdien av bilen x år etter at hun kjøpte den, vil være gitt ved

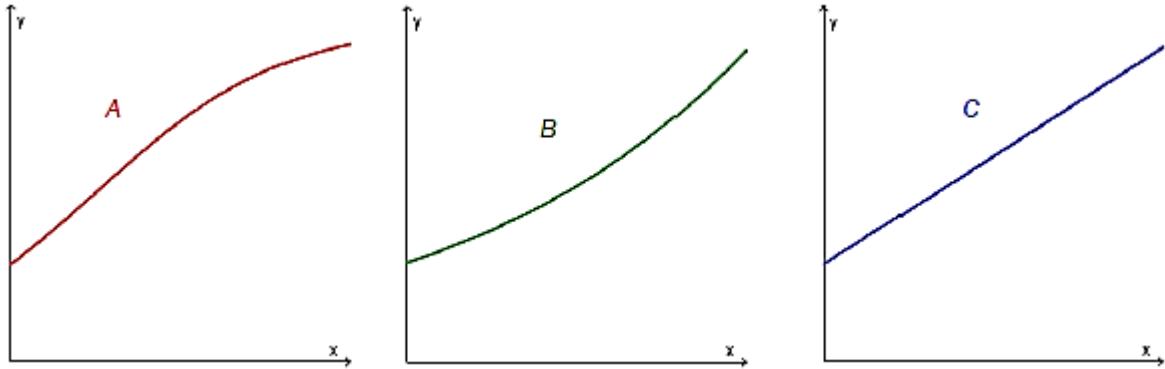
$$V(x) = 250\,000 \cdot 0,9^x$$

- Hva forteller tallene 250 000 og 0,9 i dette funksjonsuttrykket om verdien av Siris bil?
- Hva vil bilens verdi være ett år etter at Siri kjøpte den?

E4

(2P vår 2016, Del 1)

- Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt
- Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse viser eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt

**E5**

(2P vår 2016, Del 1)

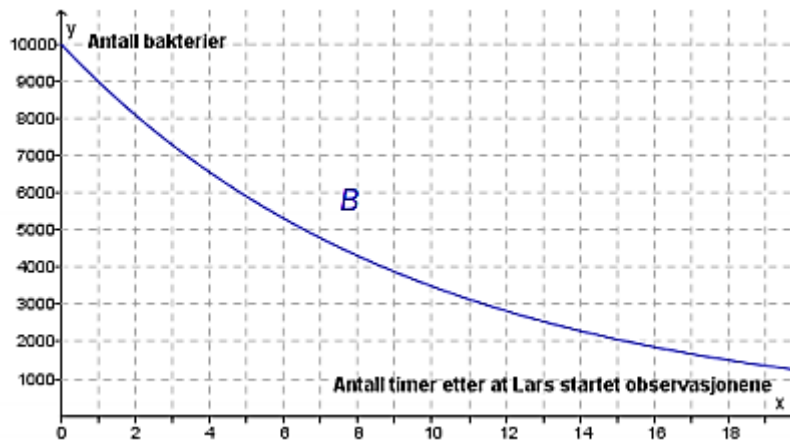
Marte er telefonselger. Hun har en fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner. Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

- Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.
- Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.
- Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

E6

(2P, høst 2015, del 1)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen B ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp uttrykket for $B(x)$

E7

(2P, vår 2015, del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

E8

(2P, vår 2015, del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet $h(t)$ meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$		18,75		18,75		8,75	

b) Tegn grafen til h

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h(0)$ og $h(3)$

E9

(2P vår 2015, Del 2)

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \quad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f
- Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur
- Bestem $f(100)$ og den momentane vekstfarten til f når $x = 100$.
Hva forteller disse svarene?

E10

(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen f gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside x timer etter midnatt et gitt døgn.

- Tegn grafen til f for $0 \leq x \leq 24$.
- Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
- Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?
- Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f for $6 \leq x \leq 16$.
Hva forteller dette svaret?

E11

(Eksamen 2P(-Y), vår 2016, del 2)

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0,006x^4 - 0,33x^3 + 5,7x^2 - 32,1x + 59,3 \quad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til B .
- Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?
- Når stod sola 20 grader over horisonten?
- Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 12.00?

Mål for kapittel 4. Matematiske modeller



Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre målinger i praktiske forsøk og formulere matematiske modeller på grunnlag av observerte data
- analysere praktiske problemstillinger knytte til dagligliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller
- utforske matematiske modeller, sammenligne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon, og vurdere hvilken informasjon modellene kan gi, og hvilket gyldighetsområde og begrensninger de har
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva vi mener med en matematisk modell
- hvordan jeg legger inn data fra en tabell i et regneark i GeoGebra
- hvordan jeg utfører regresjonsanalyse i GeoGebra for å finne en matematisk modell

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en matematisk modell
- hvordan jeg finner mønster i tall og figurer

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- velge hvilken modell som passer best til en praktisk situasjon
- forklare hvilken informasjon en matematisk modell kan gi
- argumentere for en modell sitt gyldighetsområde og hvilke begrensninger den har

Utforskende oppgave – Strikkhopp med Barbie og Ken

Kilder (hentet 07.06.2017):

<http://www.caspar.no/tangenten/2005/inspirasjonshefte2005.pdf> s. 122-128 og

<http://www.ntnu.no/documents/2004699/2c5c784d-cbe2-452d-8d37-5934c34bbb40>

I denne oppgaven skal du la Barbie eller Ken hoppe i strikk og bestemme en sammenheng mellom antall strikk og fallhøyden. Sammenhengen skal du bruke til å gjøre en praktisk beregning.

Problemstilling 1: Bestem sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Utstyr:

- En Barbie- eller Ken dukke
- Strikk
- Målebånd
- Papir og blyant
- GeoGebra

Oppgave:

1. Bind strikk rundt bena på Barbie
2. Slipp dukka fra en gitt høyde og mål fallhøyden (la Barbie falle med hodet først)
3. Lag en tabell som viser sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Antall strikk												
Fallhøyde (cm)												

4. Finn et uttrykk for sammenhengen mellom fallhøyde og antall strikk ved hjelp av regresjon i GeoGebra

(Lim inn GeoGebra bildet her)

$$f(x) =$$

5. Forklar hva de ulike konstantene i funksjonen uttrykker:

Problemstilling 2: Bruk modellen du kom frem til og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke i strikkhoppet for akkurat å bare bli våt i håret

Utstyr:

Et kar med vann hvor vannflaten står _____ cm under Barbies hoppunkt.

Oppgave:

1. Bruk modellen og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke

(Lim inn GeoGebra bildet her)

Antall strikk:

2. La Barbie hoppe med dette antallet strikk og undersøk om din beregning stemmer.
Resultat:

Feilkilder:

1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra “virkeligheten”. Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

Eksempel 1

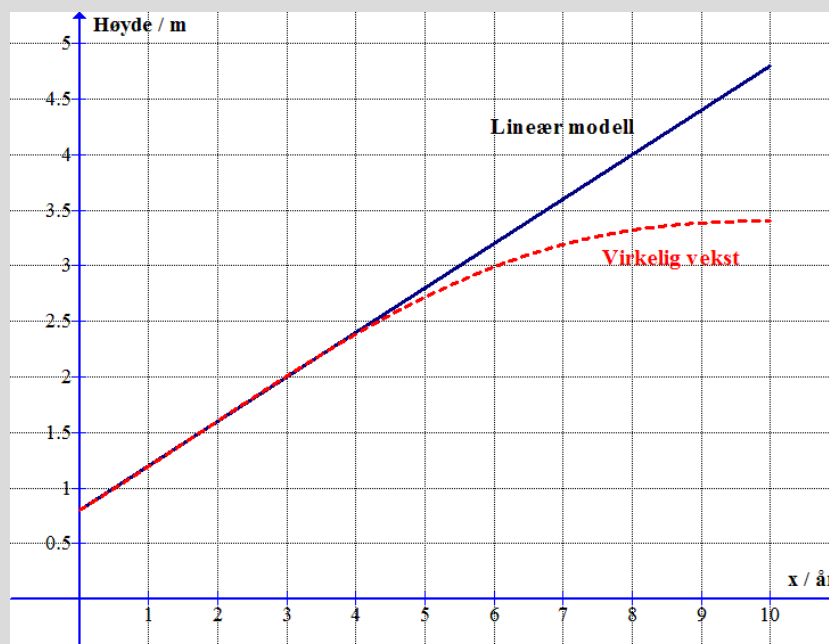
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for x , kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$ m.

Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er x mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik: $x \in [0, 5]$.

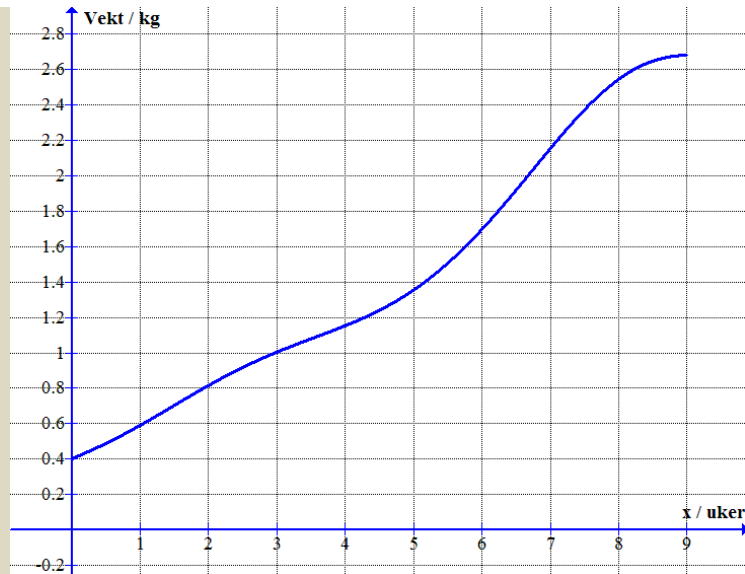


Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.


a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten $v(x)$ som passer bra for de fem første ukene.



Oppgave 2

Temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

- Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?
- Lag en lineær modell som beskriver temperaturen T i koppen etter x minutter.
- Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?
- Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?
- Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når x øker.
- Tegn grafen til modellen.
-  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.

Eksempel 2

I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.

Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.

Temperaturforskjellen er $22 - (-8) = 30$ grader i starten.

Vekstfaktoren er $100 \% - 12 \% = 88 \% = 0,88$.

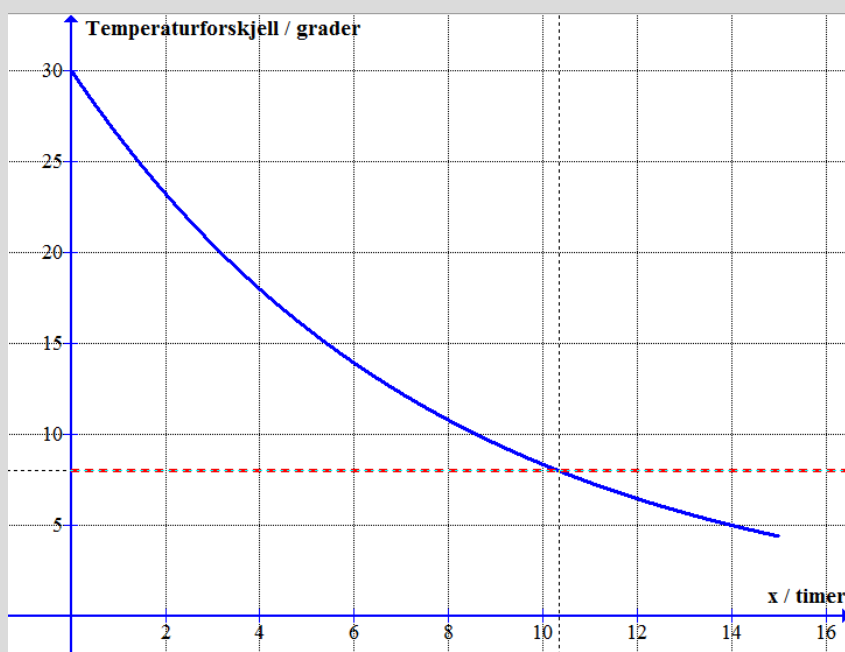
Vi kaller antall timer som har gått for x . Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0,88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.

Når er innetemperaturen null?

Vi tegner grafen til f med **Funksjon(30*0.88^x,0,15)**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen $y = 8$, viser at dette skjer etter 10,4 timer.

Oppgave 3

I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

- Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
- Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

Eksempel 3

En fabrikk lager hermetikkbokser. Hver uke har fabrikken 100 000 kr i *faste kostnader* (lønn, verditap på maskiner og annet). I tillegg koster det 0,60 kr per boks (metall, elektrisk energi og annet). Vi skal lage en modell for utgiftene per boks.

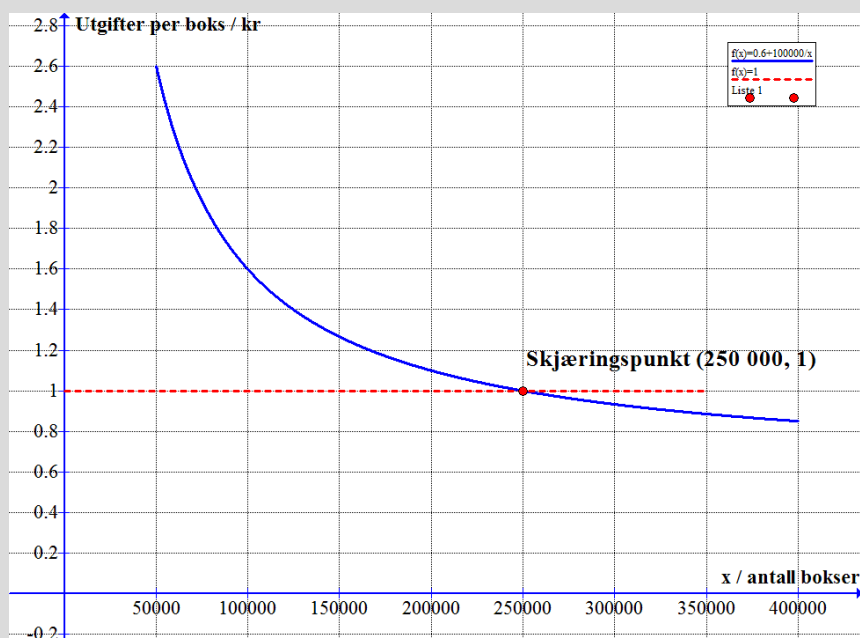
Vi kaller antall bokser som blir laget per uke for x og utgiftene per boks for U .

Utgiftene for x bokser blir $0,60x + 100000$.

Utgiftene per boks: $U = \frac{0,60x + 100000}{x}$.

Denne funksjonen må vi skrive slik i Geogebra: $(0.60x + 100000)/x$.

Hvor mange bokser må fabrikken minst lage for at utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr? Dette kan vi finne grafisk:



Vi ser at fabrikken må lage minst 250 000 bokser i uka hvis utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr.

Vi kan også løse en likning:

$$\frac{0,60x + 100000}{x} = 1$$

$$\frac{(0,60x + 100000)x}{x} = 1 \cdot x$$

$$0,60x + 100000 = x$$

$$100000 = x - 0,60x$$

$$100000 = 0,40x$$

$$x = \frac{100000}{0,40} = 250000$$

Oppgave 4

Ola er medlem av en klubb hvor han må betale 200 kr i året for å være medlem. Da kan han få kjøpe sokker til 30 kr per par. Vanlig pris på sokkene er 50 kr.

a) Lag en modell som viser hva han må betale per par når han tar med kontingenten i utgiftene.

b) Hvor mange par sokker må han minst kjøpe per år for at det skal lønne seg å være medlem?



Eksempel 4

En bonde har 200 m gjerde som han skal bruke til å sperre av et rektangulært beiteområde for noen kuer. Vi skal lage en matematisk modell for arealet $A(x)$ av beiteområdet hvis den ene siden i rektangelet er x meter.

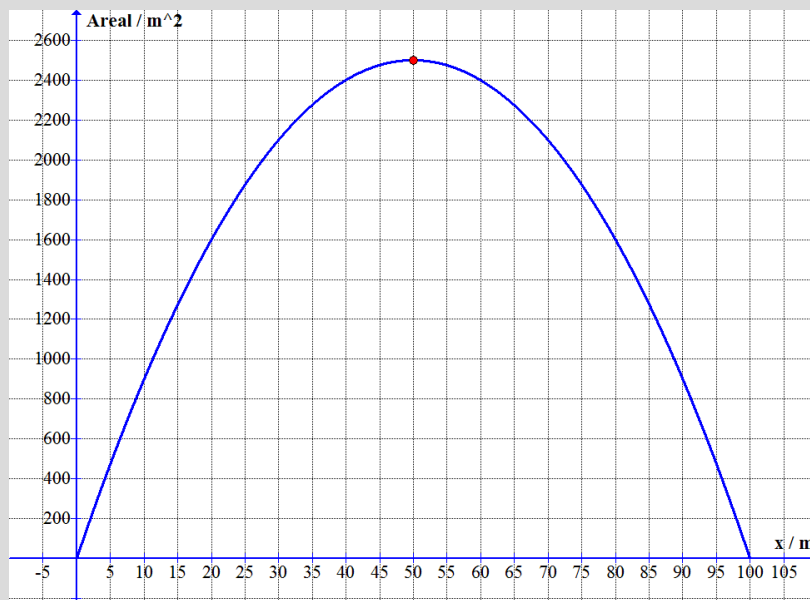
Hvis vi kaller den andre siden i rektangelet for y , må $x + y$ være lik halve omkretsen av rektangelet, nemlig 100 m. Da må vi ha at $y = 100 - x$. Arealet blir

$$A(x) = x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Modellen er altså et andregradspolynom.

Hvis bonden velger $x = 60$ m, blir arealet $100 \cdot 60 - 60^2 = 2400 \text{ m}^2$.

For å finne hvilken verdi av x som gir *størst areal*, tegner vi grafen til andregradsfunksjonen ovenfor:



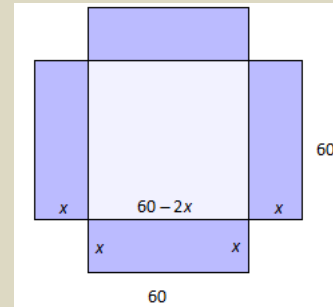
Vi ser at arealet blir størst når $x = 50$ m. Da er området et kvadrat.

Oppgave 5



Du skal lage en eske av en papp-plate med sidekant 60 cm ved å skjære bort et kvadrat i hvert hjørne og deretter brette opp de fargede sideflatene i figuren.

- Forklar at sidene i bunnen av esken blir $60 - 2x$.
- Lag en modell $V(x)$ for volumet av esken. Som du kanskje husker fra 1P er volumet lik arealet av grunnflaten multiplisert med høyden av esken.
- Hva er den største verdien x kan ha? Tegn grafen til $V(x)$. Hvilken verdi av x gir størst volum? Hvor stort er dette volumet?



3. Regresjon (kurvetilpasning)

3.1 Lineær regresjon

Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under **Innstillinger, Avrunding**. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

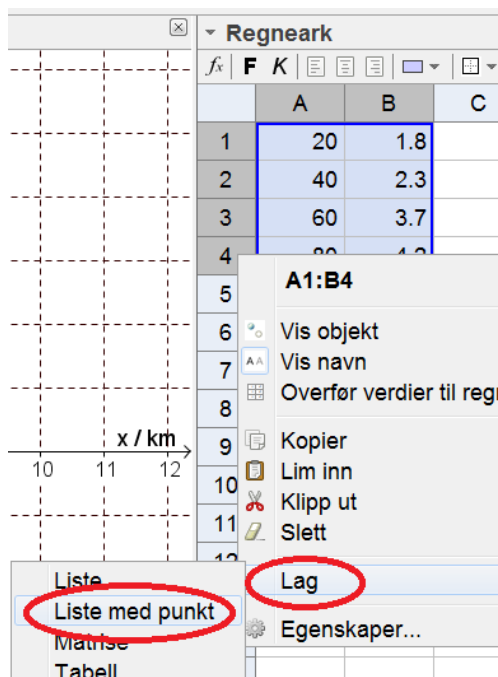
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder x / år	20	40	60	80
TV-tid y / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

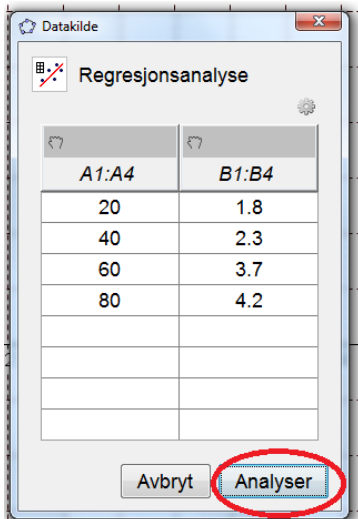
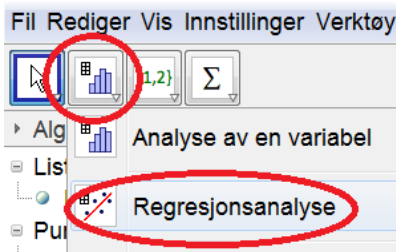
Vi åpner regnearket i Geogebra:



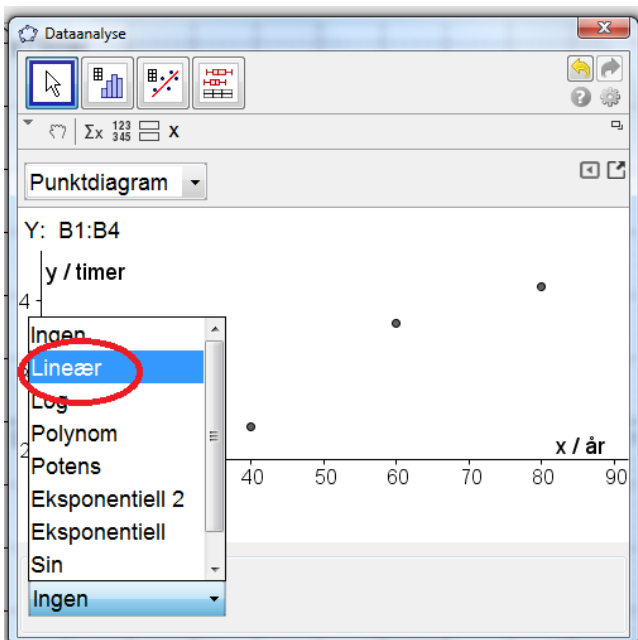
Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

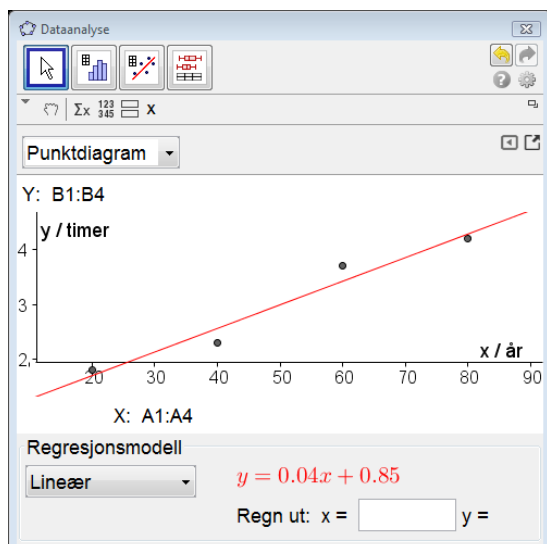


Så velger vi regresjonsanalyse:



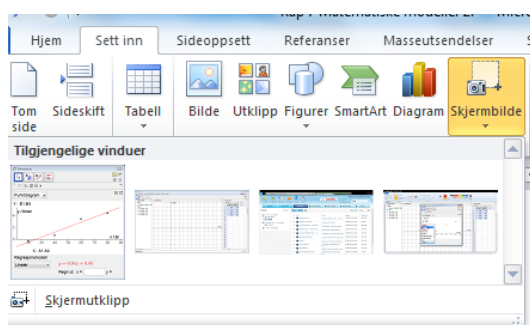
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er $y = 0,04x + 0,85$.

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.

Ut fra dette kan vi si at $f(x) = 0,04x + 0,85$ er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$ timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for x hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ($x = 0$) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

Oppgave 6

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 ($x = 0$) til 2000 ($x = 50$).

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

- Finne ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
- Hva var folketallet i 2010 ($x = 60$) i følge denne modellen?
- Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
- Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

3.2 Polynomregresjon

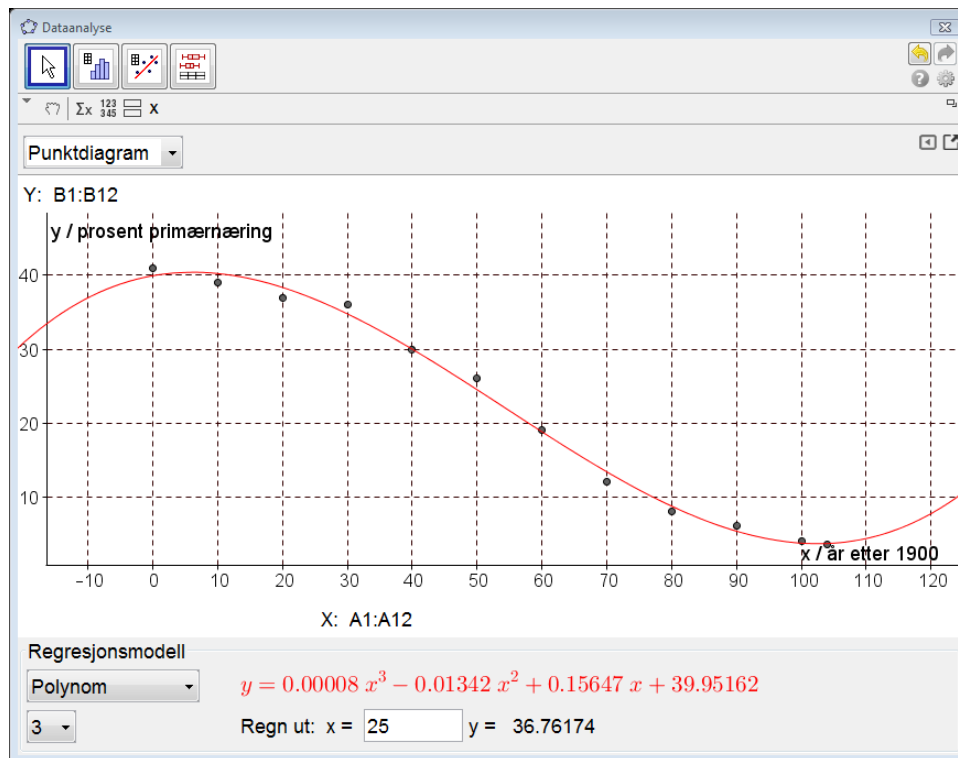
År	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2004
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
$y/\%$	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la x være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3,5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$. (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor x ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut $f(25)$ ved å skrive $x = 25$ inn i Geogebra vinduet (se ovenfor). Da finner vi $f(25) = 37\%$.

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av x i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut $f(120)$. Geogebra gir da ca. 8 %.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8 % i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

Oppgave 7

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen $O(x)$ er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
O	0	20	35	50	100	150	175	160

- La x være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.
- Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?
- I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?
- Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet (time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene..

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

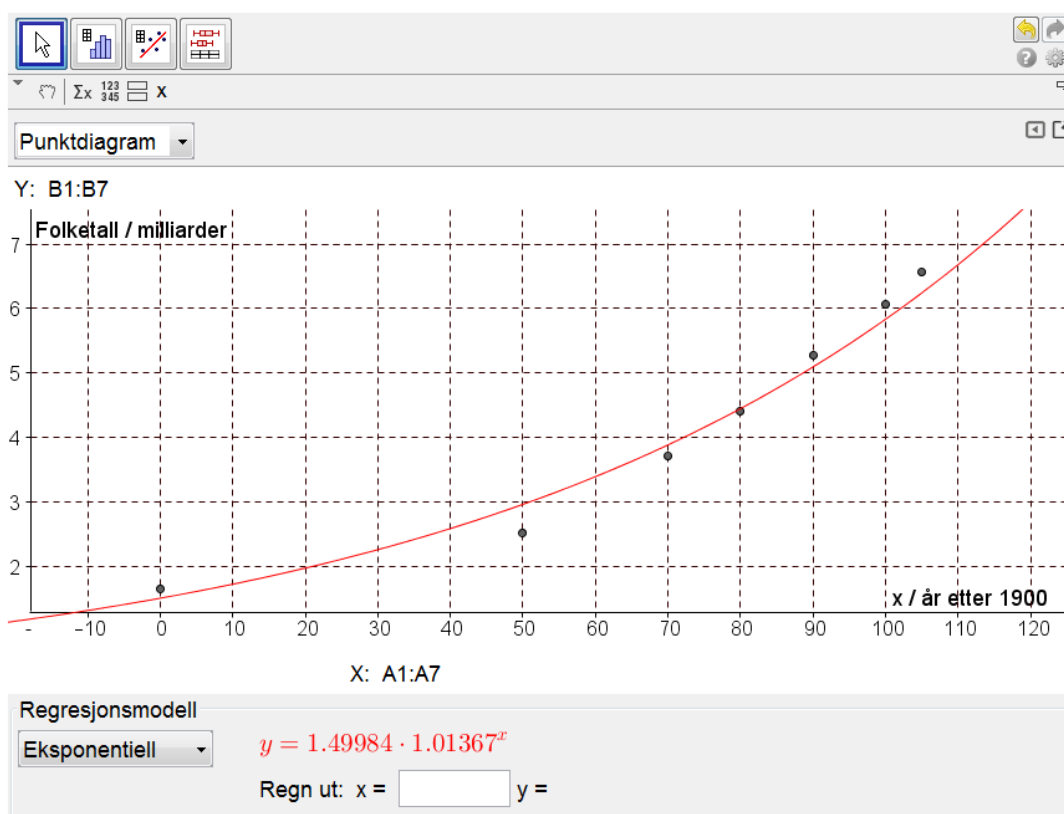
År	Folketall (milliarder)
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar x være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til $x = 0$, 1950 svarer til $x = 50$ osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

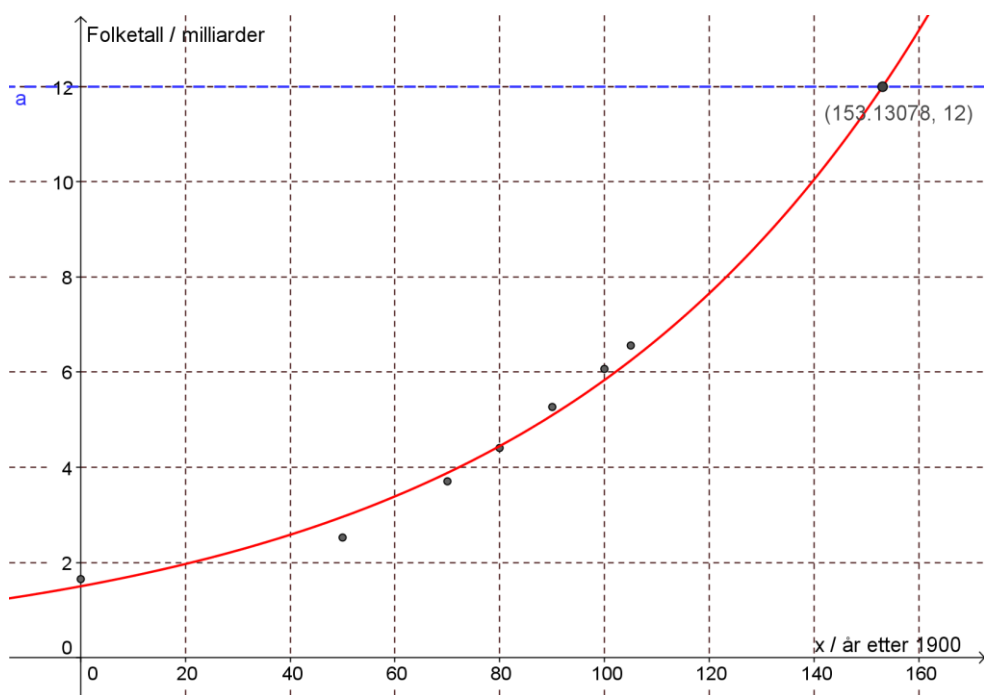
Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:



Funksjonen som passer best (passe avrundet) er $f(x) = 1,5 \cdot 1,014^x$.

Fra vekstfaktoren $1,014 = 101,4\%$ ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte $101,4\% - 100\% = 1,4\%$ i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja $y = 12$ og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:



Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

Oppgave 8

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

- Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der $x = 0$ svarer til 1975.
- Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 ifølge denne modellen?

- c) Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
- d) En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

Lim inn skjermbildet fra GeoGebra her:

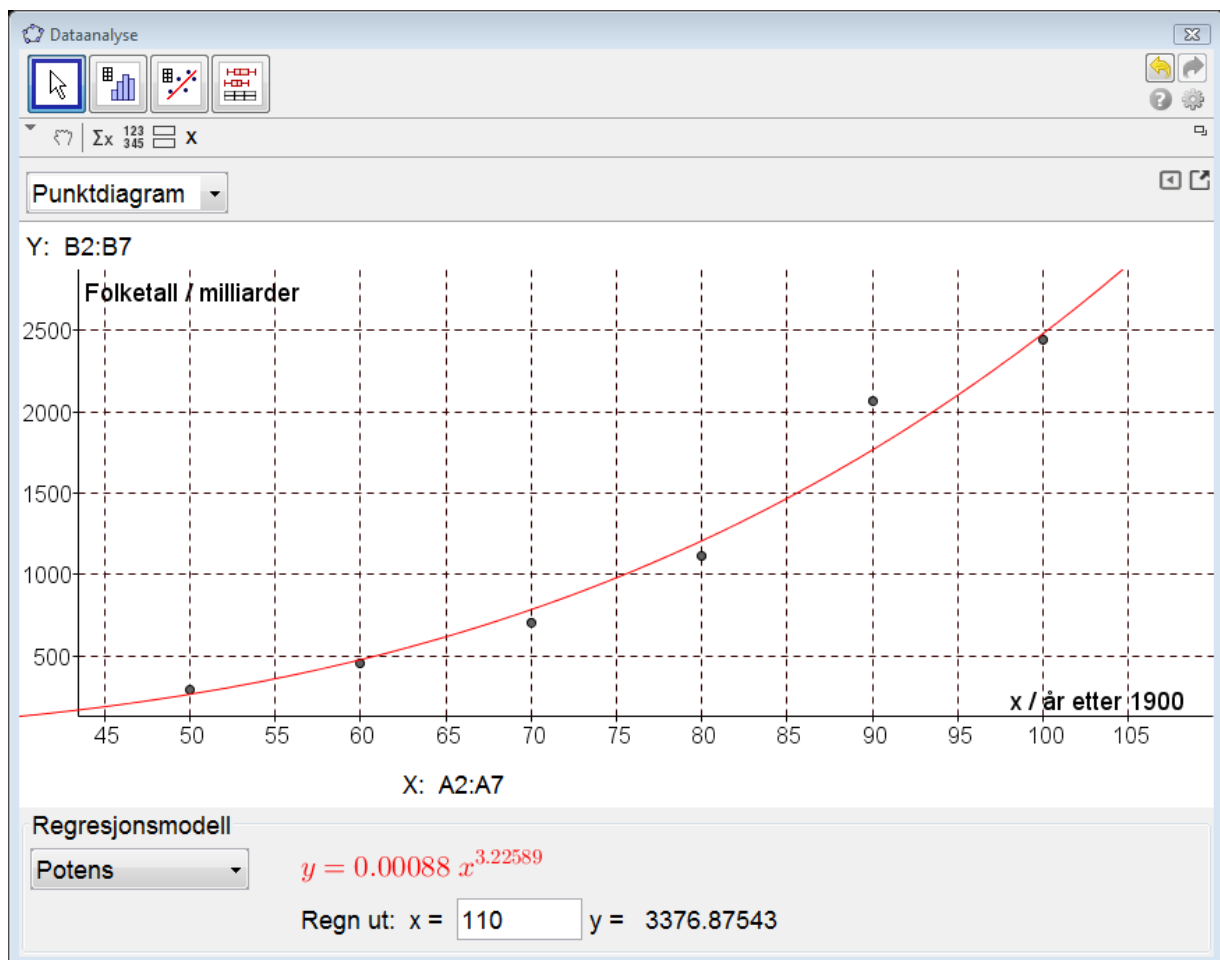
3.4. Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^b$. Eksponenten b kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
t / tusen	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar x bety antall år etter 1900 ($x = 50$ tilsvarer da 1950, $x = 60$ tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon*. Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er $t(x) = 0,00088x^{3,226}$ (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

Oppgave 9

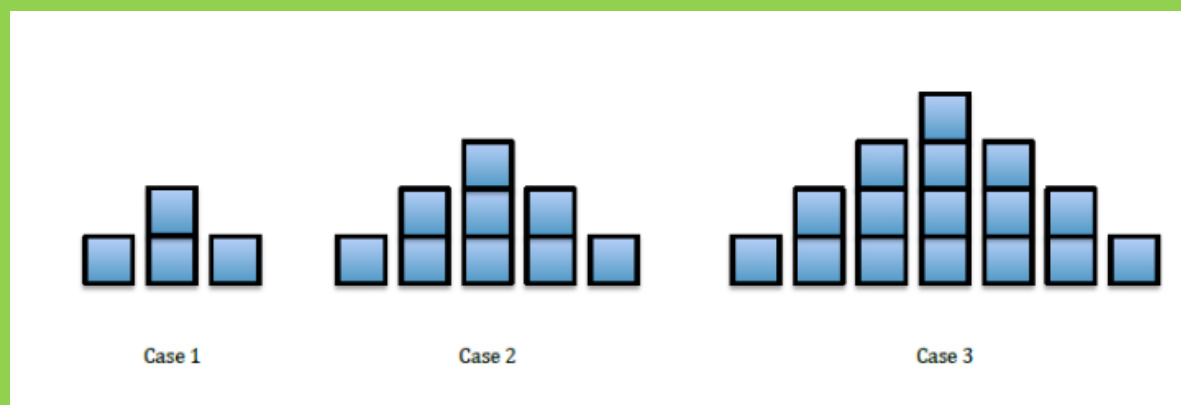
Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
x	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
y	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden x fra sola og omløpstiden y for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

- Finne den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.
- Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?
- Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

Utforskende oppgave – Mønster i figurer

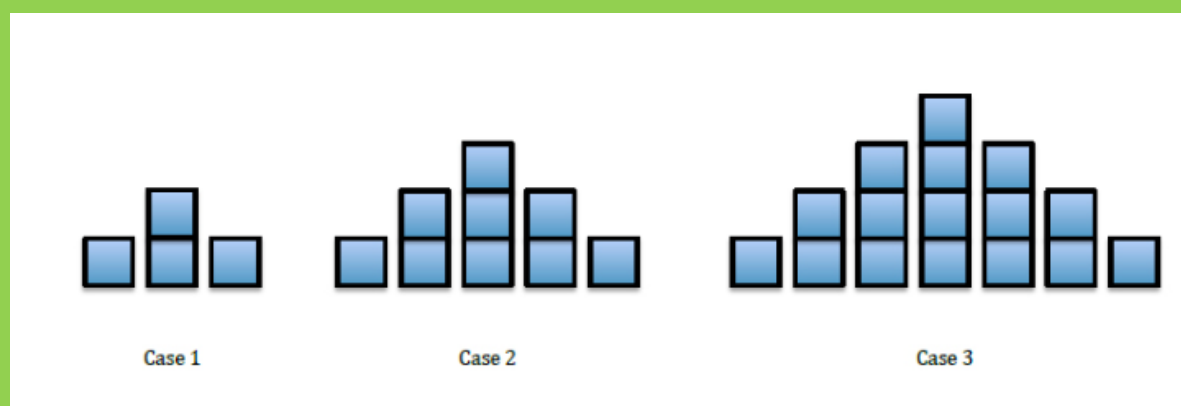
Kilde (hentet 08.06.2017): <https://www.youcubed.org/task/squares-upon-squares/>



I denne oppgaven skal du prøve å finne et mønster for hvordan klosser legges til fra en figur til den neste (se over).

Individuelt:

Se på figurene og marker hvordan du ser at klossene legges til fra en figur til den neste:



I gruppe:

Sammenlign det du ser med hva læringspartneren din ser. Er det bare en måte å se dette på?

Kommenter.

I plenum:

Hvor mange ulike måter har klassen kommet frem til?

Oppfølgingsspørsmål (IGP):

1. Hvordan ville figur 100 se ut? Hvor mange klosser ville den ha? Hvordan vet du det?

2. Hvordan ville figur 0 se ut? Hvordan vet du det?

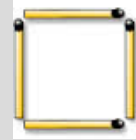
3. Hvor mange klosser ville det være i figur n ? Hvordan vet du det?

4. Mønster i tall og figurer

Eksempel 5

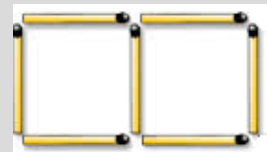
Figuren viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.

Vi skal finne en formel (matematisk modell) for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage flere sammenhengende kvadrater.



Vi ser at for å lage to kvadrater trenger vi 7 fyrstikker.

For å legge på et nytt kvadrat, trenger vi 3 fyrstikker til, altså 10.



Vi kan si at antall fyrstikker er en funksjon av antall kvadrater. Variabler, slik som antall kvadrater, som bare kan være et *helt* tall, er det vanlig å kalle n istedenfor x . Det er også vanlig å skrive funksjonsuttrykket som f_n istedenfor $f(n)$.

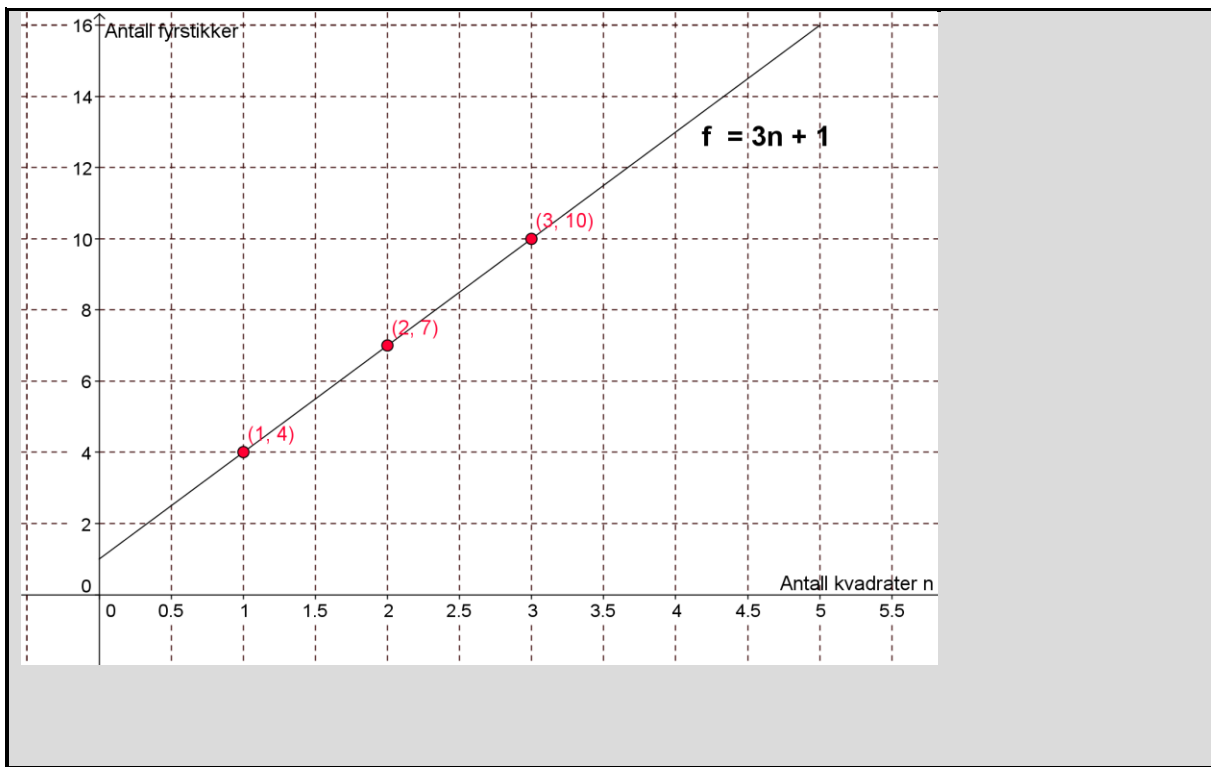
I dette eksemplet kan vi da skrive

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 7, \quad f_3 = 10.$$

For å finne en formel for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage n kvadrater, legger vi merke til at vi starter med 4 og legger til 3 for hvert nytt kvadrat vi legger til. Men hvis vi har n kvadrater, har vi lagt til $n - 1$ nye, hver med tre fyrstikker. Derfor har vi

$$f_n = 4 + 3(n - 1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

Formelen $3n + 1$ kan vi også finne bare ved å se på tallene 4, 7 og 10 og gruble litt, eller ved å legge inn punktene (1,4), (2, 7) og (3,10) i Geogebra og foreta en *lineær* regresjon.




Oppgave 10

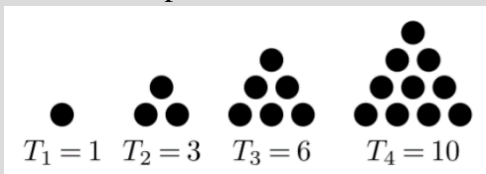
Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

- Hvor mange fyrstikker f_4 trengs for å lage 4 slike trekanter?
- Finn en formel for f_n .
- Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?



- 
 Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?

Eksempel 6

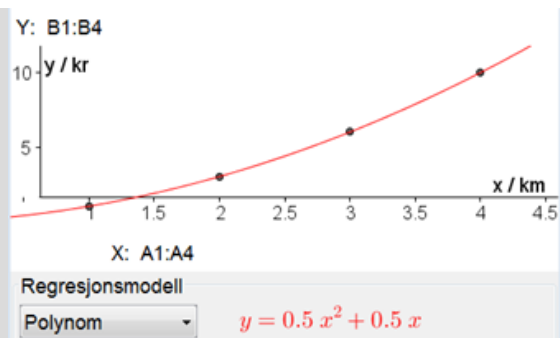


Figuren viser trekanter som er bygget opp av kuler. Antallet kuler utgjør de fire første trekantallene.

Vi ser at $T_2 = T_1 + 2$, $T_3 = T_2 + 3$, $T_4 = T_3 + 4$.

Da må vi ha $T_5 = 10 + 5 = 15$ og $T_6 = 15 + 6 = 21$.

Da antall kuler ikke øker like mye fra en trekant til den neste, kan en formel for T_n ikke være lineær. Vi legger punktene (1,1), (2,3), (3,6) og (4,10) inn i regnearket i Geogebra og prøver polynomregresjon. Da finner vi

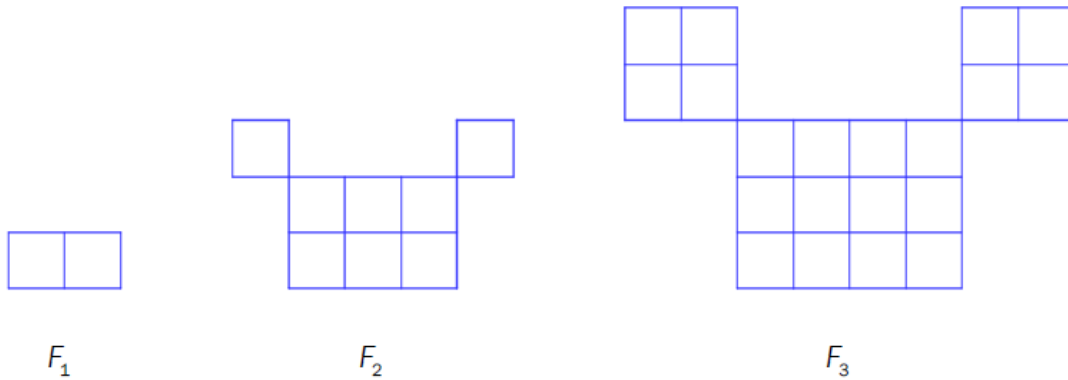


Formelen for trekanttnall nr. n er altså $T_n = 0,5n^2 + 0,5n = \frac{n^2 + n}{2}$.

Vi vil finne hvor stor trekant vi kan lage med 1000 kuler. Det kan vi gjøre ved å tegne grafen til funksjonen og finne skjæringspunktet med linja $y = 1000$. Da finner vi at vi kan lage trekant T_{44} med 1000 kuler. Da $T_{44} = 990$, får vi 10 kuler til overs.

Utfyllingsoppgave – Mønster i figurer

I denne oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan gå frem for å finne mønster i figurer.



(Eksamen 2P høsten 2016)

Se på figurene. **Tenk:** Hva skjer fra en figur til den neste? Beskriv hva du ser med ord og marker på figurene.

Tegn den neste figuren.

Tell antall deler hver figur består av og sett dette inn i en tabell

x (Figur nr)	1	2	3	4
y (Antall klosser)				

Legg tabellen inn i et regneark i GeoGebra og utfør regresjonsanalyse. Velg den modellen hvor punktene passer best med grafen.

(Lim inn GeoGebrabildet her)

Finn et uttrykk for antall klosser i figur F_n

Hvor mange klosser vil det være i figur F₇?

Fremgangsmåte:

Hvor stor figur kan du lage hvis du har 1000 klosser?

Fremgangsmåte:

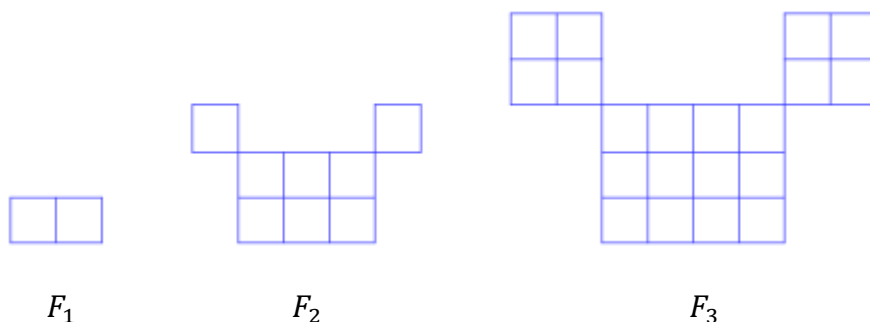
Hvor mange klosser vil du da ha igjen? _____

(Lim inn GeoGebrabildet her)

Eksamensoppgaver

E1

(Eksamen høst 2016, Del 2, 6p)



Snorre lager figurer av kvadratiske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

- Hvor mange klosser trenger Snorre for å lage F_4 og for å lage F_5 ?
- Bestem et uttrykk for antall klosser i figur F_n uttrykt ved n .

Snorre har 1000 klosser. Han vil lage en figur som er så stor som mulig.

- Bruk formelen fra oppgave b) til å bestemme hvor mange klosser han får til overs når han har laget figuren.

E2

(Eksamen høst 2016, Del 2, 8p)

Tabellen nedenfor viser pris og antall solgte enheter av en vare.

Pris (kroner)	15	19	24	30	34	42	50
Antall solgte enheter	160	132	108	90	79	67	58

- Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1600 \cdot x^{0,85}$$

er en god modell for sammenhengen mellom pris og antall solgte enheter av varen.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $15 \leq x \leq 50$.
- Bestem antall solgte enheter når prisen er 45 kroner.
- Bestem prisen når antall solgte enheter er 100.
- Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten for funksjonen f fra $x = 20$ til $x = 40$.

Hva forteller svaret om antall solgte enheter?

E3

(vår 2012, Del 1)

Elev	Praktisk situasjon	Modell	Spørsmål
Stian	Jeg har laget noen armbånd. Armbåndene skal jeg selge for 50 kroner per stykk.	Jeg trenger en modell som viser hvor mye jeg kan tjene.	Hvor mye tjener jeg dersom jeg selger fem armbånd?
Sondre	Jeg har kjøpt en krukke med 150 drops. Hver dag vil jeg spise fem drops.	Jeg trenger en modell som viser hvor mange drops jeg har igjen i krukka hver dag.	Hvor mange dager går det før jeg har spist opp halvparten av dropsene?
Sebastian	Jeg skal klippe ut rektangelformede tøyestykker i ulike størrelser. Lengden av hvert tøyestykke skal være 2,0 cm større enn bredden.	Jeg trenger en modell som viser hvor stort arealet av hvert tøyestykke blir.	Hvor stort blir arealet av et tøyestykke dersom jeg velger at bredden skal være 3,0 cm?

Ovenfor har tre elever beskrevet tre ulike situasjoner.

Ta for deg hver av de tre situasjonene.

- Svar på elevens spørsmål.
- Foreslå en matematisk modell.
- Si noe om modellens begrensninger.

E4

(høst 2011, Del 2)



Nils har funnet en bok på loftet. Tippoldefaren til Nils lånte boka på biblioteket og skulle levert den inn igjen 23.11.1911.

Nils lurer på hvor dyrt dette kunne blitt for tippoldefar dersom biblioteket hadde beregnet gebyr for sen innlevering. Han ser for seg at biblioteket kunne beregnet gebyr etter to ulike modeller.

Modell 1

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og så 5 øre i tilleggsgebyr for hver uke som går etter det. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 20 øre.)

Modell 2

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og deretter øker dette gebyret med 0,2 % hver uke. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 10,04004 øre.)

I denne oppgaven regner vi at det er 52 uker i et år.

- a) Tenk deg at tippoldefar leverer inn boka i dag. Regn at “i dag” er 23.11. 2011.
 - 1) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 1?
 - 2) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 2?
- b) For hvilken av de to modellene kommer gebyret raskest opp i 10 kroner?

E5


(vår 2011, Del 2)

Vibeke har fått en bakterieinfeksjon og tar tablett med antibiotika. En tablett inneholder 220 mg antibiotika. Antall milligram antibiotika i kroppen reduseres med 11 % hver time.

- a) Vibeke tar en tablett. Hvor mange milligram antibiotika er det igjen i kroppen hennes
- 1) etter én time?
 - 2) etter åtte timer?

Vibeke tar en tablett hver åttende time.

- b) Hvor mange milligram antibiotika har hun i kroppen rett etter at hun har tatt sin
- 1) andre tablett?
 - 2) tredje tablett?

- c)  Skisser grafen som viser hvor mange milligram antibiotika Vibeke til enhver tid har i kroppen det første døgnet etter at hun begynte å ta tablettene.

E6

(høst 2012, Del 1)



Et fallskjermhopp kan deles inn i fire faser. I hver fase ser vi på farten fallskjermhopperen har loddrett nedover.

Fase 1:

Fallskjermhopperen forlater flyet. Etter tre sekunder er farten 25 m/s, og etter åtte sekunder har fallskjermhopperen nådd den maksimale farten, som er 50 m/s.

Fase 2:

Fallskjermhopperen faller med maksimal fart i fire sekunder.

Fase 3:

Fallskjermen løses ut, og i løpet av ett sekund minker farten til 5 m/s.

Fase 4:

Fallskjermhopperen fortsetter med konstant fart 5 m/s i åtte sekunder før han når bakken.

Lag en grafisk framstilling som viser hvordan farten til fallskjermhopperen varierer med tiden i løpet av hoppet.

E7

(Eksamen høst 2016, Del 2, 5p)

Når en pasient har tatt en tablett, vil virkestoffet i tablett brytes ned i kroppen. Konsentrasjonen av virkestoffet i blodet vil avta eksponentielt med tiden.

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen i mikrogram per milliliter ($\mu\text{g/ml}$) av virkestoffet i blodet 1 time etter og 24 timer etter at pasienten har tatt tablett.

Timer etter at pasienten har tatt tablett	1	24
Konsentrasjon av virkestoff i blodet ($\mu\text{g/ml}$)	0,5	0,05

- Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for konsentrasjonen av virkestoffet i blodet x timer etter at pasienten har tatt en tablett.
- Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 10 timer etter at pasienten har tatt en tablett.

En pasient begynner å ta tabletter. Han tar én tablett klokka 08.00 hver morgen og én tablett klokka 20.00 hver kveld.

- Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 30 timer etter at pasienten tok den første tablett.

E8

(vår 2011, Del 2) 

Rebecca er på ferie i Kina. Hun vil kjøpe sko til kjæresten, Isak, hjemme i Oslo. Kinesiske skostørrelser er annerledes enn det hun er vant med fra Norge.

Nedenfor ser du hva Rebecca finner ut om kinesiske herresko.

- * Den minste størrelsen er 20. Sko i størrelse 20 er 21,5 cm lange.
- * Når størrelsen øker med 1, øker skolengden med 5 mm.
- * Kineserne bruker halvstørrelser, slik at for eksempel 37,5 er en mulig skostørrelse.

Rebecca vil sammenlikne norske og kinesiske skostørrelser. Hun setter opp tabellen nedenfor.

	Minste skostørrelse	Økning i lengde per størrelse	Halvstørrelser
Kina	20 (lengde 21,5 cm)	5 mm	Ja
Norge	32 (lengde 21,75 cm)	6,6 mm	Nei

- a) Hvor lang er en sko som har norsk skostørrelse 40?
- b) 1) Forklar at $y = (x - 20) \cdot 0,5 + 21,5$ er en formel for å regne ut skolengden, y , når du kjenner den kinesiske skostørrelsen, x .
- 2) Sett opp en tilsvarende formel for å regne ut skolengden når du kjenner den norske skostørrelsen.
- c) Isak bruker norsk skostørrelse 43. Hvilken kinesisk skostørrelse tilsvarer dette? Det er en lineær sammenheng mellom norske og kinesiske skostørrelser.
- d) Tegn av tabellen under i besvarelsen din. Fyll ut tabellen og finn den lineære sammenhengen.

Norsk skostørrelse	Kinesisk skostørrelse
32	
43	
	39

E9

(vår 2012, Del 2)

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen i Norge i perioden fra 1998 til 2011.

Årstall	Konsumprisindeks
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4

- a) Marker verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem der x - akse viser antall år etter 1998 (1998 tilsvarer $x = 0$) og y - akse viser konsumprisindeksen.

Bruk regresjon til å finne en rett linje som passer med punktene i koordinatsystemet.

- b) Hva vil konsumprisindeksen bli i 2030 ifølge modellen i a)?

Myndighetene har siden 2001 hatt som mål at konsumprisindeksen skal stige med 2,5 % per år.

- c) Hva ville konsumprisindeksen ha blitt i 2030 dersom den hadde steget med 2,5 % per år fra 2001 til 2030?

E10

(høst 2012, Del 2)

Måned	Januar	Mars	Juni	Juli	August	Desember
Antall kilogram pølser	45	144	299	328	336	36

Tabellen ovenfor viser antall kilogram pølser som ble solgt i en butikk noen måneder i 2011.


- a) Framstill datamaterialet i tabellen ovenfor som punkter i et koordinatsystem der x -aksen viser måned og y -aksen viser antall kilogram pølser.

(La $x = 1$ svare til januar, $x = 2$ til februar, $x = 3$ til mars, osv.)

- b) Bruk regresjon til å bestemme en modell på formen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ som kan brukes for å beskrive antall kilogram pølser som ble solgt per måned i løpet av dette året.

Tegn grafen til f i samme koordinatsystem som du brukte i a).

Butikken regner med at pølsealget vil være 20 % høyere hver måned i 2012 sammenliknet med tilsvarende måned i 2011.

- c)  I hvilke måneder i 2012 vil butikken da selge mer enn 300 kg pølser per måned dersom vi tar utgangspunkt i modellen i b)?

E11

(vår 2012, Del 2)


Tabellen nedenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år.

Årstall	1927	1961	1974	1987	1999	2011
Folketall (milliarder)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La x være antall år etter 1900 (i 1900 er $x = 0$, i 1901 er $x = 1$, og så videre).

- Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 1,27 \cdot 1,016^x$ kan brukes som modell for å beskrive hvordan folketallet i verden har endret seg i årene 1927–2011.
- Hvor mange prosent øker folketallet med per år ifølge modellen i a)?
- Når var folketallet 4,6 milliarder ifølge modellen i a)?
- Hvor lang tid går det ifølge modellen i a) mellom hver gang folketallet fordobles? Hvordan stemmer dette med tallene i tabellen ovenfor?

FN har utarbeidet prognoser som sier at folketallet i verden skal passere 8 milliarder i 2025 og 9 milliarder i 2045.

- e)  Vurder om modellen i a) passer med disse prognosene.

E12

(høst 2011 Del 2)

Årstall	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Innbyggertall	650	550	467	396	336	284
Endring fra året før		-100				
Prosentvis endring fra året før		-15,4 %				

Tabellen ovenfor viser innbyggertallet i en liten bygd i årene fra 2005 til 2010. Hans og Grete vil ut fra tabellen lage en matematisk modell som kan brukes til å anslå innbyggertallet i bygda i årene som kommer. Hans mener de bør velge en lineær modell. Grete er ikke enig.

a)

- 1) Tegn av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Fyll inn tallene som skal stå i resten av de hvite feltene.
- 2) Bruk opplysningene i tabellen. Argumenter for at Hans og Grete ikke bør velge en lineær modell, og foreslå hvilken type modell de bør velge.


La x være antall år etter 2005, og la $f(x)$ være innbyggertallet i bygda.

b) Bruk regresjon til å finne den modellen du foreslo i a).

c) 1) Hva vil innbyggertallet i bygda være i 2020 ifølge modellen du fant i b)?

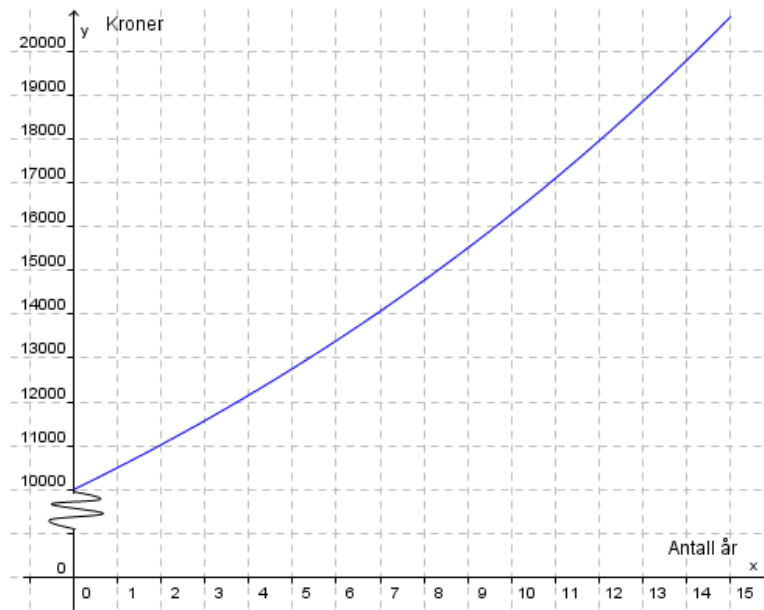
2) Hvor lang tid vil det gå før innbyggertallet er under 100 ifølge denne modellen?

Hans lager likevel en lineær modell. Han finner at $y = -62x + 635$.

d)  Vurder om denne modellen kan brukes til å beskrive innbyggertallet i bygda i årene fram til 2020.

E13

(høst 2012 Del 2)



Guri setter et pengebeløp i banken. Grafen ovenfor viser hvordan beløpet vokser de 15 første årene. Vi antar at renten er den samme hvert år.

- a) 🤔 Sett opp et matematisk uttrykk som kan være en modell for hvor mye penger Guri har i banken etter x år.
- b) Hvor mye penger vil Guri ha i banken etter 20 år ifølge modellen du satte opp i a)? Når vil beløpet hun har i banken, passere 50 000 kroner ifølge modellen?

E14

(vår 2011, Del 2)

Per prøver å finne en sammenheng mellom diameteren og volumet til kuler.
Han måler diameter og volum for noen kuler av ulik størrelse. Se tabellen nedenfor.

Diameter (cm)	3,0	6,0	10,0	16,0	26,0
Volum ($\text{cm}^3 = \text{mL}$)	14	113	525	2 145	9 200

- a) 1) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 0,52 \cdot x^{3,0}$ er en god modell for sammenhengen mellom diameteren, x , og volumet, $f(x)$, til kuler.
2) Tegn grafen til funksjonen f .
- b) Finn diameteren til en kule med volum 1000 mL.

Per lærte allerede i grunnskolen at formelen for volumet av en kule er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ der r er radius i kulen.

- c) Stemmer resultatet fra a) med denne formelen? Forklar.

E15

(høst 2011, del 2)

Haile Gebrselassie fra Etiopia har vært en av verdens beste langdistanseløpere. I tabellen nedenfor ser du hans beste tider på noen distanser.


Distanse x (i meter)	1 500	3 000	5 000	10 000	15 000	16 093	25 000	42 195
Tid T (i minutter)	3,550	7,417	12,656	27,033	41,633	44,400	71,617	123,988

- Bruk regresjon til å vise at $T = 1,44 \cdot 10^{-3} \cdot x^{1,07}$ er en modell for tiden T som funksjon av distansen x for Gebrselassies resultater.
- Tegn grafen til T .
- Hvor lang tid vil Gebrselassie bruke på en halvmaraton (21097,5 m) ifølge modellen i a)?

Pete Riegel har laget en modell som viser sammenhengen mellom tiden T_1 en løper bruker på en distanse D_1 , og tiden T_2 løperen bruker på en distanse D_2 .

Modellen ser slik ut:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^{1,06}$$

-  Ta utgangspunkt i tiden Gebrselassie bruker på 25 000 m, og regn ut hvor lang tid han vil bruke på en halvmaraton ifølge Riegels modell. Hvordan passer dette svaret med modellen du fant i a)?

E16

(vår 2013, Del 2)

Bilmerke	Volvo
Bilmodell	V50
Nybilpris i 2006	299 990
Antatt verdi i 2011	171 000
Verditap	128 900
Verditap årlig	25 780

I 2011 kjøpte Helene en bruktbil. Hun fant da tabellen ovenfor på Internett. Alle beløp er oppgitt i kroner.

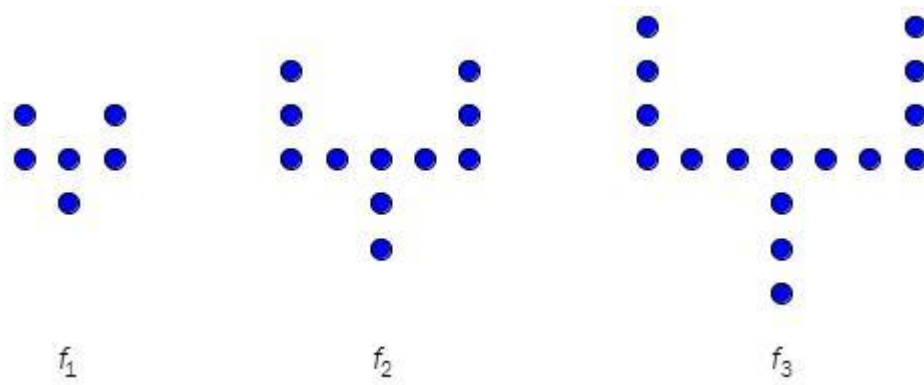
- a) Forklar at det årlige verditapet på bilen er beregnet ved hjelp av en lineær modell og bestem denne modellen.

Helene lurer på om det vil være mer realistisk å bruke en eksponentiell modell.

- b) Bestem en eksponentiell modell som totalt gir samme verditap på bilen fra 2006 til 2011 som den lineære modellen.
- c) Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den lineære modellen?
Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den eksponentielle modellen?

E17

(høst 2012, del 1)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1 , f_2 og f_3 .

a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4 .
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n , uttrykt ved n .

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1000 hPa (hektopascal)

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsider og se på noen modeller for hvor stort lufttrykket er x kilometer over havets overflate.



- a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell f der $f(x) = 1000 \cdot 0,88^x$

Tegn grafen til f for $0 \leq x \leq 10$.

- b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modellen i a). Gi denne modellen navnet g . Tegn grafen til g for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem som grafen til f .

- c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell h . Tegn grafen til h for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem du har brukt tidligere i oppgaven. Kommenter siste setning i sitat 3.
- d) Bruk hver av de tre modellene f , g , og h til å bestemme lufttrykket 8848 meter over havoverflaten. Sammenlikn svarene du får med sitat 4 og kommenter.

Kapittel 5. Sannsynlighetsregning



Mål for Kapittel 5, sannsynlighetsregning.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- lage eksempler og simuleringer av tilfeldige hendelser og redegjøre for begrepet sannsynlighet
- beregne sannsynlighet ved å telle opp gunstige og mulige utfall, systematisere opptellinger ved hjelp av krysstabeller, venndiagram og valgtre og bruke addisjonssetningen og produktsetningen i praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- hva sannsynlighet er
- hva gunstige utfall er i ulike oppgaver
- hva forskjellen på uniform og ikke-uniform sannsynlighet er
- hvordan jeg ordner informasjon i en krysstabell, et venndiagram og et valgtre
- hva tilbakelegging betyr i sannsynlighetsregning

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- hvordan jeg finner sannsynlighet i enkle tilfeller uten tilbakelegging
- i hvilke tilfeller en bruker addisjonssetningen og produktsetningen
- hvorfor brøkgregning er viktig i sannsynlighet
- hva en krysstabell representerer
- hvordan tilbakelegging påvirker sannsynligheten for en hendelse

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- lage og løse sammensatte tekstopp-gaver knyttet til sannsynlighet
- utføre beregninger av sannsynlighet på bakgrunn av tekst og på bakgrunn av en krysstabell
- diskutere sannsynlighet brukt i dagligtale
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – Første hest til 10

I denne oppgaven skal dere jobbe sammen i par.

På spillebrettet ser dere 12 hester som står klare ved startstreken og hvor målet er å være første hest til rute nummer 10. Hestene flytter på følgende måte:

- En av dere kaster 2 terninger, og legger sammen antall øyne på terningene. Summen forteller hvilken hest som skal flytte.
- Den andre setter et kryss i første ledige rute i kolonnen til riktig hest.

Før dere begynner:

- Velg dere tre hester hver. Skriv forbokstaven under hesten for å vise hvem som «eier» hvilken hest.
- Bli enige om hvem som kaster og hvem som setter kryss.
- Avgjør en premie til vinneren, dersom en av dere eier vinnerhesten.
- Når en hest har kommet til rute nummer 10 er konkurransen over, uavhengig av om noen eier denne hesten.

Når alle er ferdige lager læreren statistikk over resultatene. Vi skal da diskutere:

- Hvilke hester blir kastet oftest? Hvorfor skjer dette?
- Ligner resultatet du fikk på klassens resultat? Hvis det ikke gjør det, hva tror du grunnen er til det?
- Hvor mange ganger har hest nummer 1 flyttet? Hva er grunnen til dette?
- Dersom du skulle spilt dette en gang til, hvilke hester ville du valgt? Hvorfor ville du valgt disse hestene?
- Velg deg en hest, og tenk gjennom følgende:
 - På hvor mange ulike måter kan terningene lande slik at din hest skal flytte?
 - På hvor mange ulike måter kan to terninger lande?
 - Kan du stille opp dette som en brøk, hvor du har antall ønskede kombinasjoner i telleren og antall mulige kombinasjoner i nevneren?
 - Hvorfor er antall muligheter og antall hester ulikt?
- Still opp en slik brøk for alle hestene. Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for klassen? Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for alle klassene våren 2016?
- Hvordan ville dette spillet sett ut dersom dere skulle kastet 3 terninger? Hvilke hester ville du valgt da?

1. Innledning

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.

I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er 80 % sannsynlig at Manchester United kommer til å slå Chelsea i lørdagens fotballkamp, eller at det bare er 10 % sannsynlig at Sara får 5 på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Manchester U. vil vinne, og at Sara antagelig ikke vil få 5. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotball-lagene og Sara har prestert tidligere. Hvis vi er helt sikre på at noe bestemt vil skje, sier vi ofte at “det er 100 % sikkert”. Er vi sikre på at det ikke vil skje, kan vi si “det er null sannsynlighet” eller “null sjanse”.

Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*. De enkleste regnemåtene skal du lære i dette kapitlet.

Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill.

2. Hva er sannsynlighet?

Anta at vi har undersøkt kjønn til 10 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	Antall	Antall i prosent
Gutt	5140	51,4 %
Jente	4860	48,6 %
Gutt eller jente	10000	100 %

Den andre kolonnen viser hvor mange tilfeller det er av hvert utfall.

Siste kolonne viser hvor mange prosent av forsøkene hvert av de to mulige utfallene forekommer.

Etter å ha gjort denne undersøkelsen, kan vi si at sannsynligheten for at et tilfeldig valgt barn er en gutt, er 51,4 %, eller 0,514. Sannsynligheten for at det er en jente, er 48,6 %, eller 0,486. Det skriver vi kort slik:

$$P(\text{gutt}) = 0,514, P(\text{jente}) = 0,486.$$

Vi bruker P fordi sannsynlighet heter “probability” på engelsk.

Sannsynligheten for et bestemt utfall viser i hvor stor prosent av et forsøk dette utfallet forekommer, hvis vi gjør et forsøk *mange* ganger.

Verdien blir mer og mer nøyaktig jo flere ganger vi gjør forsøket.

Oppgave 1

På Hellerud videregående skole er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.

- Framstill resultatene i en tabell med antall og prosent som vist på forrige side.
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente?
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er gutt?

Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.

- Framstill resultatene i en tabell med antall og prosent som vist på forrige side.
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann er fargeblind?
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann *ikke* er fargeblind?

3. Sannsynlighetsregning når alle utfall er like sannsynlige

3.1. Innledning

Hvis vi kaster et pengestykke har vi to mulige utfall. Vi kan få mynt, eller kron. Begge utfallene er like sannsynlige. Det betyr at $P(M) = 1/2$ og $P(K) = 1/2$. Fordi sannsynlighetene her er *nøyaktig* 50 % (0,50), bruker vi gjerne brøken $\frac{1}{2}$ isteden.

Her er noen eksempler på forsøk og de mulige utfallene

Forsøk	Mulige utfall
Kaste et pengestykke	Mynt, kron
Kaste en terning	1, 2, 3, 4, 5, 6
Trekke et kort fra en kortstokk med 52 kort	Hjerter ess, spar to, ... (tilsammen 52)
Bestemme kjønn til nyfødt barn	Gutt, jente
Bestemme antall jenter i en trebarnsfamilie	0, 1, 2, 3
Undersøke om en person er fargeblind	Fargeblind, ikke fargeblind
Undersøke fabrikkmerket på mobilen til en person	Apple, Samsung, LG, Nokia, HTC,...

3.2. Hendelser

Hva er sannsynligheten for å trekke en *hjerter* fra en kortstokk? Det er 13 hjerter i stokken slik at det er 13 av 52 mulige utfall som gir en hjerter.

Vi sier at ”hjerter” er en *hendelse* som består av 13 utfall. Disse utfallene kaller vi *gunstige utfall* for hendelsen ”hjerter”. (Ordet ”gunstig” betyr ”passende” eller ”bra”.) Da finner vi sannsynligheten for at vi trekker et hjerterkort slik

$$P(\text{hjerter}) = \frac{13}{52} = \frac{13}{13 \cdot 4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

(her har vi skrevet sannsynligheten som både brøk, desimaltall og prosent).

Hvis alle utfallene er like sannsynlige, finner vi sannsynligheten for en *hendelse* slik:

$$P(\text{ en hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Hvis vi kaster to terninger, kan vi kalle summen av øynene for en hendelse. Summen kan variere fra 2 til 12. Det er $6 \cdot 6 = 36$ mulige utfall i dette forsøket. Hendelsen ”summen av øynene er 7” har seks gunstige utfall: (1+6), (2+5), (3+4), (4+3), (5+2), (6+1). Da får vi

$$P(\text{sum øyne lik 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 3

- Hva er sannsynligheten $P(\text{fem})$ for å få en *femmer* når vi kaster en terning?
- Hva er sannsynligheten $P(\text{partall})$ for å få et *partall* når vi kaster en terning?
- Hva er sannsynligheten for å trekke *hjerter ess* fra en kortstokk?
- Hva er sannsynligheten for å trekke *ruter* fra en kortstokk?
- Hva er sannsynligheten for å trekke *et ”svart kort”* fra en kortstokk?
- Hvordan ville du gå fram for å finne ut om alle fødselsdatoer er like sannsynlige? Anta at de faktisk er det. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person er født 1. mai? Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Oppgave 4

Finn sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger er lik

- 5
- 10
- 12

3.3. Multiplikasjonsprinsippet: Hvordan finne antall mulige utfall

Anta at en restaurant tilbyr 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Du kan ikke bestemme deg og velger derfor forrett, hovedrett og dessert ved å sette ned fingeren i menyen helt tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å velge kamskjell til forrett, laks til hovedrett og sjokolademousse til dessert (hvis alle disse står på menyen)?

Vi antar at alle valg av de tre rettene er like sannsynlige, og trenger da antall mulige utfall. Hver av de tre forrettene kan vi kombinere med fem hovedretter. Det gir $3 \cdot 5 = 15$ mulige kombinasjoner. Hver av disse 15 kombinasjonene kan vi kombinere med 4 desserter. Det gir tilsammen $15 \cdot 4 = 60$ mulige treretters middager. Sannsynligheten for et bestemt treretters valg blir da $1/60$.

Multiplikasjonsprinsippet: Hvis vi skal gjøre flere valg etter hverandre, finner vi antall mulige utfall ved å multiplisere antall muligheter i hvert av valgene.

Eksempel 1

Ida kan velge mellom sju sjokolader. For at det ikke skal bli for usunt, må hun også velge en av fire frukter. Hun klarer ikke å bestemme seg så hun trekker lodd for å velge. Hva er sannsynligheten for at hun trekker firkløver og pære?



Antall mulige utfall av trekningen er $7 \cdot 4 = 28$.

Hvis hun trekker lodd, kan vi anta at alle de 28 utfallene er like sannsynlige. Derfor er

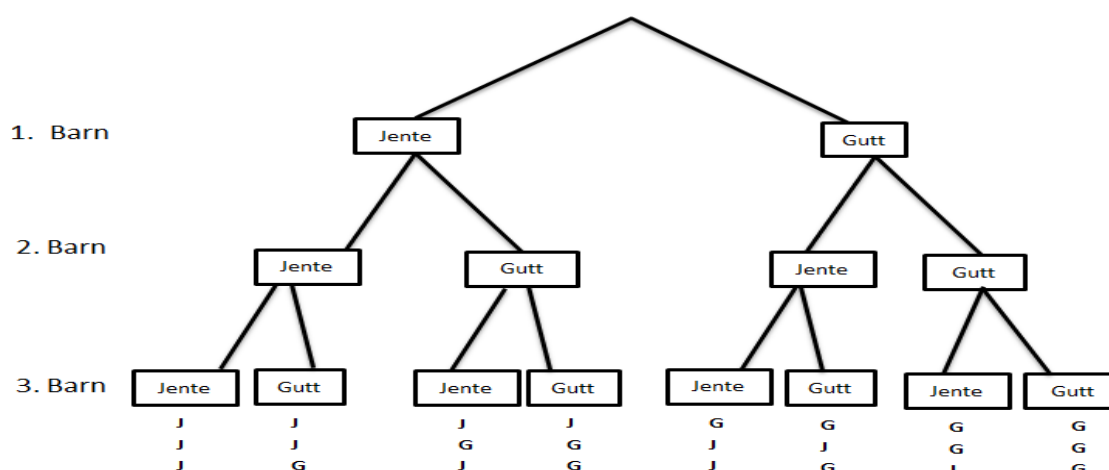
$$P(\text{firkløver og pære}) = \frac{1}{28}.$$

Eksempel 2

Hva er sannsynligheten for at det første barnet er en gutt, og de to neste er jenter, i en trebarnsfamilie? Anta at alle utfall er like sannsynlige.

Antall mulige utfall er her $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Derfor er $P(GJJ) = \frac{1}{8}$.

De mulige utfallene i eksempel 2 kan framstilles i et *valgtre*



Her kan vi se at GJJ er en av åtte muligheter totalt. Slik kunne vi brukt valgtreet og funnet at $P(GJJ) = \frac{1}{8}$, akkurat som vi fant i eksempelet over.

Oppgave 5

- Hvor mange mulige utfall er det hvis vi kaster tre pengestykker?
- Hva er sannsynligheten for at vi skal få MMK? (mynt på første pengestykke, mynt på andre og kron på tredje)?
- Tegn et valgtre som ligner på valgtreet ovenfor, og som viser de ulike utfallene i dette forsøket.

Oppgave 6

Vi skal tippe utfallet av to fotballkamper. Hver kamp kan gi hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

- Hvor mange mulige utfall er det i denne tippekonsurransen?
- Lag et valgtre som viser de mulige utfallene.
- Hvor mange mulige utfall er det hvis man tipper resultatet av 12 kamper?

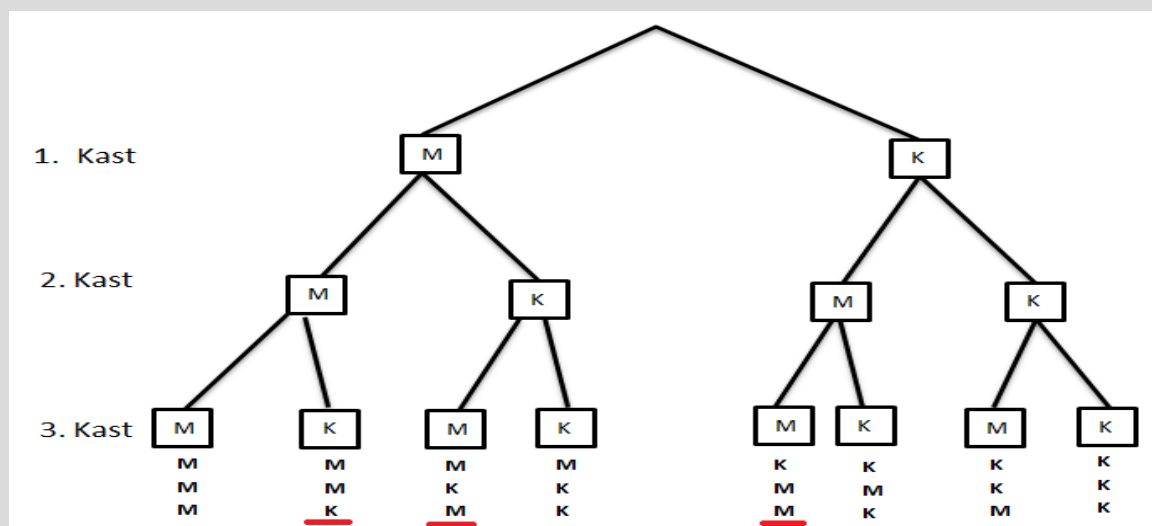
Eksempel 3

Vi kaster tre pengestykker etter hverandre.

a) Finn sannsynligheten for 2 mynt og en kron.

b) Finn sannsynligheten for 1 mynt og to kron

Tegner et valgtre som gir oss oversikt over de forskjellige utfallene.



a) Vi ser at vi har 8 forskjellige utfall. Av disse gir tre forskjellige to mynt og 1 kron. Dette er MMK, MKM og KMM som er markert i rødt. Sannsynligheter for to mynt og en kron er dermed $\frac{3}{8}$.

b) Av valgtreet ser vi at det er tre muligheter for å få 1 mynt og to kron. MKK, KMK og KKM.

Sannsynligheter for 1 mynt og to kron er dermed $\frac{3}{8}$.

Oppgave 7

Vi kaster to pengestykker etter hverandre.

a) Tegn et valgtre som viser de mulige utfallene vi kan få.

b) Finn sannsynligheten for 2 kron.

c) Finn sannsynligheten for 2 mynt.

d) Finn sannsynligheten for 1 mynt og 1 kron.

Oppgave 8

CMT er en arvelig nervesykdom. I gjennomsnitt vil halvparten av barna hvor en av foreldrene har CMT, arve sykdommen.

I en familie har mor CMT. Familien har tre barn.

a) Finn sannsynligheten for at alle tre barna har CMT.

b) Finn sannsynligheten for at to av barna har CMT.

c) Finn sannsynligheten for at ett av barna har CMT.

d) Finn sannsynligheten for at ingen av barna har CMT.

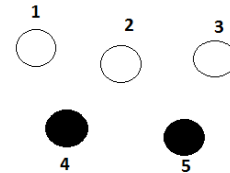
Oppgave 9

- a) Finn sannsynligheten for at det er tre gutter og ei jente i en firebarnsfamilie. Vi regner alle de mulige utfallene som like sannsynlige (ikke helt riktig).
- b) Vi undersøker 1000 firebarnsfamilier. I omtrent hvor mange av disse vil vi finne tre gutter?



3.4. Sammensatte forsøk. Produktsetningen

Vi har fem nummererte kuler, tre hvite og to svarte. Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at både den første og den andre er hvite *når vi legger den første tilbake før vi trekker den andre*?



I følge multiplikasjonsprinsippet har vi $5 \cdot 5 = 25$ mulige utfall. 9 av disse, nemlig (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) gir oss hendelsen “første er hvit og andre er hvit”. Da får vi :

$$P(\text{første er hvit og andre er hvit}) = \frac{9}{25}.$$

Trekningen av de to kulene er et eksempel på et *sammensatt forsøk*. Forsøket består av to *delforsøk*.

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen A i første delforsøk og hendelsen B i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for B påvirkes av at A har skjedd.

I trekningsforsøket vårt er hendelsen A “første er hvit” og hendelsen B er “andre er hvit”. Det er for begge hendelsene 3 gunstige utfall av 5 mulige. Derfor har vi:

$$P(\text{første hvit og andre hvit}) = P(\text{første hvit}) \cdot P(\text{andre hvit}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

som er samme svar som vi fant på en annen måte ovenfor.

Oppgave 10

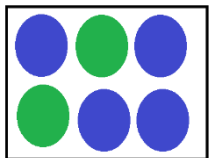
Finn sannsynligheten for å trekke to *svarte* kuler i eksemplet ovenfor (hvor vi legger den første kula tilbake før vi trekker den andre). Løs oppgaven både ved å se på antall gunstige og mulige utfall i det sammensatte forsøket, og ved å bruke produktsetningen.

Oppgave 11

Finn sannsynligheten for å trekke to svarte kuler i eksemplet ovenfor når vi *ikke* legger den første kula tilbake før vi trekker den andre.

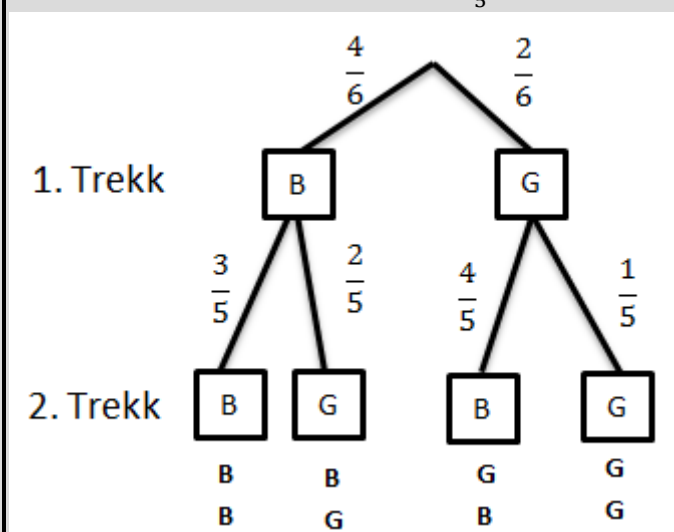
Eksempel 4

I en eske er det fire blå og to grønne kuler. Kenneth trekker tilfeldig to av kulene.



- Bestem sannsynligheten for at han trekker to blå kuler.
- Bestem sannsynligheten for at han trekker to grønne kuler.

Velger å tegne et valgtre først. Brøken angir sannsynligheten for hver mulighet. F.eks er det $\frac{4}{6}$ sjanse for å få blå på det første trekket. Hvis vi fikk blå på det første trekket er det kun 3 blå kuler igjen. Sannsynligheten blir da $\frac{3}{5}$ for å få blå på det andre trekket.



- Vi bruker produksetningen:

$$P(\text{første blå og andre blå}) = P(\text{første blå}) * P(\text{andre blå}) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

Sannsynligheten for to blå er $\frac{6}{15}$

- $(\text{begge grønne}) = P(\text{første grønne}) * P(\text{andre grønne}) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Sannsynligheten for to grønne er $\frac{1}{15}$

Oppgave 12

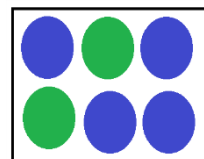
I en klasse arrangeres et lotteri med 40 lodd. Hver elev skal trekke to lodd, og det er gevinst på tre av de 40 loddene. Ida er den første til å trekke og hun tar to lodd. Hva er sannsynligheten for at hun har vunnet på begge loddene?



3.5. Addisjonssetningen: En annen måte å beregne sannsynlighet for hendelser

Vi ser tilbake på eksempel 4 med kuletrekning.

Hva er sannsynligheten for å trekke én blå og grønn kule?



Produktsetningen alene kan bare gi oss sannsynlighetene for at den første er blå og den andre grønn, eller omvendt. Slik:

$$P(BG) = P(\text{første blå og andre grønn}) = P(\text{første blå}) \cdot P(\text{andre grønn}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$
$$P(GB) = P(\text{første grønn og andre blå}) = P(\text{første grønn}) \cdot P(\text{andre blå}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for en blå og en grønn kule ved å *addere* (legge sammen) disse to sannsynlighetene:

$$P(\text{en grønn og en blå}) = P(BG) + P(GB) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Dette er et eksempel på bruk av *addisjonssetningen* for sannsynligheter.

Addisjonssetningen. Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A* eller hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B).$$

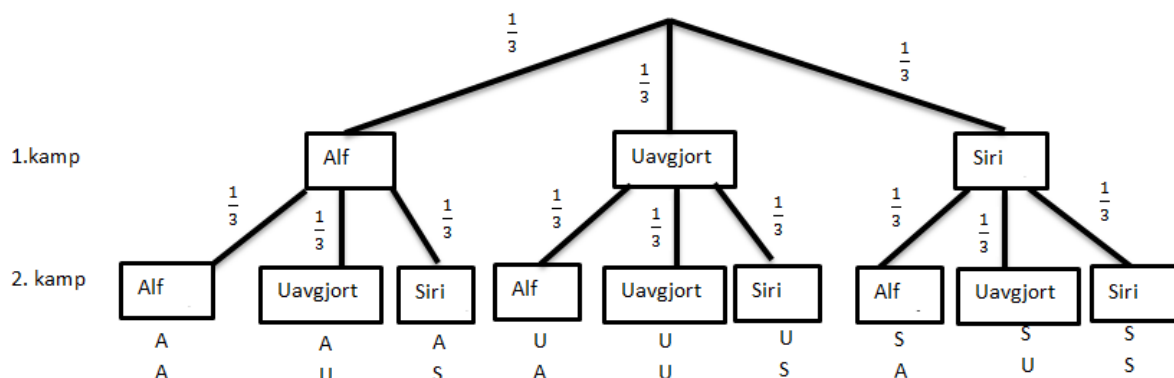
Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig.

Eksempel 5

Alf og Siri spiller “stein –papir –saks” to ganger på rad.

- Hva er sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre?
- Hva er sannsynligheten for at minst en av kampene blir uavgjort

Velger å tegne et valgtre først. Alf betyr at Alf vinner, Siri betyr at Siri vinner.



- At Siri vinner første, og får uavgjort på andre tilsvarer utfallet SU, i valgtreet.

$$P(SU) = P(\text{Siri vinner første}) \cdot P(\text{Uavgjort på andre}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre er $\frac{1}{9}$.

- Her kan vi bruke addisjonssetningen. Vi ser at minst en av kampene blir uavgjort betyr at vi kan få: AU, UA, UU, US eller SU. Alle disse resultatene er like sannsynlig.

$$P(\text{Minst en av kampene blir uavgjort}) = P(AU) + P(UA) + P(UU) + P(US) + P(SU)$$

$$P(\text{Minst en av kampene blir uavgjort}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Sannsynligheten for at minst en kamp blir uavgjort er $\frac{5}{9}$.

Eksempel 6

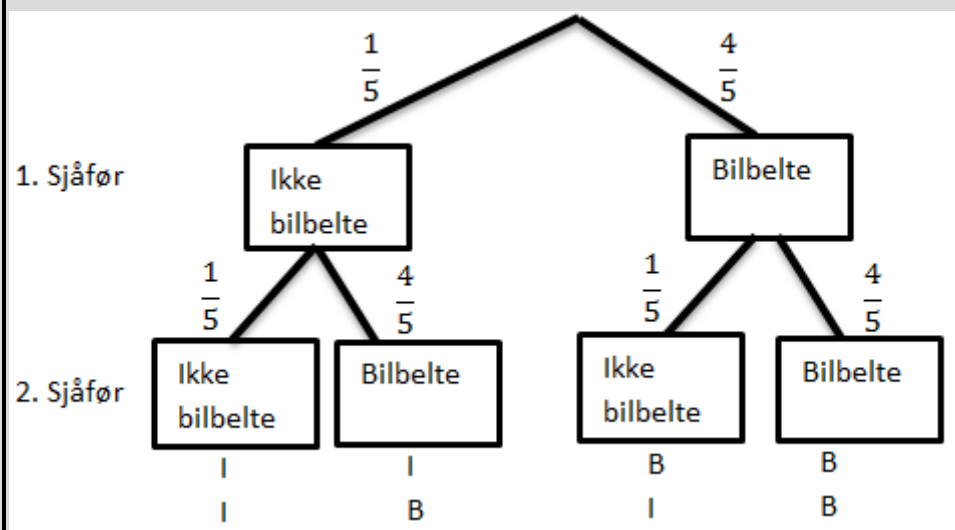
Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere.

a) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte?

b) Hva er sannsynligheten for at *en* bruker bilbelte?

Sannsynligheten for at han ikke bruker bilbelte må være 20 %.

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ og $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Lager et valgtre for å få oversikt.



a) At begge bruker bilbelte tilsvarer alternativet merket BB. $P(BB) =$

$$P(\text{første bruker bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker bilbelte}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$$

Sannsynligheten for at begge bruker bilbelte er 64 %.

b) At kun *en* bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.

$$P(IB) = P(\text{første bruker ikke bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker bilbelte}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(BI) = P(\text{første bruker bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker ikke bilbelte}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(\text{en bruker bilbelte}) = P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 32\%$$

Sannsynligheten for at kun en bruker bilbelte er 32%.

Oppgave 13

Vi går tilbake til oppgave 12. Hva er sannsynligheten for at Ida vinner på det ene loddet, men ikke på det andre?

Oppgave 14

I en klasse er det 18 jenter og 12 gutter. Læreren trekker tilfeldig to elever til framføring.

- Hva er sannsynligheten for at det trekkes to jenter?
- Hva er sannsynligheten for at det trekkes to gutter?
- Hva er sannsynligheten for at det trekkes ei jente og en gutt?

Eksempel 7

Vi trekker to kort fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Hva er sannsynligheten for å trekke to ess?

Det er 4 ess i stokken. Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{første er ess og andre er ess}) = P(\text{første er ess}) \cdot P(\text{andre er ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

Hva er sannsynligheten for å trekke to kort med samme verdi? Det vil si to ess, ..., to seksere, ..., to konger (13 ulike verdier).

Fordi det er fire kort av hver verdi, må sannsynlighetene for å trekke to toere, to treere osv. alle være lik $1/221$. Addisjonssetningen sier at vi må legge sammen 13 sannsynligheter, hver med verdi $1/221$. Vi får da

$$P(\text{to like}) = 13 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{13}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

Oppgave 15

Vi trekker tre kort fra en kortstokk.

- Hva er sannsynligheten for at vi trekker tre spar?

De fire fargene i kortstokken er spar (♠), hjerter (♥), ruter (♦) og kløver (♣).

- Hva er sannsynligheten for at alle tre kortene har samme farge?

3.6. Krysstabeller

Oppgave 16

Finne et mønster i en tabell

- Tenk to minutter individuelt
- Gå sammen med læringspartner og diskuter forslag fem minutter
- Fyll ut tabell 1 og 2
- Et felles metodeforslag i klassen. Fint om alle kan bidra muntlig

7	4	11
3		9
10		20

8		
	2	8
14	7	

Oppgave 17

Finn og fyll ut mønsteret i tabell 3 og 4 individuelt.

6	8	
7		
		34

	9	12
9		
		27

Oppgave 18

Forklar mønsteret med egne ord:

Praktisk bruk av krysstabeller:

- Systematisere informasjonen
- Finne sannsynligheten - gunstige over mulige

Eksempel 8

Klasse:	Tok t-bane i dag	Tok ikke t-bane i dag	Sum
Tok buss i dag	T-bane og buss	Buss, men ikke t-bane	Alle som tok buss
Tok ikke buss i dag	T-bane men ikke buss	Ingen	Alle som ikke tok buss
Sum	Alle som tok t-bane	Alle som ikke tok t-bane	Hele klassen

Oppgave 19

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. En av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer	1	3	
Sum	4	6	

Siv skal trekke en bukse fra skapet.

- Bestem sannsynligheten for at buksen hun trekker, er svart.
- Gitt at buksen er blå, bestem sannsynligheten for at buksen ikke passer.

Oppgave 20

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

- Hvis vi trekker en elev, hva er sannsynligheten for at eleven ikke drikker kaffe?
- Gitt at eleven drikker kaffe, hva er sannsynligheten for at eleven er en jente?

Oppgave 21

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller Spania.

Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell

	Har vært i USA	Har ikke vært i USA	SUM
Har vært i Spania			
Har ikke vært i Spania			
SUM			

- Hvis vi trekker en tilfeldig elev, hva er sannsynligheten for at denne har vært i USA men ikke i Spania?
- Vi velger oss to elever. Hva er sannsynligheten for at begge elevene har vært i USA, men ikke i Spania?

Oppgave 22

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50 % leser papiraviser, og 2 % leser ikke aviser

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i krysstabellen nedenfor.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne personen ikke leser papiraviser

Oppgave 23

En klasse på 20 elever planlegger sommerferien.

- 16 har fått sommerjobb
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.

Vi velger oss to elever som skal på ferie. Bestem sannsynligheten for at begge også har sommerjobb.

Oppgave 24

Velg en eksamensoppgave hvor du skal løse oppgaven ved hjelp av en krysstabell.

Lekse:
Løsning:
Kommentar lærer:

Oppgave 17

En klasse har 28 elever. Av dem har 12 elever biologi og 8 har kjemi. 4 elever har både biologi og kjemi.

- Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.
- Systematiser opplysningene ovenfor i et Venn-diagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra denne klassen.

- Finn sannsynligheten for at denne eleven har biologi.
- Finn sannsynligheten for at eleven har biologi eller kjemi. (Se siste linje i eksempel 4.)
- Det viser seg at den valgte eleven har biologi. Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har kjemi?

4. Sannsynlighetsregning når utfallene ikke er like sannsynlige

4.1. Innledning

Svært ofte i praktisk sannsynlighetsregning er alle utfallene ikke like sannsynlige. I noen tilfelle må vi da selv finne sannsynligheter for utfall ved å regne ut relative frekvenser. I andre tilfelle får vi *oppgitt* slike sannsynligheter som er funnet ved forsøk. Disse sannsynlighetene skal så gjerne brukes til å regne ut sannsynligheter for ulike hendelser.

4.2. Bruk av produktsetningen og addisjonssetningen

Eksempel 9

Hvis mor og far begge har brune øyne, er sannsynligheten for at et barn har brune øyne lik 0,75. Sannsynligheten for at øynene er blå, er 0,25. Paret får fire barn.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fire barna får brune øyne?

Ifølge produktsetningen har vi:

$$P(\text{alle fire har brune øyne}) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,75^4 = 0,316.$$

Dette betyr at hvis vi undersøker mange firebarnsfamilier med brunøyde foreldre, vil alle fire barna ha brune øyne i omtrent 31,6 % av familiene.

b) Hva er sannsynligheten for at de to første er brunøyde og de to siste er blåøyde?

Sannsynligheten for at de to første barna er brunøyde og de to siste er blåøyde, er

$$P(\text{brun, brun, blå, blå}) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,035$$

De to utfallene (brun, brun, brun, brun) og (brun, brun, blå, blå) av det sammensatte forsøket er altså ikke like sannsynlige.

Oppgave 18

Det har vist seg at sannsynligheten for at et nyfødt barn er en gutt ikke er helt den samme som sannsynligheten for at det er ei jente. Sannsynlighetene er $P(\text{gutt})=0,514$ og $P(\text{jente}) = 0,486$.

a) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er gutter.

b) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er jenter.

Oppgave 19

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,8. Vi sår fem frø.

- Hva er sannsynligheten for at alle fem frøene spirer?
- Hva er sannsynligheten for at ingen av dem spirer?

Eksempel 10

Jonas sykler til skolen. På veien passerer han to lyskryss. Etter mange passeringer har han funnet ut at sannsynligheten for at han får grønt lys i første krysset er 0,6, og sannsynligheten for at han får grønt lys i andre krysset er 0,3.

- Hva er sannsynligheten for at han får *rødt* lys i første krysset?

Fordi det bare er to mulige utfall må vi ha at $P(\text{grønt}) + P(\text{rødt}) = 1$.

Da er $P(\text{rødt}) = 1 - P(\text{grønt}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

- Hva er sannsynligheten for å få rødt i begge kryssene?

Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{rødt i første og rødt i andre}) = P(\text{rødt i første}) \cdot P(\text{rødt i andre}) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$$

- Hva er sannsynligheten for å få grønt i begge kryssene?

$$P(\text{grønt i første og grønt i andre}) = P(\text{grønt i første}) \cdot P(\text{grønt i andre}) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$$

- Hva er sannsynligheten for å få rødt i nøyaktig ett av kryssene?

Her må vi bruke både addisjonssetningen og produktsetningen.

$$\begin{aligned} P(\text{ett grønt og ett rødt}) &= P(\text{rødt i første og grønt i andre} \textit{ eller } \text{grønt i første og rødt i andre}) = \\ &= P(\text{rødt i første og grønt i andre}) + P(\text{grønt i første og rødt i andre}) = \\ &= 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,12 + 0,42 = 0,54. \end{aligned}$$

Legg merke til at summen av sannsynlighetene i b, c og d er lik 1. Hvorfor må det være slik?

Oppgave 20

Per og Kari kommer ofte for sent til første time. Etter at det har gått noen måneder av skoleåret, har klassens ekspert i sannsynlighetsregning funnet ut at sannsynligheten for at Per kommer for sent er 0,23, og sannsynligheten for at Kari kommer for sent er 0,18. Per og Kari kjenner ikke hverandre, og kommer ikke med samme buss, slik at det at Per kommer for sent ikke påvirker sannsynligheten for at Kari kommer for sent.

- Hva er sannsynligheten for at Per kommer *tidsnok* en bestemt dag?
- Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en bestemt dag?
- Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem kommer tidsnok en bestemt dag?
- Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en hel skoleuke (fem dager)?



4.3. Oppgaver med sannsynlighet minst én

Eksempel 11

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,7. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av frøene spirer?

Sannsynligheten for at et bestemt frø ikke skal spire blir $1 - 0,7 = 0,3$.

Produktsetningen gir da

$$P(\text{ingen spirer}) = 0,3^5 = 0,002.$$

b) Hva er sannsynligheten for at minst ett av frøene spirer?

At “minst ett” spirer betyr at ett eller flere frø spirer. Denne sannsynligheten kan vi regne ut ved å legge sammen de fem sannsynlighetene for at 1, 2, 3, 4 og 5 spirer, men dette er mye arbeid og vanskelig. Det er mye lettere hvis vi deler alle mulige utfall i to hendelser istedenfor i seks, nemlig “ingen frø spirer” og “minst ett frø spirer”. Fordi disse to hendelsene dekker alle muligheter, må vi ha

$$P(\text{ingen frø spirer}) + P(\text{minst ett frø spirer}) = 1$$

Derfor har vi

$$P(\text{minst ett frø spirer}) = 1 - P(\text{ingen frø spirer}) = 1 - 0,002 = 0,998 = 99,8 \%$$

Oppgave 21

Sannsynligheten for at Per kommer for sent til skolen en tilfeldig dag er 0,23.

- a) Hva er sannsynligheten for at han kommer for sent både onsdag, torsdag og fredag?
b) Hva er sannsynligheten for at han kommer *tidsnok* minst én av disse tre dagene?

Oppgave 22

I en kommune stemte 48 % på et av de “rødgrønne” partiene. Vi velger tilfeldig ut fem av de som stemte. Hva er sannsynligheten for at minst én av disse velgerne stemte “rødgrønt”?

Eksamensoppgaver

E1

(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

I en twistpose er det 30 twistbiter. Per liker 18 av disse. Vi trekker tilfeldig én twistbit fra posen.

1) Finn sannsynligheten for at Per liker denne twistbiten.

Sannsynligheten for at Ola liker en tilfeldig valgt twistbit fra posen, er 0,4.

2) Hvor mange av twistbitene i posen liker Ola?

E2

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

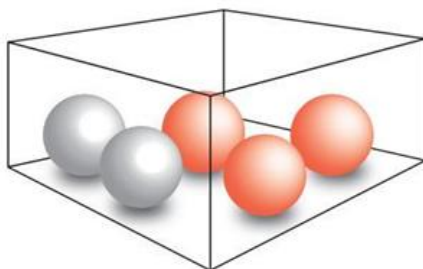
Hva er mest sannsynlig å få?

- en sekser når du kaster én terning
- to like når du kaster to terninger



E3

(Eksamen 1P vår 2013, Del 1)



I en eske er det tre røde og to blå kuler. Sondre trekker tilfeldig to av kulene.

- Bestem sannsynligheten for at han trekker to røde kuler.
- Bestem sannsynligheten for at de to kulene han trekker, har samme farge.

E4

(Eksamen 1P høst 2011, Del 1)



Eva har én pakke blåbærgelé, to pakker kiwigelé, to pakker sitrongelé og tre pakker bringebærgelé.

Hun tar tilfeldig to pakker gelé.

- 1) Hva er sannsynligheten for at den første pakken hun tar, er kiwigelé?
- 2) Hva er sannsynligheten for at hun tar to pakker kiwigelé?
- 3) Hva er sannsynligheten for at hun tar én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé?

E5

(Eksamen 1P vår 2012, Del 2)



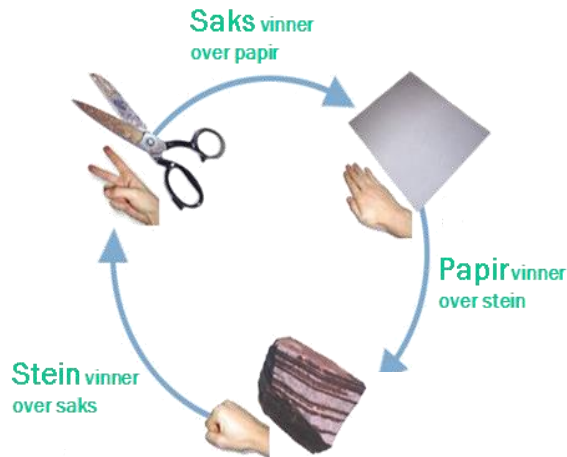
Karen har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker i en skuff. En dag tar hun tilfeldig to sokker fra skuffen.

- a) Bestem sannsynligheten for at hun tar to rosa sokker.
- b) Bestem sannsynligheten for at hun tar én rosa sokk og én sokk i en annen farge.
- c) 🤔 Bestem sannsynligheten for at hun tar to sokker med samme farge.

E6

(Eksamen 1P vår 2011, Del 2) 🤔

“Stein – saks- papir” er en konkurranse mellom to personer. Hver person bestemmer seg for enten stein, saks eller papir, og begge viser så samtidig, ved å bruke den ene hånden, hva de har valgt. Se figuren nedenfor.



Reglene er slik:

- Saks vinner over papir.
- Papir vinner over stein.
- Stein vinner over saks.

Dersom begge velger det samme (for eksempel stein), blir det uavgjort.

Bård og Lars skal spille “Stein- saks- papir”. Ett mulig utfall kan da for eksempel bli at Bård velger Stein og Lars velger papir.

- a) Lag en oversikt som viser alle de ni mulige utfallene når Bård og Lars spiller “Stein- saks- papir” en gang.

La B bety seier til Bård, U avgjort og L seier til Lars.

- b) Forklar at sannsynligheten for at Bård vinner, $P(B)$, er $1/3$.

Bård og Lars skal spille “Stein- saks- papir” tre ganger. Et mulig resultat er da BUL, som betyr at Lars vinner første gang, at det blir uavgjort andre gang, og at Lars vinner tredje gang.

- c) Hvor mange ulike resultater kan vi få når Bård og Lars spiller tre ganger?

- d) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner minst to av de tre gangene?

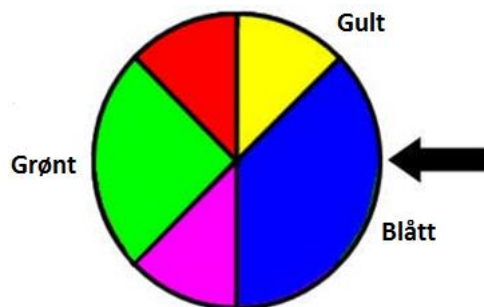
Når to personer spiller “Stein- saks- papir”, er vinneren den som vinner flest av tre ganger. Dersom begge vinner like mange ganger, blir det uavgjort.

- e) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner?

E7

(Eksamen vår 2010, Del 1)

Figuren til høyre viser et lykkehjul.



- 1) Lise snurrer hjulet én gang. Hva er sannsynligheten for at pilen peker på enten blått eller grønt felt når hjulet stopper?
- 2) Lotte snurrer hjulet to ganger. Hva er sannsynligheten for at pilen peker én gang på gult felt og én gang på grønt felt?

E8

(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

En undersøkelse har vist at 20 % av alle syklister i en by sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig to syklister fra denne byen.

- a) Bestem sannsynligheten for at begge sykler uten lys i mørket.
- b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig én av dem sykler uten lys i mørket.

E9

(Eksamen 1P høst 2016, Del 1)

I en eske er det fire blå og fire røde nisser. Tenk deg at du skal ta tre nisser tilfeldig fra esken. Du skal ta én nisse av gangen, og du skal sette dem på en rekke fra venstre mot høyre.

- a) Bestem sannsynligheten for at rekken vil bli som vist på bildet nedenfor.



- b) Bestem sannsynligheten for at det vil bli én blå og to røde nisser i rekken.
- c) Bestem sannsynligheten for at det vil bli minst én blå nisse i rekken.

E10

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 2)

I en klasse er det 22 elever. 12 av elevene har førerkort. 14 av elevene har bil. 4 elever har bil, men ikke førerkort.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krystabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har førerkort og bil.

Vi velger tilfeldig en elev som har førerkort.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har bil.

E11

(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. Én av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tall i de hvite rutene.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum			

Siv tar tilfeldig én bukse fra skapet.

b) Bestem sannsynligheten for at buksen passer.

Siv har tatt en bukse som passer.

c) Bestem sannsynligheten for at denne buksen er blå.

E12

(Eksamen 2P-Y høsten 2013, Del 2)

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tallene i de hvite rutene.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven drikker kaffe.

En elev fra klassen drikker kaffe.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven er ei jente.

E13

(Eksamen 2P-Y vår 2013)

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller i Spania.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et Venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har vært både i USA og Spania.

Vi velger tilfeldig en elev som ikke har vært i USA.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven har vært i Spania.

E14

(Eksamen 1P høst 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 25 elever. 12 av elevene har valgt internasjonal engelsk neste skoleår.

14 av elevene har valgt sosialkunnskap. 4 elever har verken valgt internasjonal engelsk eller sosialkunnskap.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har valgt både internasjonal engelsk og sosialkunnskap.

Vi velger tilfeldig en elev som har valgt sosialkunnskap.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har valgt internasjonal engelsk.

E15

(Eksamen 1P vår 2011, Del 1)

De 20 elevene i klasse 1A planlegger sommerferien.

- 16 elever har fått sommerjobb.
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

1) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

2) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klasse 1A skal på ferie.

E16

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 20 elever. 15 av elevene spiller fotball, og 10 spiller håndball. Én elev spiller verken fotball eller håndball.

1) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Fra klassen velger vi tilfeldig én av elevene som spiller fotball.

2) Bestem sannsynligheten for at denne eleven i tillegg spiller håndball.

E17

(Eksamen 1P vår 2010, Del 2)

En kommune har kartlagt utdanningsnivået blant innbyggerne i aldersgruppen 30–39 år. Tabellen viser høyeste fullførte utdanning for disse innbyggerne.

	Kvinner	Menn	Totalt
Grunnskole	166	253	419
Videregående skole	385	654	1039
Universitet eller høyskole	517	493	1010
Totalt	1068	1400	2468

- a) Hvor mange personer i aldersgruppen 30–39 år bor det i kommunen?
- b) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person i gruppen bare har fullført grunnskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

- c) Hvor stor er sannsynligheten for at han ikke har fullført universitets- eller høyskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt kvinne og en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

- d) Hva er sannsynligheten for at begge to bare har fullført grunnskoleutdanning?

E18

(Eksamen 1P høst 2010, Del 2)

Fotballgruppa i et idrettslag ønsker seg en ny ballbinge. De gjennomfører en spørreundersøkelse for å finne ut hva medlemmene i idrettslaget mener om dette.

- Alle de 240 medlemmene i idrettslaget blir spurt.
- 45 % av medlemmene er kvinner.
- 63 av mennene ønsker ballbinge.
- Til sammen 110 av medlemmene ønsker ikke ballbinge.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk opplysningene ovenfor og fyll inn tallene som skal stå i de hvite feltene.

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge			
Ønsker ikke ballbinge			
Totalt			

b) Finn sannsynligheten for at et tilfeldig valgt medlem i idrettslaget ønsker ballbinge.

Et medlem blir valgt tilfeldig. Det viser seg at dette medlemmet ønsker ballbinge.

c) Finn sannsynligheten for at dette medlemmet er en mann.

E19

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2)

I klasse 1B er det 12 jenter og 15 gutter. 8 av jentene og 9 av guttene kjører moped til skolen.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi trekker tilfeldig en elev fra klassen.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke kjører moped?

Vi trekker tilfeldig en av elevene fra klassen som kjører moped.

c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en gutt?

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer for sent til første time, er 10 %.
Sannsynligheten for at en elev som ikke kjører moped kommer for sent til første time, er 5 %.
Vi antar at elevene kommer for sent uavhengig av hverandre.

d) 🧐 Forklar at sannsynligheten for at alle jentene i klassen kommer presis til første time, er $0,9^8 \cdot 0,95^4$.

e) 🧐 Hva er sannsynligheten for at minst én elev i klassen kommer for sent til første time?

E20

(Eksamen vår 2013, Del 2) 🧐

I en klasse er det 30 elever. Klassen skal arrangere fest. Elevene må bestemme seg for om de vil ha taco eller pizza til middag, og om de vil ha sjokoladecake eller marsipankake til dessert.

Hver elev legger en lapp med hvilken middag de ønsker, i én krukke og en lapp med hvilken kake de ønsker, i en annen krukke.

Nedenfor ser du hvordan ønskene fordeler seg.

Taco	18		Sjokoladecake	6
Pizza	12		Marsipankake	24

For å avgjøre hva menyen skal være, trekker læreren tilfeldig en lapp fra hver krukke.

- a) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag.
- b) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag og marsipankake til dessert.

4 elever vil ha pizza og sjokoladecake.

Vi trekker tilfeldig ut en elev.

- c) Bestem sannsynligheten for at eleven vil ha taco og marsipankake.

Mål for kapittel 6. Statistikk



Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- planlegge, gjennomføre og vurdere statistiske undersøkelser
- beregne og drøfte sentralmål og spredningsmål
- beregne og gjøre rede for kumulativ og relativ frekvens, representere data i tabeller og diagrammer og drøfte ulike dataframstillinger og hvilket inntrykk de kan gi
- gruppere data og beregne sentralmål for et gruppert datamateriale
- bruke regneark i statistiske beregninger og presentasjoner

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- hvordan jeg setter data inn i en tabell med frekvens, relativfrekvens, kumulativ frekvens og relativ kumulativ frekvens
- hvordan jeg tegner diagrammer for hånd
- hvordan jeg tegner diagrammer i Excel
- hvordan jeg finner sentralmål: gjennomsnitt, typetall og median
- hvordan jeg finner spredningsmål: variasjonsbredde og standardavvik
- hvordan jeg kan finne sentralmål og spredningsmål ved hjelp av Excel
- hvordan jeg finner gjennomsnitt i et klassesdelt materiale
- hvordan jeg kan finne hvilken klasse medianen er i et klassesdelt materiale

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- hvilken informasjon relativ frekvens og kumulativ frekvens gir
- hva ulike sentralmål forteller om et datamateriale
- hva ulike spredningsmål forteller om et datamateriale
- hva vi mener med et klassesdelt materiale

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- argumentere rundt og sammenligne praktiske situasjoner ut i fra tallverdien til sentralmål og spredningsmål
- velge hensiktsmessige hjelpemidler når jeg jobber med statistiske beregninger

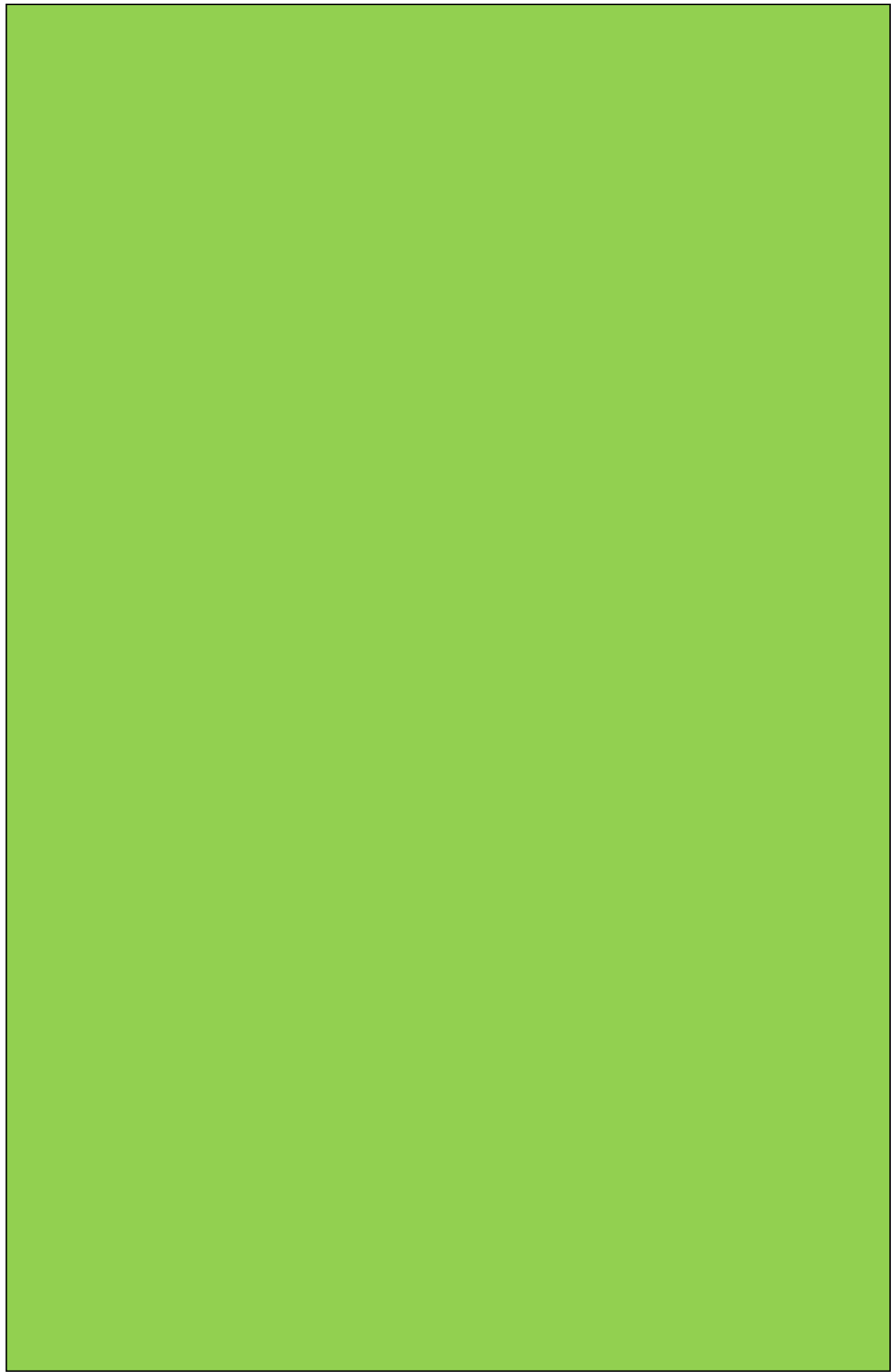
Utforskende oppgave – Statistisk undersøkelse

I denne oppgaven skal du gjøre en undersøkelse blant elevene på skolen.

Spør elever i kantina en dag om hvor mange filmer de ser i løpet av en uke.

Registrer svarene i tabellen under

Elev nr	Antall filmer	Elev nr	Antall filmer
1		26	
2		27	
3		28	
4		29	
5		30	
6		31	
7		32	
8		33	
9		34	
10		35	
11		36	
12		37	
13		38	
14		39	
15		40	
16		41	
17		42	
18		43	
19		44	
20		45	
21		46	
--		--	



1. Hva er statistikk?

Statistikk handler om å trekke informasjon ut av et *datamateriale* og å framstille materialet på oversiktlige måter. Et datamateriale består av mange tall, og hvert tall kaller vi gjerne en *observasjon*. Eksempler på datamateriale:

- Standpunktkarakterene til alle elevene i 2P som var oppe til eksamen
- Høydene til alle som er på militærsesjon et år
- Antall mål en bestemt fotballspiller har scoret i hver kamp han har spilt
- Maksimumstemperaturen på Blindern hver dag i 2013

Vi bruker karakterene i to 2P-grupper med tilsammen 50 elever som eksempel:

2 3 1 3 3 5 1 2 2 4 6 2 2 1 2 3 1 2 4 4 5 2 2 3 3 1 2 4 2 5 4 4 1 2 3 2 2 3 1 5 4 2 1 5 2
3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut. Vi framstiller derfor tallene i en *frekvenstabell* og som et *diagram*.

2. Frekvenstabeller

En *frekvenstabell* viser hvor mange ganger hver dataverdi forekommer. I datamaterialet ovenfor er det seks dataverdier (de seks mulige karakterene), og det er 10 elever som har fått karakteren 3. Vi sier at *frekvensen* til karakteren 3 er lik 10. Et annet ord for frekvens er *hyppighet*.

Frekvenstabellen blir slik:

Karakter	Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1

Vi bør regne ut summen av alle seks frekvensene og sjekke at den blir lik antall observasjoner (her 50).

Ofte er det mer opplysende å finne ut hvor stor *del* av datamaterialet hver frekvens utgjør. Det oppgir vi i prosent og kaller det *relativ frekvens*. Her er et eksempel på utregning:

$$\text{Relativ frekvens for karakteren 4: } \frac{8}{50} = 0,16 = 16 \%$$

Her er tabellen en gang til hvor vi har tatt med relative frekvenser:

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens
1	9	18 %
2	17	34 %
3	10	20 %
4	8	16 %
5	5	10 %
6	1	2 %

Sjekk at summen av de relative frekvensene blir 100 %.

Tabellen under er utvidet slik at den også viser *kumulativ frekvens* og *relativ kumulativ frekvens*. Ordet kumulativ betyr “oppsamlet”.

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	18 %	9	18 %
2	17	34 %	26	52 %
3	10	20 %	36	72 %
4	8	16 %	44	88 %
5	5	10 %	49	98 %
6	1	2 %	50	100 %

Dette betyr for eksempel at 36 av de 50 elevene fikk 3 eller dårligere og at dette utgjør 72 % av elevene.

Oppgave 1

Løs denne oppgaven uten kalkulator.

Noen elever ble spurt om hvor mange Pcer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Framstill disse dataene i en tabell som viser frekvenser, kumulative frekvenser, relative frekvenser og relative kumulative frekvenser.

3. Diagrammer

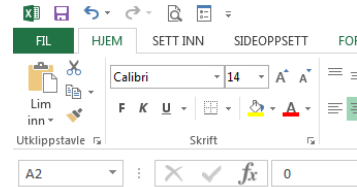
3.1 Søylediagram

Tallene i en frekvenstabell kan vi også framstille i et *diagram*. Det er mest aktuelt å gjøre dette i del 2 - oppgaver, og da kan vi bruke regnearket Excel. Men du bør også kunne tegne et diagram på papir i del 1.

Det er noen små forskjeller på menyer og kommandoer mellom Excel på Windows og Excel på Mac. Teksten beskriver Windows-versjonen. Hvis du bruker Mac får du et ark av læreren som beskriver forskjellene på de to versjonene.

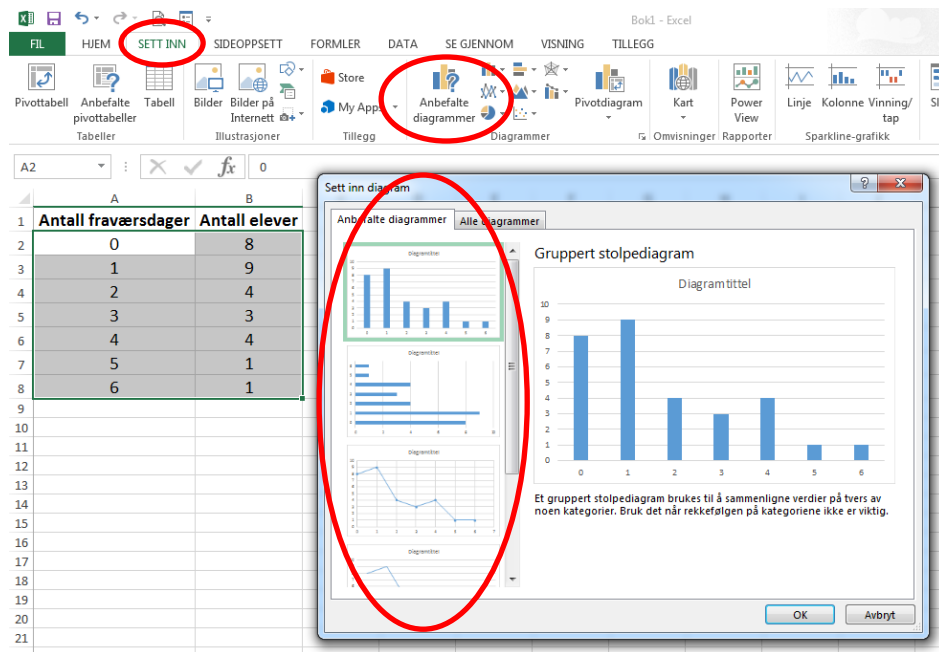
Vi bruker en tabell over elevfravær som eksempel:

Legg inn dataene som du vil lage søyle-diagram av i Excel. Merk ut med pekeplate eller mus dataområdet. Ikke ta med eventuell overskrift.



	A	B
1	Antall fraværsdager	Antall elever
2	0	8
3	1	9
4	2	4
5	3	3
6	4	4
7	5	1
8	6	1
9		
10		

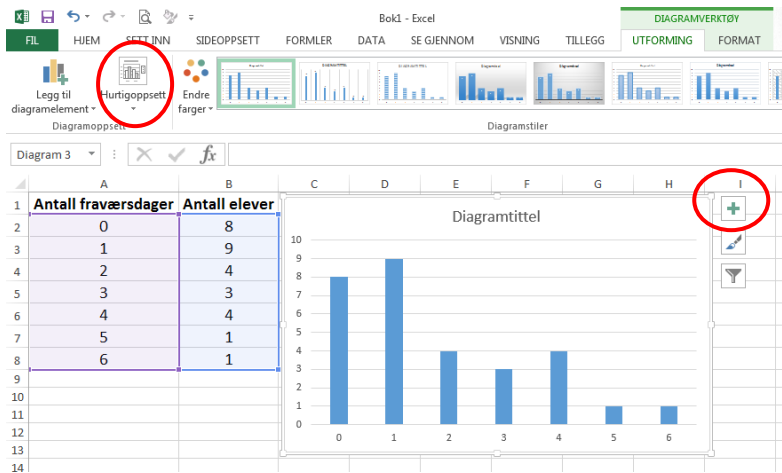
Velg fanen *Sett inn* og *Anbefalte diagrammer*. I nytt vindu velg ønsket diagram og klikk ok:



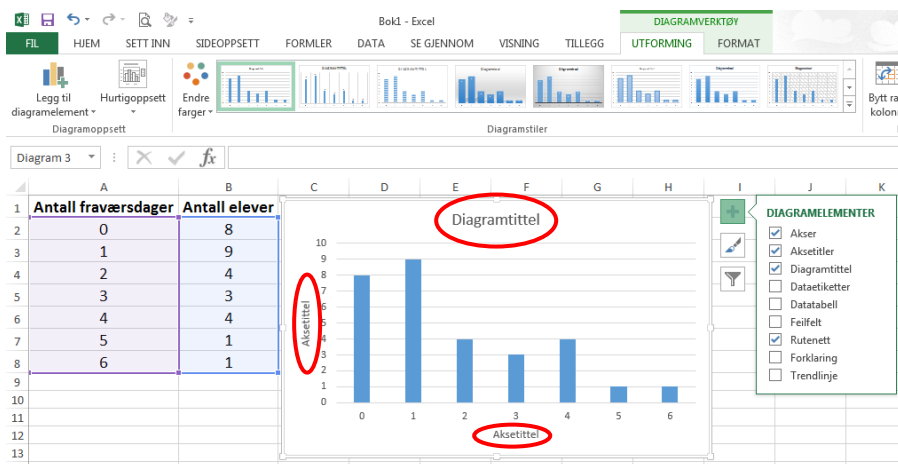
The screenshot shows the Excel interface with the 'SETT INN' tab selected on the ribbon. The 'Anbefalte diagrammer' button is also highlighted. A dialog box titled 'Sett inn diagram' is open, showing a preview of a grouped bar chart. The dialog box has two tabs: 'Anbefalte diagrammer' and 'Alle diagrammer'. The 'Anbefalte diagrammer' tab is selected, and a 'Gruppert stolpediagram' is chosen. The dialog box shows a preview of the grouped bar chart with the following data: 0 days of absence (8 students), 1 day (9 students), 2 days (4 students), 3 days (3 students), 4 days (4 students), 5 days (1 student), and 6 days (1 student). The dialog box also has a text box for 'Diagramtittel' and a note: 'Et gruppert stolpediagram brukes til å sammenligne verdier på tvers av noen kategorier. Bruk det når rekkefølgen på kategoriene ikke er viktig.' The 'OK' button is highlighted.

Formatering av diagrammet, diagramtittel og aksetitler:

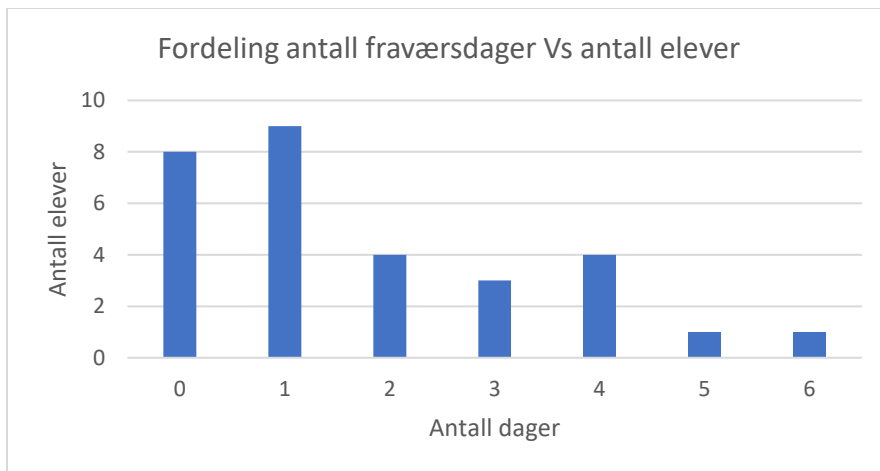
Velg enten fanen *hurtigoppsett* eller + tegnet til høyre på diagram vinduet.



Skriv inn ønsket tekst inn i feltene *diagramtittel* og *aksetittel*:



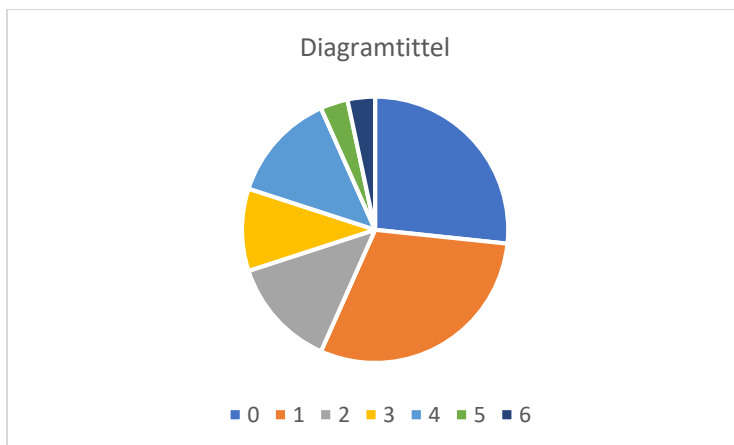
Diagrammet ferdig:



Av og til vil du lage diagrammer hvor det er mer enn en kolonne for hver dataverdi. Et eksempel kan være fraværet i flere klasser som skal sammenlignes. Da merker du bare ut alle kolonnene det skal lages søyler av. Resten blir som før.

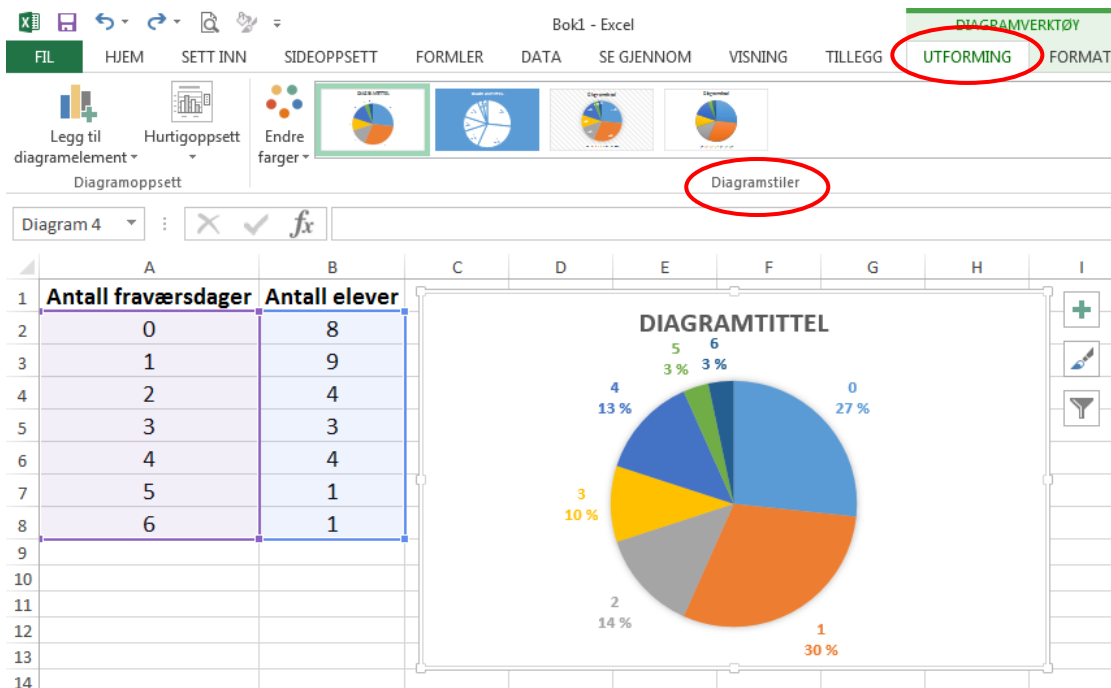
3.2 Sektordiagram

I mange tilfelle hvor man ikke har for mange dataverdier, er det vanlig å lage et *sektor-diagram* (populært kalt "kakediagram"). Vi går fram på samme måte som for et stolpediagram, men velger *Sektor* istedenfor *Stolpe*. Med tallene fra forrige eksempel får vi da dette diagrammet:

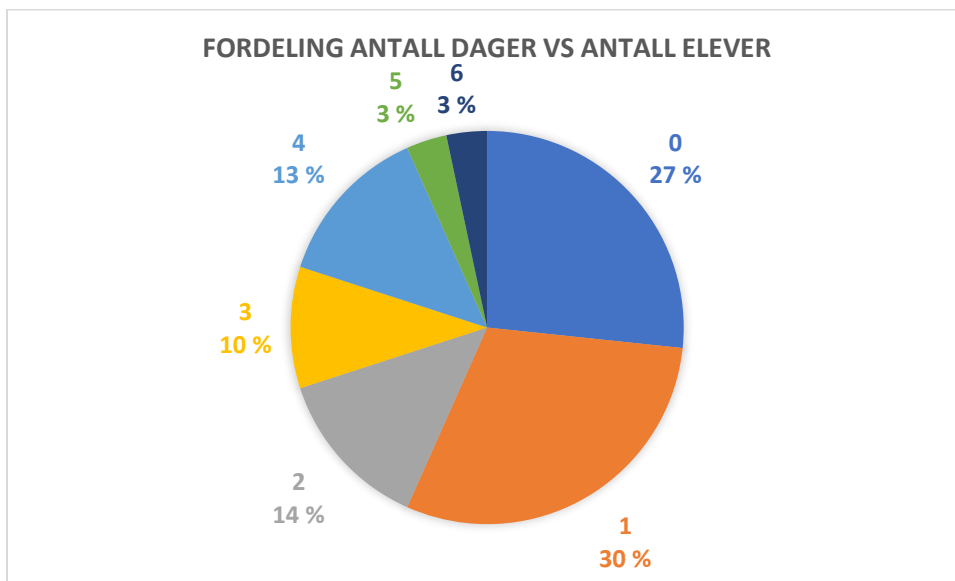


Det er en sektor for hver av de sju verdiene til antall fraværsdager. Disse verdiene er fargekodet, og koden står til høyre. I svart-hvitt er det vanskelig å se hva som er hva.

Vise den relative frekvensen i prosent for hver av sektorene. Velg fanen *utforming* og velg et av *diagramstilene*:



Til slutt skriver du inn en passende diagramtittel.



Det er mulig å lage mye “pynt” på diagrammene. Ikke bruk tid på det, i hvert fall ikke på prøver!

Et diagram skriver du ut på vanlig måte etter å ha klikket på det. Da får du bare med diagrammet, ikke hele regnearket.

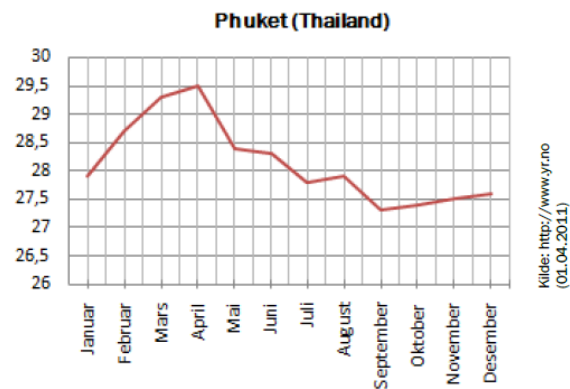
Oppgave 2

Framstill frekvenstabellen i oppgave 1 som et søylediagram og som et sektordiagram.

3.3 Linjediagram

Linjediagrammer brukes nesten bare for å vise hvordan noe utvikler seg over tid. Det betyr at på vannrett akse har vi som regel timer, dager, uker, måneder eller år.

I Excel lager du et linjediagram på samme måte som et stolpediagram.





3.4 Tegne sektordiagram for hånd

I del 1 kan du hende at du blir bedt om å tegne et sektordiagram på papir. Da vil det bare være noen få sektorer, og det vil være tall som skal være mulig å håndtere uten å være veldig god i hoderegning.

For å tegne et bra sektordiagram trenger du passer, gradskive og linjal.

Eksempel 1

En del mennesker ble spurt om de var fornøyd med regjeringen. 60 % svarte “ja”, 30 % svarte “nei” og 10 % svarte “vet ikke”. (Dette er altså de relative frekvensene for dataverdiene.)

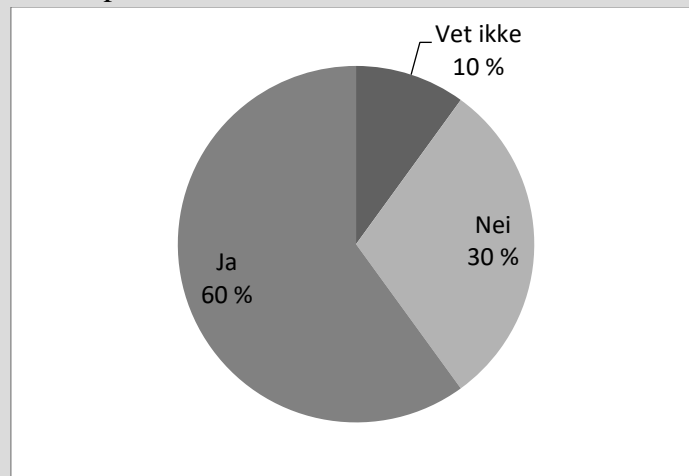
Vi vil lage et sektordiagram som illustrerer svarene. Vi regner da ut hvor mange grader hver av de tre sektorene må fylle. Hele sirkelen utgjør 360° .

Ja-sektoren må fylle $360^\circ \cdot 0,6 = 216^\circ$.

Nei-sektoren må fylle $360^\circ \cdot 0,3 = 108^\circ$.

Vet ikke-sektoren må fylle $360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$.

Vi lager en litt stor sirkel med passer og bruker gradskive til å lage de tre sektorene med riktig gradtall. Til slutt skriver vi passende tekst i hver sektor. Resultatet skal være omtrent slik:



Oppgave 3

To klasser på 60 elever skal ha aktivitetsdag. 12 elever ønsker langrenn, 22 slalåm, 18 aking og 8 fottur. Lag et sektordiagram på papir (og uten kalkulator) som illustrerer denne svarfordelingen.

Tips: Legg merke til at $360/60 = 6$. En elev svarer altså til 6 grader.

Utfyllingsoppgave – Diagrammer

I denne oppgaven skal vi utforske bruk av ulike diagrammer og se hvordan vi kan tegne dem for hånd og i Excel

Oppgave 1

På eksamen kommer det ofte oppgaver hvor du skal tegne et «hensiktsmessig» diagram.

Fyll inn tabellen under slik at du får en oversikt over de ulike diagramtypene og når det er hensiktsmessig å bruke dem

Diagramtype	Skisse av diagramtypen	Når bruker vi denne diagramtypen?
Stolpediagram (søylediagram)		
Sektordiagram (kakediagram)		

Linjediagram (kurvedigram)		
-----------------------------------	--	--

Oppgave 2

Karakter	Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1

Tabellen viser karakterfordelingen på en matematikkeksamen på en skole.

- Hvorfor vil sektordiagram kunne være hensiktsmessig å bruke her?
- Kunne man brukt et stolpediagram istedenfor? Begrunn svaret
- Hvorfor vil ikke et linjediagram være hensiktsmessig i denne situasjonen?

d) Tegn et sektordiagram i Excel

(Lim inn Excelbildet her)

e) Fyll ut tabellen og tegn sektordiagrammet for hånd

Karakter	Frekvens	Gradtall
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Oppgave 3

Antall fraværsdager	Antall elever
0	8
1	9
2	4
3	3
4	4
7	1
9	1
10	1
11	1
12	1
15	1

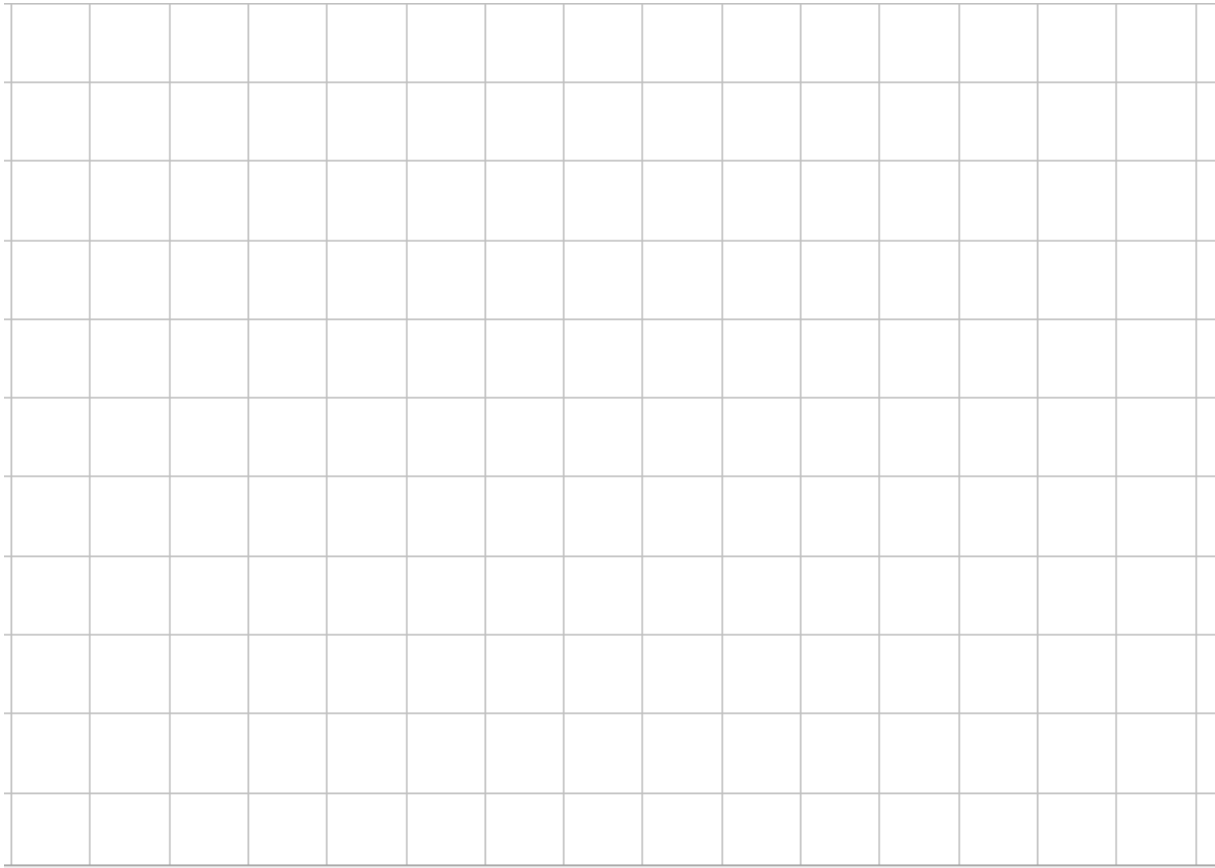
Tabellen viser fraværsdager for en klasse på Vg2.

- a) Hvorfor er det ikke hensiktsmessig å bruke et sektordiagram her?

- b) Hvorfor er stolpediagram det mest hensiktsmessige?

- c) Hva må du være oppmerksom på her når du skal tegne stolpediagrammet?

d) Tegn diagrammet for hånd.



e) Tegn diagrammet i Excel.

(Lim inn Excelbildet her)

Oppgave 4

År	Antall kamper
1986	1
1987	2
1988	4
1989	10
1990	9
1991	6
1992	4
1993	9
1994	11
1995	11
1996	4

Tabellen viser antall spilte landskamper for en fotballspiller i perioden 1986-1996.

- a) Hvorfor er et linjediagram mest hensiktsmessig å bruke her?

- b) Tegn et linjediagram for hånd

c) Tegn et linjediagram i Excel.

(Lim inn Excelbildet her)

Oppgave 5

I media kan vi av og til finne diagrammer som er ikke sier noe feil, men som fremstiller data på en måte som kan misforstås eller gi feil inntrykk. Kan du finne et slikt eksempel og lime inn her?

Hvorfor tror du diagrammet er laget på denne måten?

4. Sentralmål

Et *sentralmål* er et tall som viser hovedtendensen i et datamateriale. De vanligste sentralmålene er *gjennomsnitt*, *median* og *typetall*.

4.1 Gjennomsnitt

Vi finner *gjennomsnittet* av et datamateriale ved å legge sammen alle observasjonene og dividere med antall observasjoner.

Eksempel 2

Høydene til 10 gutter (i cm) er 187, 182, 175, 184, 173, 180, 182, 177, 171, 186.

Vi regner ut summen av høydene: $187 + 182 + 175 + 184 + 173 + 180 + 182 + 177 + 171 + 186 = 1797$.

Gjennomsnittet er $1797 \text{ cm} / 10 = 179,7 \text{ cm}$.

Oppgave 4

Noen elever ble spurt om hvor mange PCer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Finn gjennomsnittlig antall "datadingser" i disse familiene.

Oppgave 5



- Kan en gjennomsnittshøyde være større enn *alle* høydene som er brukt for å regne ut gjennomsnittet?
- Kan *alle* høydene være lik gjennomsnittshøyden?

Eksempel 3

Hvis datamaterialet er satt i en frekvenstabell, finner vi gjennomsnittet slik:

Karakter	Frekvens	Karakter * Frekvens
1	9	9
2	17	34
3	10	30
4	8	32
5	5	25
6	1	6
	Sum = 50	Sum = 136

Dette viser at summen av alle 50 karakterene er 136.

Gjennomsnittskarakteren er $136 / 50 = 2,72$

Oppgave 6

Taiba spiller håndball. Hun har laget en tabell som viser antall mål hun har scoret i kampene. Tabellen viser for eksempel at i 5 av kampene har hun scoret 2 mål i hver kamp. Frekvensene er her antall kamper hvor hun har scoret 0 mål, 1 mål, osv.

Antall mål	Antall kamper
0	2
1	3
2	5
3	7
4	8
5	6
6	2

- Hvor mange kamper har hun spilt?
- Lag en ekstra kolonne og finn ut hvor mange mål hun har scoret tilsammen på disse kampene.
- Hvor mange mål har hun scoret i gjennomsnitt per kamp?

4.2 Median

Medianen i et datamateriale er den midterste verdien når materialet er sortert i stigende rekkefølge.

Eksempel 4

Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5 og 1?

Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2**, 4, 5. Da ser vi at medianen er 2.

Eksempel 5

Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5, 1 og 3?

Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2, 3**, 4, 5. Da ser vi at det er ikke noe tall nøyaktig i midten. I slike tilfelle er medianen definert som gjennomsnittet av de to verdiene nærmest

midten. Derfor er medianen $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Oppgave 7

a) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall bøker noen tilfeldige elever hadde lest i 2012: 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3.

b) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall fraværsdager for noen elever: 2, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2, 0.

Hvis datamaterialet er ordnet i en frekvenstabell, er medianen den minste dataverdien hvor den relative kumulative frekvensen er større enn eller lik 50 %.

Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	9	18 %
2	17	26	52 %
3	10	36	72 %
4	8	44	88 %
5	5	49	98 %
6	1	50	100 %

Her er medianen lik 2.

4.3 Typetall

Typetallet i et datamateriale er den dataverdien som forekommer flest ganger (“er typisk for”) i datamaterialet.

Eksempel 6

Typetallet i karaktereksemplet ovenfor er 2, fordi det er flest elever som har fått 2 (17 elever)

Oppgave 8

Finn typetallet i datamaterialet i oppgave 1.

5. Spredningsmål

Et *spredningsmål* er et tall som sier noe om hvor stor spredning det er på tallene i et datamateriale.

5.1 Variasjonsbredde

Det enkleste spredningsmålet er *variasjonsbredde*.

Variasjonsbredden i et datamateriale er forskjellen mellom største og minste verdi i materialet.

Eksempel 7

I oppgave 7a hadde vi tallene 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3, som var antall leste bøker i 2012. Største verdien er 7 bøker og minste er 0 bøker. Variasjonsbredden er 7 bøker – 0 bøker = 7 bøker.

Oppgave 9

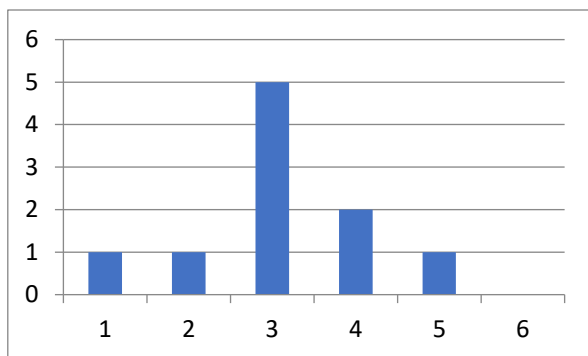
Åtte jenter løper 100 m. Tidene i sekunder er 15,6 17,8 14,4 18,2 16,3 14,9 15,8 17,1. Finn variasjonsbredden.

5.2 Standardavvik

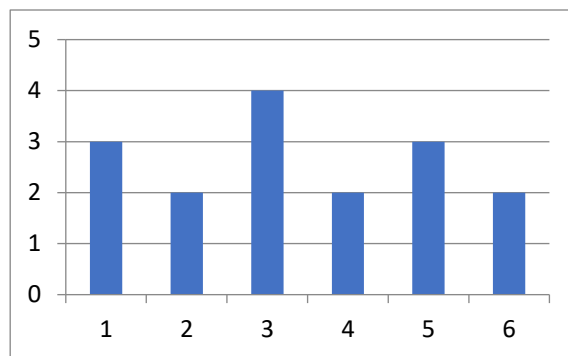
Ofte gir ikke variasjonsbredden et godt bilde av spredningen. For eksempel kan vi tenke oss en 2P-gruppe hvor nesten alle elevene fikk karakter 3, mens en elev fikk 1 og en fikk 6. I en annen gruppe fikk to elever 1, fire fikk 2, fem fikk 3, fire fikk 4, tre fikk 5 og to fikk 6. Variasjonsbredden er 5 i begge gruppene, men det er likevel naturlig å si at det er mer spredning i karakterene i den andre gruppen.

Standardavvik er et spredningsmål som sier noe om hvor “bred” en fordeling er. Det venstre diagrammet nedenfor viser et datamateriale med lite standardavvik og det høyre et med stort standardavvik.

Den nøyaktige definisjonen av standardavvik er litt vanskelig, så vi tar den ikke med her. Heldigvis er det bare aktuelt å beregne standardavvik i del 2-oppgaver, og da kan vi gjøre det ved å bruke regnearket Excel slik det er forklart i neste delkapittel.



Lite standardavvik.



Stort standardavvik

6. Beregning av sentralmål og spredningsmål i Excel

De sentral- og spredningsmål i 2P som kan være aktuelle å beregne i Excel er gjennomsnitt, median, typetall og standardavvik. Men husk at gjennomsnitt og median med enkle tall må du også kunne beregne uten hjelpemidler.

Viktig: alle formler og kommandoer må begynne med likhetstegn (=).

- I. Klikk på cellen som skal inneholde sentralmålet og sett inn et likhetstegn (=).
- II. Skriv inn ønsket kommando med parentestegn: **Gjennomsnitt(dataområde)** eller **Median(dataområde)** eller **Modus(dataområde)**, modus er det samme som typetall eller **STDAV.P.(dataområde)**, standardavvik.
- III. Bruk musepekeren og marker dataområdet til kommandoen og trykk *Enter*.

	A	B	C	D	E
1	Antall fraværsdager	Antall elever			
2	0	8			
3	1	9			
4	2	4			
5	3	3			
6	4	4			
7	5	1			
8	6	1			
9	Gjennomsnit	=GJENNOMSNI			

- Ikonet f_x på verktøylinjen er en hurtigfunksjon. Da får du likhetstegn inn i cellen. Og tilgang på alle Excel kommandoer i et nytt vindu.
- Vi kan bytte mellom å se formler og beregninger i Excel ved å taste (**Ctrl** + `). Apostrofe = (Shift + tasten bak pluss) **eller** Velg *fane-formler* deretter *verktøyikon-Vise formel*.
- På en prøve må du legge ved utskrift av både resultater og formler med navn på rader og på kolonner.

Eksempel 8

Vi har målt høyden til 7 jenter. Høydene i cm er: 177,164, 170, 168, 172, 161, 169.

Bildet under viser hvordan vi finner medianen, gjennomsnittet og standardavviket til disse høydene i Excel. Til venstre ser vi formlene som må skrives inn og til høyre hvordan resultatene blir.

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	= ANTALL(B3:B9)
12	Gjennomsnitt:	=GJENNOMSNIITT(B3:B9)
13	Standardavvik:	=STDAV.P(B3:B9)
14	Median:	=MEDIAN(B3:B9)

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	7
12	Gjennomsnitt:	168,7
13	Standardavvik:	4,8
14	Median:	169

Formelen for antall i B11 trenger vi egentlig ikke her. Den er bare tatt med for å vise at Excel lett kan telle opp antall celler i et område; her antall høyder.

7. 🧐 **Klassedelt (gruppedelt) materiale**

Når det er mange ulike dataverdier er det upraktisk å ta med alle i en frekvenstabell. Et eksempel er inntektsstatistikk hvor inntekten kan ha tusenvis av forskjellige verdier. Da grupperer vi verdiene i *klasser (grupper)* og finner frekvensen for hver klasse.

Her er et eksempel på en klassedelt frekvenstabell som viser inntekten til lønsmottakerne i en tenkt kommune. Inntektene er oppgitt i tusener av kroner.

Inntekt	Frekvens
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45
	$N = 14211$

Dette betyr for eksempel at det var 678 lønsmottakere som hadde en inntekt *fra og med* 100 000 kr og *inntil* 200 000. En inntekt på nøyaktig 200 000 kr faller i neste klasse, nemlig [200, 300>. Nederst i frekvenstabellen har vi regnet ut det totale antall lønsmottagere (N).

Legg merke til alle klassene ikke behøver å ha samme bredde. Bredden til klassen [300, 400> er 100, mens klassebredden til [1000, 5000> er 4000.

7.1 Gjennomsnitt i klassesdelt materiale

Fordi vi ikke kjenner alle verdiene i et klassesdelt materiale, går det ikke an å finne en *nøyaktig* verdi for gjennomsnittet. Det beste vi kan gjøre er å anta at *alle* verdiene i en klasse er lik verdien *midt i klassen*. Da utvider vi tabellen og regner slik:

Inntekt	Frekvens f	Midtpunkt x_m	$x_m \cdot f$
[0, 100>	467	50	23350
[100, 200>	678	150	101700
[200, 300>	1490	250	372500
[300, 400>	2653	350	928550
[400, 500>	3785	450	1703250
[500, 750>	4106	625	2566250
[750, 1000>	987	875	863625
[1000, 5000>	45	3000	135000
	$N = 14211$		Sum = 6694225

Gjennomsnittet blir da $6694225 : 14211 = 471$, som tilsvarer 471 000 kr.



7.2 Median i klassedelt materiale

Heller ikke medianen er det mulig å finne nøyaktig i et klassedelt materiale. For å finne en tilnærmet verdi lager vi først en tabell som viser kumulativ frekvens:

Inntekt	Frekvens	Kumulativ frekvens
[0, 100>	467	467
[100, 200>	678	1145
[200, 300>	1490	2635
[300, 400>	2653	5288
[400, 500>	3785	9073
[500, 750>	4106	13179
[750, 1000>	987	14166
[1000, 5000>	45	14211
	$N = 14211$	

Hvis alle inntektene var ordnet i stigende rekkefølge, ville medianen være inntekten på plass nr. $14212 : 2 = 7106$. Vi ser av kolonnen med kumulativ frekvens at denne inntekten ligger i klassen [400,500>. For å beregne en best mulig verdi for medianen må vi anta at alle de 3785 inntektene i denne klassen ligger *jevnt fordelt* innenfor klassen.

Eksamensoppgaver statistikk

E1

(Eksamen vår 2010, Del 1)

I fjor kom alle elevene i en matematikkgruppe opp til eksamen i 2P. De oppnådde disse resultatene:

1, 6, 5, 4, 3, 2, 5, 5, 2, 4, 2, 2, 6, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 5

- 1) Lag en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens.
- 2) Finn medianen og gjennomsnittet for datamaterialet.

E2

(Eksamen høst 2016, Del 2, 6p)

Klasse 2A har hatt matematikkprøve. De 15 elevene i klassen fikk disse poengsummene:

31	8	24	9	24	14	26	13
26	4	13	27	12	20	28	

- a) Bestem gjennomsnittet og medianen for poengsummene.

Påstand 1: Gjennomsnittet er 7,0 % lavere enn medianen.
Påstand 2: Medianen er 7,5 % høyere enn gjennomsnittet.

- b) Avgjør om hver av påstandene ovenfor er riktige.
- c) Bestem standardavviket for poengsummene.

15 elever fra klasse 2B har hatt samme prøve. I denne klassen ble gjennomsnittet for poengsummene 18,6 og standardavviket 5,9.

- d) Hva kan du si om poengsummene i 2B sammenliknet med poengsummene i 2A?

E3

(Eksamen høst 2016, Del 1, 3p)

Tabellen nedenfor viser hvor mange poeng hver av de 30 elevene i en 2P-gruppe fikk på en matematikkprøve.

Poeng	Antall elever (frekvens)
[0, 5)	4
[5, 10)	12
[10, 15)	10
[15, 20)	0
[20, 25)	4

- a) Bestem gjennomsnittet for det klassedelte datamaterialet.

Per var en av elevene som hadde prøven. Han fikk 10 poeng og påstår at han var blant den beste halvdel av elevene.

- b) Kan Per bruke medianen for datamaterialet til å begrunne påstanden sin?

E4

(Eksamen vår 2011, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange mål som ble scoret i fotballkampene mellom Rosenborg og Brann i Eliteserien i årene fra 2005 til 2009:

5 5 0 4 3 5 2 0 2 2

- 1) Finn gjennomsnittet og medianen for dette datamaterialet.
- 2) Sett opp resultatene i en tabell. Tabellen skal vise frekvens og kumulativ frekvens.
- 3) Hva er den kumulative frekvensen for to mål, og hva betyr dette?

E5

(Eksamen vår 2016, Del 1)

Dato	Temperatur
01.03	2 °C
02.03	0 °C
03.03	-4 °C
04.03	-6 °C
05.03	2 °C
06.03	6 °C

Guro målte temperaturen utenfor hytta de første seks dagene i mars. Se tabellen ovenfor.

Bestem variasjonsbredden, gjennomsnittet og medianen for temperaturmålingene.

E6




(Eksamen høst 2016, Del 1, 4p)

Sondre solgte frukt og grønnsaker på torget 20 lørdager i løpet av 2016. Hver av de 20 lørdagene skrev han opp hvor mange kunder han hadde. Han laget også en tabell. Tabellen ser du nedenfor, men her mangler noen av tallene Sondre satte inn.

Antall kunder	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
[0, 50)		0,05	
[50, 100)			6
[100, 150)	8		
[150, 200)			20

- a) Tegn av tabellen ovenfor, og fyll inn tallene som mangler. Gjør beregninger eller forklar hvordan du tenker.

Nedenfor ser du listen der Sondre har skrevet opp hvor mange kunder han hadde hver av de 20 lørdagene. Tre av tallene er skjult under flekker.

116 100  125 185 125 150  60 75
 120 50 140 175  88 133 96 105 169

- b) Foreslå tre *mulige* tall som kan stå under de tre flekkene slik at de 20 verdiene ovenfor gir resultatene i tabellen.

E7

(Eksamen høst 2012, Del 1)

Alle som går på tur til Pollfjell, skriver navnet sitt i boka som ligger i postkassen på toppen av fjellet. Nedenfor ser du hvor mange som har skrevet seg inn i boka hver uke de 12 siste ukene.

6 12 20 4 10 15 5 12 8 12 18 10

Bestem gjennomsnittet, medianen, typetallet og variasjonsbredden for dette datamaterialet.

E8

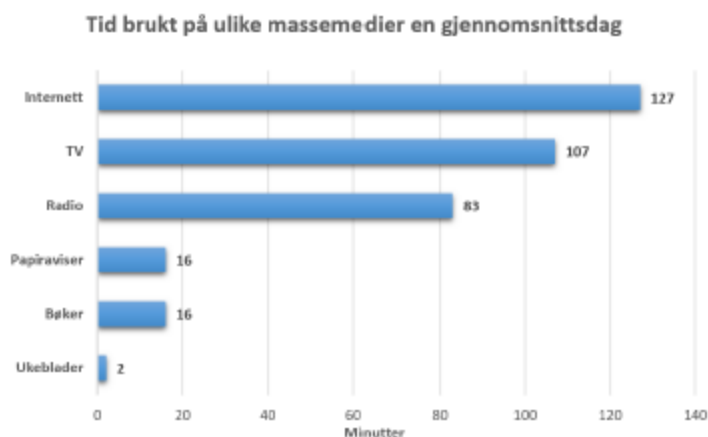
(Eksamen vår 2012, Del 1)

Antall datamaskiner	Antall elever
1	3
2	4
3	3
4	6
5	2
6	2

20 elever blir spurt om hvor mange datamaskiner de har hjemme. Se tabellen ovenfor. Finn variasjonsbredden, typetallet, medianen og gjennomsnittet.

E9

(Eksamen høst 2016, Del 2, 2p)



Diagrammet ovenfor viser hvor mange minutter personer i Norge brukte på ulike massemedier en gjennomsnittsdag i 2015.

Lag et sektordiagram som viser hvor stor andel av tiden som ble brukt på hvert av de ulike massemediene.

E10

(Eksamen høst 2012, Del 2)

År	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Antall kamper per år	1	2	4	10	9	6	4	9	11	11	4
Antall mål per år	0	0	2	3	3	2	0	5	1	4	0

Tabellen ovenfor viser hvor mange landskamper Jan Åge Fjørtoft spilte, og hvor mange mål han skåret per år i perioden 1986–1996.

- a) Hvor mange mål skåret Fjørtoft i gjennomsnitt per kamp i denne perioden?
I hvilket år skåret han flest mål per kamp?
- b) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din, og fyll inn tallene som mangler.
Hva er den kumulative frekvensen for to mål per år, og hva forteller dette svaret?

Antall mål per år	Frekvens	Kumulativ frekvens
0		
1		
2		
3		
4		
5		

E11

(Eksamen vår 2013, Del 2)

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013	
Parti	Antall representanter
Arbeiderpartiet	64
Fremskrittspartiet	41
Høyre	30
Sosialistisk Venstreparti	11
Senterpartiet	11
Kristelig Folkeparti	10
Venstre	2

a) Lag et sektordiagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013		
Parti	Antall kvinner	Antall menn
Arbeiderpartiet	32	32
Fremskrittspartiet	10	31
Høyre	9	21
Sosialistisk Venstreparti	3	8
Senterpartiet	7	4
Kristelig Folkeparti	4	6
Venstre	2	0

b) Lag et passende diagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.


E12

(Eksamen høst 2008, Del 2)

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

- Finne gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.
- Finne variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.
-  Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

E13

(Eksamen høst 2010, Del 2)

I klasse 1A er det 12 jenter og 12 gutter. Nedenfor ser du hvor mange timer de bruker på lekser hver uke.

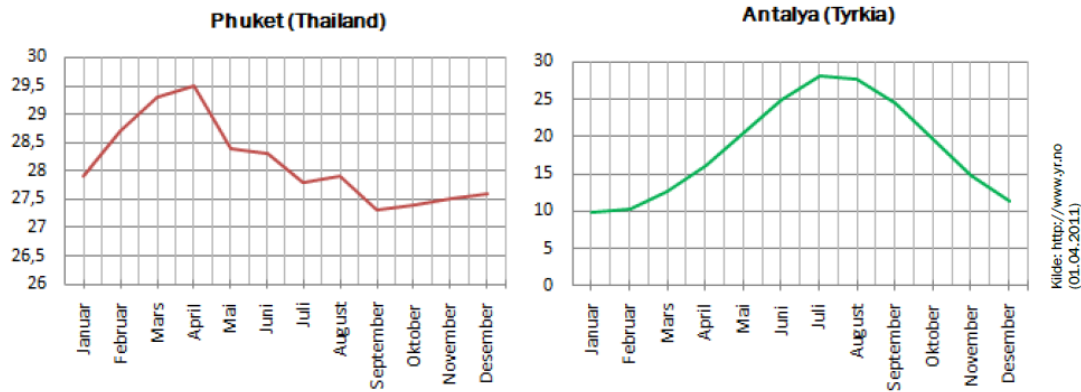
Jentene: 7, 5, 5, 7, 7, 6, 8, 8, 5, 4, 6, 10

Guttene: 2, 5, 6, 7, 9, 6, 4, 9, 12, 2, 13, 3

Bruk ulike sentral- og spredningsmål og gjør rede for hva dette datamaterialet viser om jentenes og guttenes arbeidsvaner i denne klassen.

E14

(Eksamen vår 2012, Del 2)




Ovenfor ser du linjediagram som viser gjennomsnittstemperaturen per måned ved to kjente feriesteder.

- Bruk diagrammene og lag en tabell som viser gjennomsnittstemperaturen per måned for hvert av de to stedene Phuket og Antalya.
- 1) Finn gjennomsnittstemperaturen per år for hvert av de to stedene.
 - 2) Finn standardavviket for temperaturene i a) for hvert av de to stedene.

Jon påstår at det er godt samsvar mellom diagrammene og resultatene fra b).

Asbjørn er enig, men mener at diagrammene lett kan tolkes feil.

-  Forklar hvorfor diagrammene lett kan tolkes feil. Hvordan kunne diagrammene vært laget for å unngå dette?

E15

(Eksamen vår 2010, Del 2)

År	Antall laks	Totalvekten av laksen (kg)	Gjennomsnittsvekten for laksen (kg)
2000	3447	14550	4,22
2001	5694	24218	4,25
2002	3142	1)	5,51
2003	4401	22425	5,10
2004	2928	17979	2)
2005	5783	28144	4,87
2006	6507	26695	4,10
2007	3555	21074	5,93
2008	4782	28903	6,04
2009	3916	24361	6,22

Tabellen ovenfor viser hvor mange laks, totalvekten av laksen og gjennomsnittsvekten for laksen som er fanget i elva Gaula i Sør-Trøndelag de siste ti årene.

- Hvilke tall skal stå i tabellfeltene som er merket 1) og 2)?
- Lag et passende diagram som viser hvor mange laks som er fanget i Gaula per år de siste ti årene.
- Finn gjennomsnittet av og standardavviket for totalvekten av laksen fanget i Gaula per år de siste ti årene.

E16

(Eksamen høst 2011, Del 2)

a) Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for tallmengden:

2 5 21 15 17 5 9 19 10 14 7 3 2 11 13

Vi dobler alle tallene i tallmengden og får:


4 10 42 30 34 10 18 38 20 28 14 6 4 22 26

b) Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for denne tallmengden.
Sammenlikn med resultatene fra a) og kommenter.

Berit får en idé og setter opp tabellen nedenfor.





















Tallmengde 1 15 tall	2	5	21	15	17	5	9	19	10	14	7	3	2	11	13
Tallmengde 2 De 15 tallene doblet	4	10	42	30	34	10	18	38	20	28	14	6	4	22	26
Tallmengde 3 De 15 tallene tredoblet	6	15	63	45	51	15	27	57	30	42	21	9	6	33	39
Tallmengde 4 De 15 tallene firedoblet	8	20	84	60	68	20	36	76	40	56	28	12	8	44	52

Hun beregner median, gjennomsnitt og standardavvik for hver av tallmengdene og påstår at hun har funnet regler som sier noe om hvordan medianen, gjennomsnittet og standardavviket endrer seg når tallene i en tallmengde dobles, tredobles, firedobles osv.

c)  Formuler disse reglene, og gi en begrunnelse for at de er riktige.

E17


(Eksamen høst 2012, Del 2)

Nr	Resultat	Utøver	Land	Verdensdel
1	8,47	Christian Reif	 Tyskland	Europa
2	8,46	Dwight Phillips	 USA	Nord-Amerika
3	8,40	Fabrice Lapierre	 Australia	Oceania
4	8,35	Alain Bailey	 Jamaica	Sør-Amerika
5	8,33	Chris Noffke	 Australia	Oceania
6	8,30	Irving Saladino	 Panama	Sør-Amerika
7	8,27	Ndiss Kaba Badji	 Senegal	Afrika
8	8,27	Eusebio Cáceres	 Spania	Europa
9	8,25	Pavel Shalin	 Russland	Europa
10	8,24	Salim Sdiri	 Frankrike	Europa
11	8,24	Kafétien Gomis	 Frankrike	Europa
12	8,23	Godfrey Khotso Mokoena	 Sør-Afrika	Afrika
13	8,23	Christopher Tomlinson	 England	Europa
14	8,22	Tommi Evilä	 Finland	Europa
15	8,22	Tyrone Smith	 Bermuda	Sør-Amerika
16	8,22	Greg Rutherford	 England	Europa
17	8,21	Morten Jensen	 Danmark	Europa
18	8,20	Wilfredo Martínez	 Cuba	Sør-Amerika
19	8,20	Trevell Quinley	 USA	Nord-Amerika
20	8,19	Christian Taylor	 USA	Nord-Amerika

Ovenfor ser du verdensstatistikken fra 2010 for øvelsen lengdehopp for menn.

- Lag et sektordiagram som viser hvordan de 20 utøverne fordeler seg mellom de ulike verdensdelene.
- Finn gjennomsnittslengden og standardavviket for resultatene til de 20 utøverne.

Sondre har funnet resultatene for utøverne som står som nummer 21–40 på verdensstatistikken. Standardavviket for resultatene til disse 20 utøverne er tilnærmet lik 0,0258.

-  Hva forteller dette om resultatene til utøverne som står som nummer 21–40, i forhold til resultatene til de 20 beste utøverne?

E18

Eksamen vår 2012, Del 2)

En dag gjorde klasse 1A et forsøk i naturfagtimen. Seks elever slapp hver sin stålkule fra 1 m høyde og målte tiden det tok før kule traff bakken. Resultatene ser du i tabellen nedenfor.



Elev	1	2	3	4	5	6
Tid (sekunder)	0,46	0,45	0,47	0,44	0,52	0,46

a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for måleresultatene.

Klassen la merke til at elev nummer 5 målte en større falltid enn de andre. Mange mente at dette resultatet måtte skyldes målefeil, og at det derfor burde forkastes.

Da ga fysikklærer Strøm dem denne regelen:

«Når vi har seks målinger, kan vi forkaste et måleresultat dersom det ligger mer enn 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet.»

- b)  Finn ut om måleresultatet til elev nummer 5 kan forkastes dersom vi bruker regelen ovenfor.
- c)  Bestem gjennomsnittet og standardavviket for de fem andre måleresultatene. Hvordan har gjennomsnitt og standardavvik endret seg? Virker dette rimelig? Forklar.

E19

(Eksamen vår 2013, Del 1)

En kveld kjørte en taxisjåfør 10 turer.

Nedenfor ser du hvor mange passasjerer han hadde med på hver av turene.

1 5 3 3 5 2 1 4 1 2

- a) Bestem medianen, gjennomsnittet og typetallet for dette datamaterialet.
- b) Sett opp en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens for antall passasjerer på turene.

E20









(Eksamen vår 2013, Del 2)

Tabellene nedenfor viser resultatene for de åtte beste utøverne på 1500 m skøyter for menn under OL i 1968 og under OL i 2010.

OL 1968

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Kees Verkerk	 Nederland	123,4
2	Ivar Eriksen	 Norge	125,0
	Ard Schenk	 Nederland	125,0
4	Magne Thomassen	 Norge	125,1
5	Johnny Höglin	 Sverige	125,2
6	Bjørn Tveter	 Norge	125,2
7	Svein-Erik Stiansen	 Norge	125,5
8	Eduard Matusevitsj	 Sovjetunionen	126,1

OL 2010

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Mark Tuitert	 Nederland	105,57
2	Shani Davis	 USA	106,10
3	Håvard Bøkko	 Norge	106,13
4	Ivan Skobrev	 Russland	106,42
5	Mo Tae-bum	 Korea	106,47
6	Chad Hedrick	 USA	106,69
7	Simon Kuipers	 Nederland	106,76
8	Mikael Flygind Larsen	 Norge	106,77

- Hvor mange prosent sank vinnertiden med fra 1968 til 2010?
- Bestem gjennomsnittstiden for de åtte beste i 1968 og for de åtte beste i 2010.
- Bestem standardavviket for de to tallmaterialene.
Hvorfor er standardavviket større i 1968 enn i 2010?

E21

(Eksamen vår 2011, Del 1)

I en 2P-gruppe er det 10 elever. Læreren har undersøkt hvor mye tid elevene bruker på matematikkleksene i løpet av en uke.

Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Antall minutter	Antall elever
$[0,30)$	1
$[30,60)$	3
$[60,120)$	5
$[120,240)$	1

Finn gjennomsnittet for dette grupperte datamaterialet.

E22

(Eksamen høst 2012, Del 1)

Tabellen nedenfor viser hvor mye penger hver av de 10 elevene i en 2P-gruppe bruker i kantinen i løpet av en uke.


Kroner	Antall elever
$[0,50)$	1
$[50,100)$	5
$[100,150)$	1
$[150,200)$	3


Gjør beregninger og avgjør om gjennomsnittet er større enn medianen for dette datamaterialet.



E23

(Eksamen vår 2011, Del 2)

Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene.

Fartsgrense 50 km/h 	
Fart	Antall biler
[45,50)	25
[50,55)	26
[55,60)	23
[60,65)	3
[65,70)	2
[70,75)	1

Fartsgrense 80 km/h 	
Fart	Antall biler
[70,75)	7
[75,80)	43
[80,85)	17
[85,90)	8
[90,95)	0
[95,125)	5

- Presenter dataene fra tabellene ovenfor i hvert sitt stolpediagram.
-  Hvor mange prosent av bilførerne kjører 10 % eller mer over fartsgrensen i hver av de to kontrollene?
- Finn gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.
- Hvor mange prosent over fartsgrensen er gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene?
-  Bruk svarene i a), b), c) og d) til å vurdere om bilførerne kjører mest lovlydig på veistrekningen med fartsgrense 50 km/h eller på veistrekningen med fartsgrense 80 km/h.

E24

(Eksamen vår 2012, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange tekstmeldinger hver av de 20 elevene i en 2P-gruppe sendte i løpet av en uke:

4 88 69 21 66 8 16 57 86 21 37 22 78 27 28 44 42 71 82 95

- 1) Grupper datamaterialet i klasser med bredde 20. La den første klassen starte med 0.

I hvilken klasse ligger medianen?

- 2) Finn gjennomsnittet i det klassesdelte materialet.

E25

(Eksamen vår 2013, Del 1)

Tabellen nedenfor viser inntektene til personene i et borettslag.

Inntekt (i 1000 kroner)	Antall personer
[300, 400)	20
[400, 500)	20
[500, 700)	10

Bestem gjennomsnittsinntekten til personene i borettslaget.

E26

(Eksamen høst 2011, Del 1)

Politiet har gjennomført en farts kontroll i 30 km-sonen utenfor skolen.

Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Fart (km/h)	Antall biler
[20,30)	20
[30,40)	20
[40,50)	10



Finn gjennomsnittsfarten.

E27

(Eksamen vår 2008, Del 2)

Et nytt leilighetskompleks, UTSIKTEN, er fylt opp med nye beboere. En oversikt viser følgende aldersfordeling:

Alder	0–19 år	20–39 år	40–59 år	60–79 år
Frekvens	17	29	51	23

- Hvor mange personer bor i leilighetskomplekset?
- Tegn et søylediagram som viser aldersfordelingen.
- Forklar hvorfor medianen må ligge i intervallet 40–59 år.
- Regn ut gjennomsnittsalderen ut fra det klassesdelte materialet.

E28

(Eksamen 2P-Y vår 2015, Del 1)

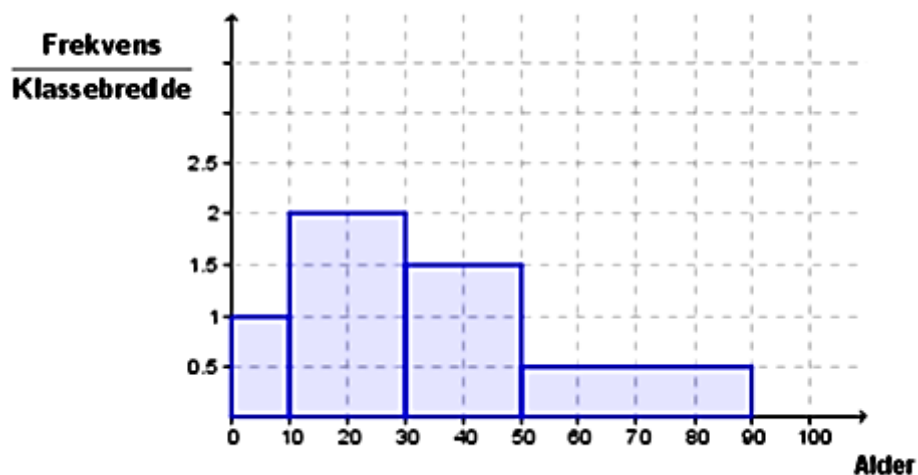
Alder	Frekvens
[20,30)	10
[30,40)	20
[40,50)	30
[50,70)	40

Tabellen over viser aldersfordelingen for lærerne ved en skole.

- Bestem gjennomsnittsalderen for lærerne ved skolen.
- Lag et histogram som viser aldersfordelingen for lærerne.
- Utvid tabellen med en kolonne som viser relativ frekvens og en kolonne som viser kumulativ frekvens

E29

(Eksamen 2P-Y høst 2014, Del 1)



Histogrammet ovenfor viser aldersfordelingen blant de besøkende på en kinoforestilling.

- Forklar at det var 30 besøkende mellom 30 og 50 år.
- Hvor mange prosent av de besøkende var mellom 0 og 10 år?
- Bestem gjennomsnittsalderen blant de besøkende.

Mål for kapittel 7. Potenser og tall på standardform



Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- regne med potenser og tall på standardform med positive og negative eksponenter, og bruke dette i praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva grunntall og eksponent er
- hva eksponenten forteller meg om grunntallet
- hvordan jeg multipliserer og dividerer potenser med samme grunntall
- hvordan jeg kan bruke regnereglene for potenser
- hvordan jeg skriver hele tall og desimaltall på standardform
- hvordan jeg skriver tall på standardform som heltall og desimaltall
- hvordan jeg multipliserer og dividerer tall på standardform i ferdig oppsatte regnestykker

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hva som er hensikten med å bruke potenser i utregninger
- hva som er forskjellen på en positiv og en negativ eksponent
- hvorfor potenser må ha samme grunntall når vi bruker potensregnereglene
- hvorfor det er hensiktsmessig å skrive tall på standardform
- hva som kjennetegner et tall på standardform
- sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon med 10-ere og tall på standardform

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- bruke potenser i utregninger knyttet til praktiske situasjoner
- bruke tall på standardform i utregninger knyttet til praktiske situasjoner
- sette opp et regnestykke med tall på standardform ut i fra en tekst

1. Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

Eksempel 1

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

$$x \cdot x = x^2$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*.

I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.

Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på 3^2 og 32!

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2 , som betyr $3 \cdot 3$ og er lik 9, med $3 \cdot 2$, som er lik 6!

Oppgave 1

Regn ut potensene uten kalkulator:

$$4^2, 2^3, 5^2, (-3)^2, 5^1$$

Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$$2,5^2, 12^3$$

2. Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks. $3^2 \cdot 3^4$?

Det er ikke meningen at du skal regne ut hvilket tall dette blir, men skrive svaret som en ny potens.

Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli $2 + 4 = 6$ tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.

Eksempel 2

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$

$$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$$

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

Oppgave 3

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $6^2 \cdot 6^3$ b) $2^6 \cdot 2^4$ c) $10 \cdot 10^3$ d) $a^4 \cdot a^2$

3. Dividere potenser med samme grunntall

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen $5 - 2 = 3$ firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Oppgave 4

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $\frac{8^5}{8^3}$ b) $\frac{6^5}{6}$ c) $\frac{5^4}{5^3}$ d) $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

Eksempel 5

$$\frac{4^2 \cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

Oppgave 5

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^4}$ b) $\frac{3^6}{3^4 \cdot 3}$ c) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^2}$

4. Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$(10^2)^3$ er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva $(10^2)^3$ egentlig betyr, ser vi at

$$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ og $(10^2)^3 = 10^6$!

Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a) $(6^3)^4$ b) $(8^5)^2$ c) $(x^3)^2$ d) $(a^2)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

Eksempel 6

$$(3^4)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{(2^3)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a) $(4^2)^3 \cdot 4$ b) $\frac{(5^2)^3}{5^2}$ c) $\frac{(a^2)^3 \cdot a^2}{a^5}$

5. Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken $\frac{5^4}{5^4}$ er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar 5^0 bety 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

$$a^0 = 1 \text{ for alle tall } a.$$

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 2^0 er lik 0!! $2^0 = 1!$ Derimot er $2 \cdot 0$ lik 0.

Oppgave 8

Hvor mye er a) 10^0 b) 6^0 c) $(-1)^0$?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken $\frac{5^4}{5^6}$? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} \quad (\text{du er vel klar over at } 4 - 6 = -2 \text{ og ikke } 2?)$$

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken $\frac{5^4}{5^6}$ kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at 5^{-2} skal bety $\frac{1}{5^2}$. På samme måte har vi også:

Eksempel 7

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-n} betyr $\frac{1}{a^n}$ for alle verdier av a (unntatt 0) og n .

Advarsel: Du må heretter aldri tro at $10^{-2} = -20$ eller at $2^{-3} = -6$ eller $-8!!$

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.



Eksempel 8

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$$

$$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$$

$$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = (2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.



a) $\frac{1}{10^{-2}}$ b) $\frac{2^6}{5^{-3}}$ c) $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$ d) $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$

$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$

$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{-2 \cdot 3} = 10^{-6}$$

$$(x^3)^{-4} = x^{3 \cdot (-4)} = x^{-12}$$

Oppgave 10

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{3^6}{3^0}$ b) $5^{-1} \cdot 5^4$ c) $\frac{10^{-4}}{10^3}$ d) $\frac{10^4}{10^{-3}}$ e) $(2^{-4})^3$



6. Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$

$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$ b) $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

Eksempel 11

Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket $4 \cdot 2^3$ kan skrives som én potens. Men fordi $4 = 2^2$ går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $9 = 3^2$ og $27 = 3^3$.

Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.

a) $2^4 \cdot 4$ b) $8 \cdot 2^{-2}$ c) $\frac{4}{2^{-3}}$ d) $9 \cdot 3^2$ e) $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivninger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

7. Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

Eksempel 12

I potensen $(2x)^3$ er grunntallet et produkt av faktorene 2 og x . Dette kan vi skrive uten parenteser slik:


$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3 x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a) $(3a)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $(a^2 b^{-1})^3$ d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Utforskende oppgave – Veldig store og veldig små tall

I denne oppgaven skal du utforske ulike måter å skrive veldig store og veldig små tall på.

1. Finn et stort tall f.eks. massen av jorden i kg, antall atomer i en vanndråpe, avstanden til Jupiter i km...
 - a) Hvordan vil du beskrive dette tallet på en forståelig måte for klassen?

 - b) Er det flere måter å beskrive tallet på? Sjekk med din læringspartner.

 - c) Diskuter i klassen hvilken beskrivelse som er enklest hvis man skal be en hel klasse skrive tallet.

2. Finn et veldig lite tall f.eks. vekten av et elektron i kg, størrelsen til et virus i meter...
 - a) Hvordan vil du beskrive dette tallet på en forståelig måte for klassen?

 - b) Er det flere måter å beskrive tallet på? Sjekk med din læringspartner.

 - c) Diskuter i klassen hvilken beskrivelse som er enklest hvis man skal be en hel klasse skrive tallet.

8. En smart måte å skrive store og små tall på

I blant annet naturvitenskap og økonomi dukker det ofte opp svært store eller svært små tall. For eksempel er avstanden fra jorda til sola 150 000 000 000 meter og massen til et elektron er 0,0000000000000000000000000000091 kg. Ved å bruke potenser av 10 kan vi skrive slike tall mye raskere og mer oversiktlig.

8.1 Tall som er større enn 1

Eksempel 1

$$100\ 000 = 1 \cdot 10^5$$

$$300\ 000 = 3 \cdot 10^5$$

$$340\ 000 = 3,4 \cdot 10^5$$

$$368\ 200 = 3,682 \cdot 10^5$$

Hvis du ikke med en gang ser at det blir slik, kan du tenke deg et komma bak første siffer i tallet du skal skrive om, og så telle antall siffer bak dette kommaet for å finne eksponenten i tierpotensen. Prøv!

Vi har her skrevet tallene på *standardform*. I praksis skriver vi sjelden tall som er mindre enn 1 million på standardform.

Et tall på standardform er et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en potens av 10.

Oppgave 14

Skriv tallene på standardform.

- a) 100 b) 10 000 c) 20 000 d) 21 000 e) 21 640 f) 820 000 000 g) fire millioner
h) 75 milliarder i) 12 j) 1 k) 6,4

Tallet $24 \cdot 10^4$ er ikke skrevet på standardform fordi 24 er større enn 10 (se definisjonen av standardform ovenfor). Skal det være på standardform, må det stå 2,4 foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$24 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10^5$$

Her er et annet eksempel på omskriving til standardform hvor vi bruker at $0,45 = 4,5 \cdot \frac{1}{10} = 4,5 \cdot 10^{-1}$:

$$0,45 \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^5$$

Oppgave 15

Skriv om tallene slik at de er på standardform.

- a) $60 \cdot 10^5$ b) $46 \cdot 10^3$ c) $450 \cdot 10^6$ d) $0,6 \cdot 10^5$ e) $0,055 \cdot 10^7$

Du må også kunne skrive tall som er på standardform om til vanlig form.

Eksempel 2

$$6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 1000 = 6000$$

$$6,7 \cdot 10^3 = 6,7 \cdot 1000 = 6700$$

$$8,01 \cdot 10^5 = 8,01 \cdot 100000 = 801000$$

Oppgave 16

Skriv disse tallene på vanlig form.

a) $2 \cdot 10^4$ b) $2,5 \cdot 10^4$ c) $6,8 \cdot 10^6$

8.2 Tall som er mindre enn 1

Du husker vel fra potensregningen at 10^{-2} betyr $\frac{1}{10^2}$?

Men $\frac{1}{10^2}$ kan vi også skrive som desimaltall:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

På samme måte har vi

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ (en null i desimaltallet)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \text{ (tre nuller i desimaltallet)}$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001 \text{ (seks nuller i desimaltallet)}$$

Derfor kan vi også skrive tall som er *mindre* enn 1 på standardform ved å bruke tierpotenser med *negativ* eksponent:

Eksempel 3

$$0,004 = 4 \cdot 10^{-3}$$

$$0,0046 = 4,6 \cdot 10^{-3}$$

$$0,00000582 = 5,82 \cdot 10^{-6}$$

$$0,5 = 5 \cdot 10^{-1}$$

Hvis du teller nullene i massen til vannmolekylet i starten av kapittelet vil du finne 1 null foran komma og 25 bak. Da kan vi skrive dette *vel*dig lite tallet mye mer oversiktlig:

$$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 03 = 3 \cdot 10^{-26}$$

Oppgave 17

Skriv disse tallene på standardform.

- a) 0,06 b) 0,067 c) 0,00005 d) 0,0000563 e) 0,25

Tallet $35 \cdot 10^{-4}$ er ikke skrevet på standardform fordi 35 er større enn 10. Skal det være på standardform, må det stå 3,5 foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$35 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10^{1+(-4)} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

Her er et annet eksempel:

$$0,4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1+(-5)} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Oppgave 18

Skriv disse tallene på standardform.

- a) $64 \cdot 10^{-3}$ b) $250 \cdot 10^{-8}$ c) $0,6 \cdot 10^{-4}$ d) $0,07 \cdot 10^{-10}$

9. Multiplikasjon og divisjon av tall på standardform

9.1 Multiplikasjon

Eksempel 4

Hvis vi skal regne ut $4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7}$ kan vi multiplisere 4 med 3 og 10^4 med 10^{-7} , slik:

$$4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} = 12 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

Legg merke til at vi til slutt skrev svaret på standardform.

Oppgave 19

Regn ut og skriv svaret på standardform.

- a) $2,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ b) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$ c) $2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ d) $0,00008 \cdot 5000000$

9.2 Divisjon

Eksempel 5

Hvis vi skal regne ut $\frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}}$ må vi dividere 8 med 2 og 10^4 med 10^{-3} , slik:

$$\frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{4-(-3)} = 4 \cdot 10^{4+3} = 4 \cdot 10^7$$

To eksempler til:

$$\frac{2,4 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^6} = 0,8 \cdot 10^{8-6} = 0,8 \cdot 10^8 = 800$$

(2,4 : 3,0 er 0,8 fordi 24 : 3 = 8.)

$$\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{2,0 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \cdot 10^{-3-(-4)} = 9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3+4} = 9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = 9 \cdot 10^{-1+1} = 9 \cdot 10^0 = 9$$

10. Praktisk regning med tall på standardform

Her er noen eksempler på praktisk regning hvor det er lurt å regne med tallene på standardform.

Eksempel 6

Det årlige forbruket av vann på jorda er ca. $4,2 \cdot 10^{15}$ liter. Det er ca. $7 \cdot 10^9$ mennesker på jorda. Hvor mange liter vann blir dette per menneske? Skriv svaret på standardform.

$$\frac{4,2 \cdot 10^{15} \text{ L}}{7 \cdot 10^9 \text{ mennesker}} = 0,6 \cdot 10^{15-9} \text{ L/menneske} = 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 \text{ L/menneske} = 6 \cdot 10^5 \text{ L/menneske}$$

Eksempel 7

Et atom har en diameter på ca. 10^{-7} mm. Hvor mange atomer kan ligge etter hverandre på 1 mm?

$$\text{Svar: } \frac{1 \text{ mm}}{10^{-7} \text{ mm}} = 10^7 \text{ (ti millioner)}$$

Eksempel 8

Massen til et vannmolekyl er ca. $3 \cdot 10^{-26}$ kg. 1 liter vann har en masse på omtrent 1 kg. Hvor mange vannmolekyler er det i 1 liter vann?

$$\frac{1 \text{ kg}}{3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \approx 0,3 \cdot 10^{26} = 3 \cdot 10^{25}$$

Oppgave 20

De største harddiskene til en vanlig PC var i 2014 på 4 TB. 1TB = 1 Terabyte = 10^{12} byte. En lang bok uten bilder krever ca. 2 MB når den lagres som tekst. 1MB = 1 Megabyte = 10^6 byte. Hvor mange bøker er det plass til på den store harddisken?

Oppgave 21

- a) DNA-molekylene i en menneskecelle har en samlet lengde på ca. 0,05 m hvis de tenkes strukket helt ut. I et menneske er det ca. 10 000 milliarder celler. Hva blir den samlede lengden av alle DNA-molekylene i et menneske?
- b) Sammenlign svaret med avstanden fra jorda til sola, som er 150 millioner km.

Blandede oppgaver potenser og tall på standardform

B1

(Eksamen 2P høst 2008, Del 1)

Skriv uttrykkene så enkelt som mulig:

- a) $3 \cdot (31 - 29)^2 - (5 - 3^2)$
b) $(2^3)^3 \cdot (2^{-1})^3$

B2

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig: $\frac{2^8 \cdot 2^{-4}}{2^5}$.

B3

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut $5 - 2^4 \cdot (4 - 3)^3 \cdot 2^{-3}$

B4

(Eksamen 2P vår 2011, Del 1)

Regn ut

- a) $a^4 \cdot (a^2)^{-3} \cdot a^0$
b) 🤔 $\frac{2^{-3} \cdot 4^3}{8^2}$

B5

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Regn ut

- a) $8 \cdot 2^{-2}$
b) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

B6

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{(a^3)^{-2} \cdot a^5}{a^{-3} \cdot a^0}$$

B7

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret som et helt tall

a) $(2^3)^2 \cdot 2^0$

b) 🤔 $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^2$

B8

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Hvilken av de to brøkene A og B nedenfor har størst verdi?

A: $\frac{15 \cdot 5^{-1}}{2^2}$

B: $\frac{1}{6^{-2} \cdot 3 \cdot 15}$

B9

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $\frac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 3}{2 \cdot 3^{-1}}$

b) $a^3 + \frac{a^2 \cdot a^{-1}}{a^{-2}}$

B10

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Ordne disse brøkene i stigende rekkefølge (slik at den minste står først osv.).

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2, \frac{3^2}{2}, \frac{2}{3^{-2}}, \frac{2}{\sqrt{25}}$$

B11

(Eksamen 2P vår 2013, Del 2) 🤔

Petter vil sende en epost med en matematikkoppgave til to personer 1. januar. Anta at hver av personene sender e-posten videre til to nye personer dagen etter, at hver av de fire som da får den, også sender den videre til to nye personer dagen etter at de mottok den, og at eposten fortsetter å spres på samme måte i dagene framover.

- Hvor mange personer vil motta e-posten 6. januar?
- På hvilken dato vil antall mottatte eposter på én dag for første gang bli større enn en milliard?

B12

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1)

Skriv disse tallene på standardform: 1) 27 000 000 2) 0,000290

B13

(Eksamen 2P vår 2008, Del 1)

Skriv tallet $2,46 \cdot 10^{-4}$ som desimaltall

B14

(Eksamen 2P høst 2016, del 1, 1p)

Skriv tallene nedenfor på standardform

26,3 millioner

$16,5 \cdot 10^{-8}$

B15

(Eksamen 2P høst 2016, del 1, 1p)

Regn ut og skriv svaret som desimaltall

$$\frac{3,5 \cdot 10^8}{7,0 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^6}$$

B16

(Eksamen 2P vår 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig: $2,0 \cdot 10^6 \cdot 8,4 \cdot 10^4$

B17

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv tallene 32 000 000 og 0,000 678 på standardform.

B18

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{2,7 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^4}$$

B19

(Eksamen 2P høst 2010, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform: $6,0 \cdot 10^7 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}$

B20

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Skriv på standardform

1) 533 milliarder

2) 0,000 533

B21

(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{5,0 \cdot 10^5 \cdot 6,0 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^{-4}}$$

B22

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform: $0,0003 \cdot 0,00000015$

B23

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform: $0,075 \cdot 2000000$

B24

Regn ut $(4 \cdot 10^{-3})^2$ og skriv svaret på standardform.

B25

(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)

I Norge er det ca 5 millioner innbyggere. Det norske oljefondet er på ca 3000 milliarder kroner.

Tenk deg at oljefondet blir delt likt mellom innbyggerne i Norge.

Omtrent hvor mye ville hver innbygger fått?

Skriv svaret på standardform.

B26

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)



En fotball har en diameter på ca. 20 cm. Omkretsen til jorda ved ekvator er ca. 40 000 km.

Vi tenker oss at vi legger fotballer langs ekvator rundt hele jorda.

Omtrent hvor mange fotballer er det plass til?

Skriv svaret på standardform.

**B27**

(Eksamen 2P vår 2016, del 1)

Det er ca. 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 liter drikkevann hver dag.

Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret i standardform.



2018/2019