MATEMATIKK

NAVN:.....................

2P-Y

HELLERUD VGS

Noen formler det er lurt å kunne...		
Rektangel	$A = g \cdot h$	
Trekant	$A = \frac{g \cdot h}{2}$	
Sirkel	$A = \pi \cdot r^2$	
Prisme	$V = G \cdot h$	
Sylinder	$V = \pi\, r^2 h$	
Standardform	$a = \pm k \cdot 10^n$ $1 \leq k < 10$ og n er et helt tall	
Statistikk	$Gjennomsnitt = \frac{sum\ verdier}{antall\ observasjoner}$ $Søylehøyde\ histogram = \frac{frekvens}{klassebredde}$	
Sannsynlighet	Sannsynlighet ved systematiske opptellinger $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ når A og B er uavhengige	
Proporsjonalitet	Proporsjonale størrelser: $y = ax$ Omvendt proporsjonale størrelser: $y = \frac{k}{x}$	
Lineære funksjoner	$y = ax + b$	
Eksponentielle funksjoner	$y = a \cdot b^x$	
Polynomfunksjoner	$y = ax^2 + bx + c$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
Potensfunksjoner	$y = a \cdot x^b$	
Vekstfaktor	$økning = 1 + \frac{p}{100}$ $reduksjon = 1 - \frac{p}{100}$	
Potenser	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ $a^0 = 1$ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

Forord

Velkommen til Hellerud videregående skole, og gratulerer med valg av skole!

Læring består av to parter; en som ønsker å lære bort og en som ønsker å lære. Her på Hellerud vil du møte topp motiverte lærere som ønsker å hjelpe deg gjennom dette skoleåret slik at du kan få best mulig utbytte av undervisningen.

Imidlertid kan ingen av oss trylle. Skal vi kunne hjelpe deg til å oppnå best mulig resultat er det fire krav du må oppfylle. Du må:

- Møte til undervisning
- Møte presist
- Møte interessert
- Møte forberedt

Ønsker du å beholde karakteren din fra ungdomsskolen eller 1PY må du være forberedt på å jobbe hardt og seriøst med faget, men om du oppfyller dine krav er vi helt sikre på at vi sammen greier å nå målet ditt.

Denne boka dekker læreplanen i Matematikk 2P-Y. Stoffet og oppgavene er valgt ut med tanke på den type oppgaver som har vist seg å være ganske vanlige til eksamen i 2P.

Bakerst i hvert kapittel finner du eksamensoppgaver som kan løses hvis du behersker stoffet i dette og tidligere kapitler. Ønsker du høyere karakter enn 3 i faget må du jobbe med disse oppgavene. Fasit med utfyllende løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net.

Forord til 6. utgave:

I denne versjonen av boka har vi lagt inn en del innfyllingsoppgaver. Dette er fordi vi ønsker at boka skal være et nyttig arbeidsverktøy for deg, og et oppslagsverk som du kjenner godt. Ta godt vare på boka, du kommer til å få bruk for den.

Vi ønsker at du skal delta aktivt i timene. Derfor inneholder boka en del oppgaver hvor det du har tenkt er viktigere enn hvilket svar du har kommet frem til.

Fasit til oppgavene var ikke klare da boka ble sendt til trykking. Fasit til hvert enkelt kapittel blir publisert fortløpende på It's og på matematikk.net

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juli 2019

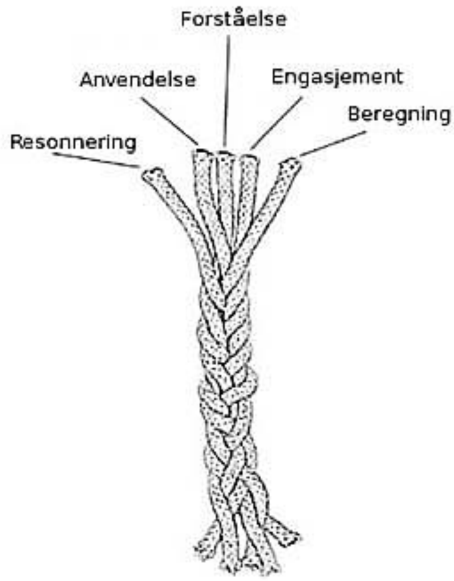
Forsiden er laget av Paulina Joanna Buba, fra fjorårets 3STM. Baksiden er laget av MK-lærer Christian Gruehagen.

Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner

2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer



Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

Jo Boalers 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå.**
   - Det er ikke sånn at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

2. **Å gjøre feil er verdifullt**
   - Feil gjør at hjernen din vokser.
     Det er bra å streve og gjøre feil

3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det du lurer på, og svar på andre sine spørsmål.
     Spør deg selv: Hvorfor er dette riktig?

4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre

5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, f.eks. ord, bilde, graf, funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

6. **Matematikktimene handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats

7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort.**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

Innhold

Kapittel 1. Prosentregning

Mål for Kapittel 1, Prosentregning.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- tolke og bruke formler som gjelder dagligliv og yrkesliv
- regne med forhold, prosent, prosentpoeng og vekstfaktor

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg regner prosent av en mengde
- ☐ hvordan jeg finner ny verdi når prosentavslaget er gitt
- ☐ hvordan jeg finner gammel verdi fra nedsatt verdi og oppgitt prosentavslag
- ☐ hva vekstfaktor er og hvordan vi bruker den til å regne med renter og verdier som strekker seg over lang tid

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvorfor prosent er et nyttig verktøy
- ☐ hvorfor jeg kan finne ny og original verdi ved å få oppgitt prosentsats

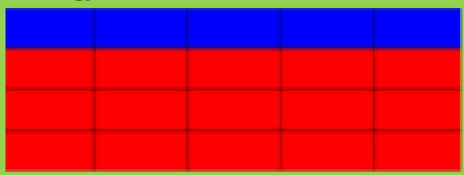
Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ gi eksempler på bruk av prosent og vekstfaktor i dagliglivet
- ☐ lage og løse tekstoppgaver knyttet til prosent
- ☐ delta i en diskusjon rundt endring i prosent/verdi og oppgi begrunnelse for argumentene dine
- ☐ se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- ☐ vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

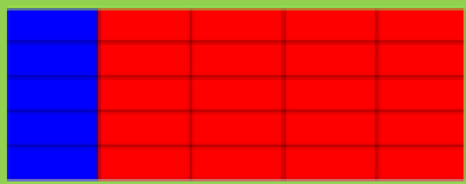
Utforskende oppgave – når det ikke er 100 ruter

Under ser du tabeller med ulikt antall ruter. Rutene i hver tabell er enten røde eller blå.

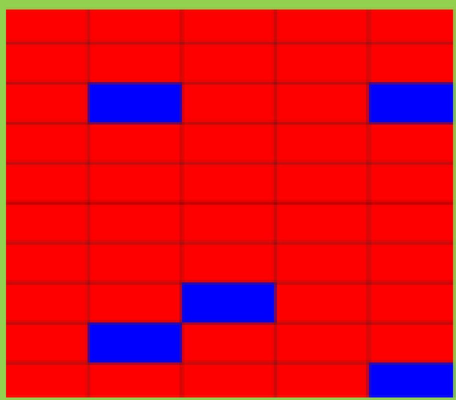
a) Tell antall blå ruter og tell antall ruter til sammen i tabellen (både røde og blå). Skriv antall blå ruter i forhold til antall ruter til sammen som en brøk.
b) Hva må du multiplisere nevneren med slik at nevneren blir 100? Hva må du da gjøre med telleren? Hva kalles dette?



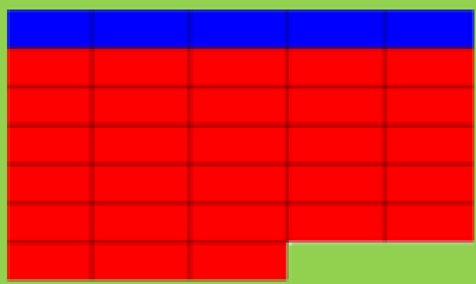
$$\frac{antall\ blå}{antall\ ruter} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{100}$$



$$\frac{antall\ blå}{antall\ ruter} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{100}$$



$$\frac{antall\ blå}{antall\ ruter} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{100}$$



$$\frac{antall\ blå}{antall\ ruter} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{100}$$

d) Forklar hvordan disse to personene tenker. Hvem har rett?

1. Brøk – desimal – prosent

Du har kanskje tidligere lært at prosent betyr hundredeler, del av hundre eller delt på hundre. I dette kapittelet skal vi jobbe med den praktiske betydningen av denne kunnskapen, og vi vil være mest opptatt av sifrene som står på enerplassen, tidelsplassen og hundredelsplassen i et desimaltall.

Ener ,	Tidel	Hundredel
,		

Dersom det står 0 på enerplassen vil tallets verdi være mindre enn 100 %. For eksempel er 0,74 = 74 %.
Dersom det står 1 eller mer på enerplassen vil tallets verdi være over 100 %. For eksempel er 1,26 = 126 %.
Dersom nevneren i en brøk er 100 vil tallet i telleren vise brøkens verdi i prosent. For eksempel er $\frac{43}{100}$ = 43 %.

Oppgave 1 – Fyll ut tabellen. På noen av disse oppgavene må du kanskje bruke kalkulator

Brøk	Desimal	Prosent		Brøk	Desimal	Prosent
$\frac{28}{100}$				$\frac{37}{56}$		
	0,48			$\frac{85}{127}$		
	0,61			$\frac{21}{18}$		
	0,7				0,8	
$\frac{5}{100}$					0,9	
		37 %				7 %
		8 %				113 %

Disse sammenhengene må du kunne:

$$\frac{1}{2} = 50\ \% \quad \frac{1}{3} \approx 33\ \% \quad \frac{1}{4} = 25\ \% \quad \frac{1}{5} = 20\ \% \quad \frac{1}{10} = 10\ \%$$

2. Å regne ut prosenttallet.

Prosentregningen i 2P er delt i to hoveddeler: det du skal klare uten hjelpemidler og det du skal klare med hjelpemidler. I delkapitlene 3.1 – 3.3 finner du oppgaver som kan regnes uten hjelpemidler.

2.1 Når det hele er lavere enn 100.

Eks:
I en klasse på 20 elever har 5 av elevene planlagt å reise bort i juleferien. Hvor mange prosent av klassens elever skal reise bort i juleferien?

Metode 1: bruke forholdslikning	Metode 2: sammenheng brøk - prosent
$$\frac{5}{20} = \frac{x}{100}$$ $\frac{5}{20} = \frac{x}{100} \rightarrow \frac{x}{100} = \frac{5}{20} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 100}{20} \rightarrow \underline{x = 25}$ <u>25 % av elevene reiser bort i vinterferien</u>	Vi forkorter brøken slik at vi finner en av sammenhengene fra forrige side: $\frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} = 25\ \%$ <u>25 % av elevene reiser bort i vinterferien</u>

Metode 3: Gjøre nevneren til 100
Vi utvider brøken slik at nevneren blir 100 $\frac{5 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{25}{100} = 25\ \%$ <u>25 % av elevene reiser bort i vinterferien</u>

Oppgave 1

I en klasse på 20 elever var det 14 jenter. Hvor mange prosent av elevene var jenter? Hvor mange var gutter?

Oppgave 2

I en klasse på 25 elever spiller 5 av elevene fotball. Hvor mange prosent av elevene i klassen spiller fotball? Hvor mange prosent spiller ikke fotball?

Oppgave 3

I september er det 20 skoledager. På 13 av disse dagen skinte sola. Hvor mange prosent av dagene var det ikke sol?

Oppgave 4

En elev trillet 10 terninger. 3 av disse landet på et oddetall. Hvor mange prosent av terningene viste partall?

Oppgave 5

I en klasse på 33 elever kom 3 av elevene for sent til første time. Omtrent hvor mange prosent av elevene kom tidsnok til timen?

Oppgave 6

I en gruppe med elever var det 8 jenter og 12 gutter. Hvor mange prosent av elevene i denne gruppa var gutter? Hvor mange prosent av elevene i denne gruppa var jenter?

VG3 ST består av to klasser; A- og B-klassen. Skolen arrangerer juleball for VG3, og påmeldingen viser at alle elevene i A-klassen og halvparten av elevene i B-klassen skal på juleballet. Hvor mange prosent av elevene på VG3 ST er påmeldt på juleballet?

Løs noen av oppgavene ovenfor ved hjelp av Excel.

2.2 Forkorte til hundredeler eller gjenkjenne brøker

Eks:

På en videregående skole er det 200 elever på VG1. 40 av disse elevene tar 1T. Hvor mange prosent av elevene tar 1T.

<table>
<tr><th>Metode 1: bruke forholdslikning</th><th>Metode 2: sammenheng brøk - prosent</th></tr>
<tr><td>$$\frac{40}{200} = \frac{x}{100}$$
$\frac{40}{200} = \frac{x}{100} \rightarrow \frac{x}{100} = \frac{40}{200} \rightarrow x = \frac{40 \cdot 100}{200} \rightarrow \underline{x = 20}$
<u>20 % av elevene tar 1T.</u></td><td>Vi forkorter brøken slik at vi finner en av sammenhengene fra side 8:
$\frac{40:40}{200:40} = \frac{1}{5} = 20\ \%$

<u>20 % av elevene tar 1T.</u></td></tr>
<tr><th colspan="2">Metode 3: Gjøre nevneren til 100</th></tr>
<tr><td colspan="2">Vi forkorter brøken slik at nevneren blir 100
$\frac{40:2}{200:2} = \frac{20}{100} = 20\ \%$

<u>20 % av elevene tar 1T.</u></td></tr>
</table>

Oppgave 7

Jonas skal kjøpe en bukse til 500 kroner. Han oppdager en liten flekk på buksa og blir derfor tilbudt 100 kr i avslag. Hvor mange prosent avslag blir han tilbudt?

Oppgave 8

På en videregående skole er det til sammen 1000 elever. 400 av disse går på VG3. Hvor mange prosent av elevene går på VG3?

Oppgave 9

Timelønnen til Tahir er 200. Dersom han jobber på kvelden øker timelønna hans med 60 kr. Hvor mange prosent høyere lønn har Tahir på kvelden?

Oppgave 10

I en gate bor det 400 mennesker. Av disse er 80 over 50 år. Hvor mange prosent av menneskene i denne gata er over 50 år?

Oppgave 11

I skobutikken selges et par sommersko til 360 kr. Tidligere hadde disse skoene kostet 600 kr. Hvor mange prosent rabatt får du på disse skoene?

Oppgave 12

I en klesbutikk på Tveita-senteret kostet en høstjakke 800 kr. Nå som det har blitt vinter selges denne jakka med en rabatt på 240 kr. Hvor mange prosent er rabatten på?

Oppgave 13

Prisen på en vare steg fra 1200 kroner til 1320 kroner. Med hvor mange prosent steg prisen?

Oppgave 14

En vanntank inneholdt 300 liter da den var full. En uke senere var innholdet i vanntanken på 240 liter. Med hvor mange prosent ble vannstanden redusert?

Løs noen av oppgavene over ved hjelp av Excel.

2.3 Når vanskegraden øker

Eks:
På en liten ungdomsskole var det 120 gutter og 130 jenter. Hvor mange prosent av skolens elever var gutter?

Metode 1: bruke forholdslikning	Metode 2: sammenheng brøk - prosent
$$\frac{120}{250} = \frac{x}{100}$$ $\frac{120}{250} = \frac{x}{100} \rightarrow \frac{x}{100} = \frac{120}{250} \rightarrow x = \frac{120 \cdot 100}{250} \rightarrow \underline{x = 48}$ 48 % av elevene er gutter.	Vi forkorter brøken slik at vi finner en av sammenhengene fra side 8: $\frac{120:120}{250:120} \approx \frac{1}{2} = 50\ \%$ Omtrent 50 % av elevene er gutter. (Vi kan ikke finne nøyaktig svar ved hjelp av denne metoden på denne oppgaven, men det er bedre å gi et omtrentlig svar enn å ikke svare)

Metode 3: Gjøre nevneren til 100
Vi både forkorter og utvider brøken slik at nevneren blir 100 $\frac{120:5}{250:5} = \frac{24 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{48}{100} = 48\ \%$ 48 % av elevene er gutter.

Oppgave 15
I en klasse på 30 elever valgte 9 av elevene 1T. Hvor mange prosent av klassens elever valgte 1T?

Oppgave 16
Et trinn besto av 120 Elever. Av disse gikk 80 elever på ST. Hvor mange prosent av elevene på trinnet gikk på ST?

Oppgave 17
Antall elever på VG1 økte fra 120 kr til 132 kr. Hvor høy var stigningen i prosent?

Oppgave 18
En fotballklubb består av 350 medlemmer. 140 av disse medlemmene er under 12 år. Hvor mange prosent av medlemmene er under 12 år?

Oppgave 19
På en skole gikk det 325 jenter og 175 gutter. Hvor mange prosent av elevene på skolen var jenter?

Oppgave 20

Nora kjøpte en pose med sjokolade. Ganske raskt spiste hun 135 gram sjokolade, og da hadde hun igjen 115 gram sjokolade. Hvor mange prosent av sjokoladeposen hadde hun spist?

Oppgave 21

I løpet av none år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time. Hvor mange prosent steg timelønnen?

Oppgave 22

I en klasse er $\frac{3}{4}$ av elevene jenter. 20 % av jentene spiller håndball. Ingen av guttene spiller håndball. Hvor mange prosent av elevene i klassen spiller håndball?

Løs noen av oppgavene over ved hjelp av Excel.

2.4 Med kalkulator eller regneark

Noen utregninger er såpass vanskelige at det er lurt å bruke hjelpemidler.

Eks:

I en boks med kalkulatorer fungerer 48 slik de skal og 3 mangler batteri. Hvor mange prosent av kalkulatorene er ikke klare for bruk?

$$\frac{3}{51} \approx 0{,}06 = \underline{\underline{6\ \%}}$$

Det vil si at ca. 6 % av kalkulatorene ikke var klare for bruk

Oppgave 23

I 2010 var det ca. 4 860 000 innbyggere i Norge. Av disse var 637 356 mellom 10 og 19 år. Hvor stor prosent av befolkningen var mellom 10 og 19 år?

Oppgave 24

2817 av 11 200 velgere stemte på AP i et kommunevalg. Hvor mange prosent stemte AP?

Oppgave 25

En flaske rommer 0,75 L. Trine heller 0,63 L vann i flaska. Hvor mange prosent av volumet i flaska utgjør dette?

Oppgave 26

Arealet til en fotballbane er 7350 m^2. Midt på banen er det en sirkel som kalles midtsirkelen. Arealet til denne sirkelen er ca. 255 m^2. Omtrent hvor mange prosent av banens areal utgjør midtsirkelen?

Oppgave 27

Høsten 2019 begynte 650 elever på Hellerud. Ved nyttår hadde elevtallet sunket til 610. Hvor mange prosent av de som startet høsten 2019 gikk fortsatt på skolen ved nyttår?

Oppgave 28

En murer blander betong. Til dette bruker han 2,4 kg sand + 1,2 kg sement + 1,5 kg pukk. Hvor mange prosent av blandinga er sand? Hvor mange prosent av blandinga utgjør sement? Hvor mange prosent av blandinga utgjør pukk?

Løs oppgavene over ved hjelp av Excel.

3. Å regne ut delen.

Prosentregningen i 2P er, som nevnt tidligere, delt i to hoveddeler: det du skal klare uten hjelpemidler og det du skal klare med hjelpemidler. I delkapittel 4.1 finner du oppgaver som kan regnes uten hjelpemidler.

3.1 Å regne delen uten kalkulator

Eks:
Et brød besto av 35 brødskiver. Til frokost spiste familien 20 % av brødskivene. Hvor mange brødskiver ble spist til frokost?

Metode 1: bruke forholdslikning	Metode 2: sammenheng brøk - prosent
$\frac{x}{35} = \frac{20}{100}$ $\frac{x}{35} = \frac{20}{100} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 35}{100} \rightarrow \underline{x = 7}$ <u>Familien spiste 7 brødskiver til frokost.</u>	Vi bruker sammenhengen mellom prosent og brøk fra side 8: $20\ \% = \frac{1}{5} \rightarrow 35 : 5 = 7$ <u>Familien spiste 7 brødskiver til frokost.</u>

Metode 3: veien om 1 %	
100 % = 35 brødskiver	
1 % = 0,35 brødskiver	| : 100
20 % = 7 brødskiver	| · 20
<u>Familien spiste 7 brødskiver til frokost.</u>	

Oppgave 29

På et håndballag med 20 jenter har 25 % av jentene allerede hatt bursdag. Hvor mange av jentene har hatt bursdag?

Oppgave 30

På Meny er en sjokolade, som egentlig kostet 50 kr, satt ned med 10 %. Hvor mye er avslaget på?

Oppgave 31

En flaske med saft kostet egentlig 48 kr, men ble solgt med 33 % avslag. Hvor mye sparer du på dette?

Oppgave 32

I en klasse på 25 elever var 20 % av elevene syke. Hvor mange av klassens elever var syke?

Oppgave 33

I fjor kostet en pc 4 800 kroner. I år ble prisen satt opp med 20 %. Hvor mye dyrere ble pc-en målt i kroner?

Oppgave 34

I 2015 målte et epletre 2,5 meter. Ved inngangen til 2019 hadde treet vokst med 10 %. Hvor mye hadde treet vokst målt i meter?

Løs noen av oppgavene over ved hjelp av Excel

Oppgavene nedenfor kan løses ved å regne via sammenhengene på side…

Oppgave 35

Opprinnelig pris på en genser er 600 kr. På grunn av en liten flekk selges denne med 5 % rabatt. Hvor stor er rabatten?

Oppgave 36

En skobutikk selges et par sommersko med opprinnelig pris på 360 kr med 40 % rabatt. Hvor mye utgjør dette?

Oppgave 37

På en videregående skole er det til sammen 800 elever. 30 % av disse går på VG1. Hvor mange elever går på VG1?

Oppgave 38

75 % av elevene på skolen i oppgave 32 går på VG1 og VG2. Hvor mange elever er dette?

3.2 Med kalkulator eller regneark

Eks:

I 2017 ble det solgt ca. 158 000 nye biler i Norge. 23 % av disse var el-biler. Hvor mange el-biler ble solgt i Norge i 2017?

$$158\,000 \cdot 23\,\% = 158\,000 \cdot 0{,}23 = \underline{36\,340}$$

Det ble solgt 36 340 el-biler i Norge i 2017.

Oppgave 39

Høsten 2019 begynte 650 elever på Hellerud VGS. 11 % av disse begynte på bygg og anleggs-linja. Hvor mange elever utgjorde dette?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 40

Høsten 2019 begynte 650 elever på Hellerud VGS. 23 % av disse begynte på VG1 - studiespesialisering. Hvor mange elever utgjorde dette?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 41

I en klasse på 25 elever kom 13 % av elevene for sent. Hvor mange elever kom for sent?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 42

På en skole med 548 elever gikk 31 % av elevene på Vg1. Hvor mange elever gikk på Vg1?

(Husk at det kun finnes hele elever)

Oppgave 43

I en klasse på 30 elever sluttet 13,3 % i løpet av skoleåret. Hvor mange av elevene i klassen sluttet?

Oppgave 44

Vilde hadde en timelønn på 192 kr. Når hun jobber lørdager skal hun ha 28 % tillegg. Hvor mange kroner tillegg har hun på lørdager?

Løs noen av oppgavene over ved hjelp av Excel.

4. Å finne 100 %

Eks:

På et VG2-trinn valgte 20 % av elevene S1. Dette utgjorde 32 elever. Hvor mange elever gikk på VG2-trinnet på den skolen?

Metode 1: bruke forholdslikning	Metode 2: sammenheng brøk - prosent
$$\frac{32}{x} = \frac{20}{100}$$ Fra kapittel 1 husker vi: $\frac{32}{x} = \frac{20}{100} \rightarrow \frac{x}{32} = \frac{100}{20} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 32}{20} \rightarrow \underline{x = 160}$ Det var 160 elever på VG2.	Vi forkorter brøken slik at vi finner en av sammenhengene fra side 8: $100\,\% = 20\,\% \cdot 5 \rightarrow 32 \cdot 5 = \underline{160}$ Det var 160 elever på VG2.

Metode 4: Veien om 1 %

20 % = 32 elever | : 20
1 % = 1,6 elever | · 100
100 % = 160 elever

Det var 160 elever på VG2.

Merk: andre prosenter enn 1 får oss også i mål, for eksempel 10 % eller 5 %.

Oppgave 45

Prisen på en vare økte med 500 kr. Dette utgjorde en prisøkning på 10 %. Hvor mye kostet varen før prisøkningen?

Oppgave 46

En TV ble satt ned med 20 %. Da ble den 1000 kr billigere. Hvor mye kostet den før den ble satt ned?

Oppgave 47

25 % av elevene på VG2 - studiespesialisering på Hellerud har valgt S1 – matematikk. Dette utgjør 22 elever. Hvor mange elever går på VG2 - studiespesialisering?

Oppgave 48

En saftflaske averterer med «30 % mindre sukker». Reduksjon i sukkerinnhold er 2,7 gram per 100 gram. Hvor høyt var sukkerinnholdet tidligere?

Oppgave 49

12,5 % av elevene på en skole spiller fotball på fritiden. Dette utgjør 60 elever. Hvor mange elever er det på skolen?

Oppgave 50

Verdien på en aksje steg med 7 %. Dette gjorde at aksjen ble 16,94 kr dyrere. Hvor mye kostet aksjen før verdistigningen?

Oppgave 51

Verdien på en aksje steg med 7 %. Dette gjorde at aksjen ble 16,94 kr dyrere. Hvor mye kostet aksjen før verdistigningen?

Løs noen av oppgavene over ved hjelp av Excel.

5. Å finne ny verdi - vekstfaktor

Når vi skal endre nåværende verdi tar vi alltid utgangspunkt i at nåværende verdi er 100 %. Dersom verdien ikke endres forblir verdien 100 %. Dersom verdien øker blir den nye verdien høyere enn 100 %. Dersom verdien synker blir den nye verdien lavere enn 100 %.

Mange kalkulatorer kan ikke regne med prosent. Derfor må vi gjøre det nye prosenttallet om til et desimaltall. Dette kalles vekstfaktor.

Dersom verdien ikke forandres vil vekstfaktoren bli 1,00. Dersom verdien øker blir vekstfaktoren høyere enn 1,00. Dersom verdien synker blir vekstfaktoren lavere enn 1,00

5.1 Negativ vekst

- 7 % = 93 % = 0,93 ________	- 18 % = ______________________
- 7,5 % = ____________________	- 18,3 % = ____________________
- 10,2 % = ___________________	- 17,5 % = ______________________
- 10 % = ____________________	- 20 % = _____________________
- 30 % = ____________________	- 40 % = _____________________
- 50 % = ____________________	- 60 % = _____________________

Eks:

På starten av skoleåret hadde matematikklæreren en bunke med 120 kladdebøker. Når høstferien kom hadde læreren delt ut 25 % av disse. Hvor mange bøker var det igjen i bunken?

100 % - 25 % = 75 % = 0,75

$120 \cdot 0{,}75 = 90$

Læreren hadde igjen 90 kladdebøker.

Oppgave 52

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Hva er verdien til bilen om ett år?

Oppgave 53

Ved skolestart høsten 2018 begynte 550 elever på en VGS. I løpet av skoleåret hadde 10 % sluttet. Hvor mange elever fullførte skoleåret?

Oppgave 54

Nypris på en moped var 12 000 kr. Etter ett år hadde verdien sunket med 20 %. Hva var verdien på mopeden etter ett år?

Oppgave 55

En familie skulle kjøre fra Oslo til Trondheim, en strekning som er ca. 500 km lang. Etter 2 timer hadde de kjørt 30 % av avstanden. Hvor mange km har de igjen å kjøre?

Oppgave 56

Prisen på en aksje var 68 kr. Dagen etter hadde verdien sunket med 2,8 %. Hva ble den nye verdien på denne aksjen?

Oppgave 57

I januar 2019 kjøpte en person akser for et visst beløp. Verdien på aksjene kunne i juni beregnes utfra regnestykket $15\,000 \cdot 0{,}97$. Hva forteller tallene 15 000 og 0,97?

Oppgave 58

Høsten 2018 startet et visst antall elever på VG1. Antall elever som fullførte året kan beregnes utfra regnestykket $140 \cdot 0{,}875$. Hva forteller tallene 140 og 0,875?

Løsn noen av oppgavene over ved hjelp av Excel.

5.2 Positiv vekst

+15 % = <u>115 % = 1,15</u>	+20 % = ____________________
+25 % = ____________________	+40 % = ____________________
+ 7% = _____________________	+ 9 % = _____________________
+17,5 % = __________________	+ 150 % = ____________________
+ 143 % = ___________________	+ 9,54 % = ___________________
+ 2,1 % = ___________________	+ 0,8 % = ____________________

Eks:

I 2014 hadde en VGS 50 primærsøkere. I 2018 hadde dette tallet steget med 20 %. Hvor mange primærsøkere hadde denne skolen i 2018?

100 % + 20 % = 120 % = 1,2

$50 \cdot 1{,}2 = 60$

Skolen hadde 60 primærsøkere i 2018.

Oppgave 59

I 2015 ble en leilighet kjøpt for 2 450 000 kr. I 2019 hadde verdien av leiligheten steget med 15 %. Hvor høy er verdien av leiligheten i 2019?

Oppgave 60

I 2017 var prisen på en jakke 1400 kr. I 2018 ble prisen satt opp med 10 %. Hvor mye kostet jakka i 2018?

Oppgave 61

Elevtallet på en VGS var 600. Året etter steg elevtallet med 7 %. Hvor mange elever gikk på skolen året etter?

Oppgave 62

Hanne har en timelønn på 160 kr. Hun blir lovet en lønnsøkning på 4,3 %. Hva blir den nye timelønna hennes?

Oppgave 63

På mandag kostet bensin 12,53 kr/L. Tirsdag hadde prisen økt med 2,3 %. Bruk vekstfaktor til å regne ut hvor mye bensinen kostet per liter på tirsdagen?

Oppgave 64

En familie kjøpte en leilighet i 2008 for 1,8 millioner kroner. De antar at leilighetens verdi har steget med 150 % frem til i dag. Hvor høy er verdien på leiligheten dersom familien har rett?

Løs noen av oppgavene over i Excel.

5.3.1 Flere prosentvise endringer

Eks:

Prisen på utenlandske penger (ofte kalt valutakurs) forandrer seg hver dag. 3. juni 2018 var prisen på Euro 9,53 kr. Dagen etter gikk prisen opp med 3 %, deretter steg prisen med ytterligere 5 % før den falt med 2 %. Hva var prisen på Euro etter disse tre endringene?

+ 3 % = 103 % = 1,03
+ 5 % = 105 % = 1,05
- 2 % = 98 % = 0,98

9,53 · 1,03 · 1,05 · 0,98 = <u>10,10</u>

<u>Prisen på aksjen var kr 10,10 etter disse tre endringene.</u>

På Tveita-senteret er det to matbutikker. I dag koster en saftflaske det samme på begge butikkene. Butikk A øker først prisen med 10 %, deretter med 10 % en gang til. Butikk B øker prisen med 20 %. Vil butikkene fortsatt ha lik pris på saftflaska etter disse prisendringene?

På Tveita-senteret er det to matbutikker. I dag koster en saftflaske det samme på begge butikkene. Butikk A øker først prisen med 20 %, deretter setter den ned prisen med 10 %. Butikk B setter først ned prisen med 10 %, deretter setter den opp prisen med 20 %. Vil butikkene fortsatt ha lik pris på saftflaska etter disse prisendringene?

Oppgave 65

Hanne har en timelønn på 160 kr. Første året økte timelønnen med 3,8 %, deretter økte den med 2,7 %, og det tredje året økte lønnen med 3,1 %. Hva ble den nye timelønna hennes etter disse tre endringene?

Oppgave 66

På mandag kostet bensin 12,53 kr/L. Tirsdag hadde prisen sunket med 2 %. Onsdag sank prisen med ytterligere 3,7 % før den steg med 4,1 % på torsdag. Bruk vekstfaktor til å regne ut hvor mye bensinen kostet per liter etter torsdagens prisøkning.

Løs oppgavene over i Excel.

5.3.2 Flere like prosentvise endringer

Eks:
I dag kan en leilighet selges for 2,1 millioner kroner. Det er forventet at verdien på leiligheten stiger med 8 % hvert år de neste fire årene. Hvor mye kan leiligheten selges for om 4 år dersom dette stemmer?
$2{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 = 2{,}1 \cdot 1{,}08^4 = \underline{2{,}86}$

Leiligheten kan selges for 2,86 millioner kroner om 4 år.

Merk: disse oppgavene kan også løses ved hjelp av eksponentielle funksjoner som du skal lære om i neste kapittel.

Oppgave 67
Hvis vi setter 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en viss prosent av det beløpet vi har på kontoen. Hvor mye vil vi ha på kontoen om 5 år dersom renten er på 3 %? Hvor mye har vi etter 10 år og 15 år?

Oppgave 68
En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 5 år?

Oppgave 69
Anta at en aksje, som i dag er verdt 118 kr, stiger med 2 % hver dag den neste uka. Hvor høy er verdien på aksjen etter en uke?

Oppgave 70
En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året. Hvor mye er PC-en verdt etter 5 år?

Oppgave 71
Vi kan anta at en nytraktet kopp med kaffe holder 93 °C, og at temperaturen synker med 3,5 % per minutt de første minuttene (i normal romtemperatur). Hvor varm vil kaffekoppen være etter 5 minutter?

Oppgave 72
Knut kjøper en bil, og han vet at bilens verdi synker en viss prosentandel hvert år. Han ser for seg å beholde bilen i noen år, og han lager følgende regnestykke for å beregne hvor mye han kan selge bilen for:

$$\text{Salgspris} = 320\,000 \cdot 0{,}85^5$$

Hvor mye kjøpte Knut bilen for, hvor mange prosent antar Knut at verdien synker hvert år, og hvor mange år tenker Knut å beholde bilen før han selger den?

Hvor mye regner Knut å selge bilen for?

Løs noen av oppgavene over i Excel

6. Å finne gammel verdi

6.1 En prosentvis endring

Eks:

På 17. mai solgte en kiosk 1260 is. Dette var en nedgang på 10 % fra i fjor. Hvor mange is solgte kiosken i fjor?

100 % - 10 % = 90 % = 0,9

Metode 1: Salg av is i fjor = $\frac{1260}{0,9}$ = <u>1400</u>
Metode 2: Salg av is i fjor = 1260 · $0,9^{-1}$ = <u>1400</u>

<u>Kiosken solgte 1400 is på 17. mai i fjor.</u>

Oppgave 73
Prisen på en bukse ble satt ned med 15 %. Nå koster buksa 765 kr. Hvor mye kostet buksa før prisreduksjonen?

Oppgave 74
Elevtallet på en VGS økte med 4 % fra august 2017 til august 2018? I august 2018 var elevtallet ved skolen 582. Hvor høyt var elevtallet i august 2017?

Oppgave 75
En saftflaske averterer med «30 % mindre sukker». Nåværende sukkerinnhold er 6,3 gram per 100 gram. Hvor høyt var sukkerinnholdet før reduksjonen?

Oppgave 76
Elevtallet på en VGS økte med 4 % fra august 2017 til august 2018? I august 2018 var elevtallet ved skolen 582. Hvor høyt var elevtallet i august 2017?

Oppgave 77
I fjor kjøpte en familie en bruktbil. De antar at bilens verdi har sunket med 15 % siden de kjøpte bilen. I dag er bilens verdi 280 000 kroner. Hvor mye betalte de for bilen?

Oppgave 78
På 16-årsdagen sin kjøpte Mariam en moped. Det er vanlig at verdien til mopeder går det med en viss prosent hvert år. På 17-årsdagen sin setter hun opp følgende regnestykke:

$$\text{Nypris på moped} = \frac{14400}{0,9}$$

Hvor mye antar Mariam at verdien til mopeden er på 17-årsdagen hennes? Hvor mange prosent antar hun at verdien synker hvert år?

Hvor mye kostet mopeden da den var ny?

6.2 Flere prosentvise endringer

Eks:

Prisen på Euro gikk opp 10 %, deretter sank den med 8 % før den steg med 7 %. Nå koster 1 Euro 9,59 kr. Hvor mye kostet den før prisendringene?

9,59 : 1,07 : 0,92 : 1,1 = 8,85

1 Euro kostet 8,85 kroner før prisendringen

Oppgave 79

Prisen på bensin endres daglig. Fra mandag gikk den først opp med 2 %, deretter opp med ytterligere 3 % før den sank med 1,5 %. I dag koster bensin 14,36 kr per liter. Hvor høy var bensinprisen på mandag?

6.3 Flere like prosentvise endringer

Eks:

I dag kan en leilighet selges for 3,2 millioner kroner. Man antar at verdien til denne leiligheten har steget med 7 % hvert år de siste fem årene. Hvor mye var leiligheten verdt for fem år siden?

$3{,}2 : 1{,}07^5 = \underline{2{,}3}$

<u>Leilighetens verdi var 2,3 millioner kroner for fem år siden.</u>

Merk: disse oppgavene kan også løses ved hjelp av eksponentielle funksjoner som du skal lære om i neste kapittel.

Oppgave 80

For fire år siden satte Espen inn et beløp i banken. Pengene har stått urørt med 3 % årlig rente. I dag har han kr 112 550,88 på kontoen. Hvor stort var beløpet Espen satt inn for fire år siden?

Oppgave 81

Verdien til en aksje har sunket med 2,5 % seks dager på rad. I dag kan aksjen kjøpes for kr. 128,86. Hva var verdien til aksjen for seks dager siden?

Oppgave 82

For 5 år siden kjøpte familien Hansen en ny bil. De to første årene sank bilens verdi med 20 %, deretter sank verdien med 15 % de neste tre årene. I dag er bilens verdi 224 000 kroner. Hvor mye betalte familien Hansen for bilen?

Oppgave 83

I en kommune ble det hvert år laget en telling av antall hjort, og nye tellinger har blitt laget hvert år etter. Det viser seg at antall hjort i kommunen synker med en fast prosent hvert år. Du finner følgende regnestykke som gjelder for i år:

$$\text{Antall hjort ved første telling} = \frac{850}{0{,}95^3}$$

Hvor mange hjorter er i kommunen ved årets telling, hvor mange år er det siden første telling, og hvor mange prosent synker hjortebestanden med hvert år?

Hvor mange hjorter var det ved første telling?

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 2 (del 1)

En vare koster i dag 240 kroner. Prisen er da satt ned med 20 %.

Hvor mye kostet varen før prisen ble satt ned?

V15 - Oppgave 1 (del 2)

Per, Pål og Espen skal låne 3 000 kroner hver. Lånene skal betales tilbake etter seks måneder. De får følgende betingelser:

- Per får tilbud om å betale tilbake 3 450 kroner etter seks måneder.
- Pål får tilbud om en månedlig rente på 2,2 %.
- Espen får tilbud om en månedlig rente på 1,8 % og et etableringsgebyr på 100 kroner.

Gjør beregninger, og avgjør hvem som får det beste tilbudet.

H15 - Oppgave 2 (del 1)

Prisen på en vare er satt ned med 30 %. I dag koster varen 280 kroner.
Hvor mye kostet varen før prisen ble satt ned?

H15 - Oppgave 4 (del 1)

For 10 år siden vant Lea i Lotto. Hun opprettet en konto i banken og satte inn hele gevinsten. Beløpet har stått urørt på kontoen siden. Renten har hele tiden vært
3,2 % per år.

I dag har Lea 500 138 kroner på kontoen.

Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor stor gevinsten til Lea var.

H15 - Oppgave 5 (del 2)

Tenk deg at du oppretter en BSU-konto 1. januar neste år og setter inn 25 000 kroner. Du setter inn 25 000 kroner 1. januar de neste sju årene også. Renten er 4,7 % per år.

a) Lag et regneark som gir en oversikt over hvor mye du vil ha på kontoen ved slutten av **hvert år** disse åtte årene

b) Hvor mye vil du få til sammen i renter i løpet av disse åtte årene?

V16 - Oppgave 3 (del 1)

I butikk A koster en vare 150 kroner. I butikk B koster den samme varen 120 kroner.

a) Hvor mange prosent høyere er prisen i butikk A sammenlignet med prisen i butikk B?

b) Hvor mange prosent lavere er prisen i butikk B sammenlignet med prisen i butikk A?

V16 - Oppgave 4 (del 1)

Merverdiavgiften på klær er 25 %. En jakke koster 750 kroner med merverdiavgift.

Hvor mange kroner betaler vi i merverdiavgift dersom vi kjøper denne jakka?

V16 - Oppgave 5 (del 2)

En bedrift slapp ut 20 000 tonn CO_2 i 2015. Myndighetene krever at bedriften reduserer utslippet av CO_2 med 8 % hvert år de neste 10 årene.

a) Bruk regneark til å lage en oversikt som viser antall tonn CO_2 bedriften kan slippe ut hvert år de neste 10 årene.

b) Hvor mange prosent vil bedriften totalt ha redusert utslippet med i løpet av denne perioden?

En annen bedrift slapp ut 30 000 tonn CO_2 i 2015. Myndighetene krever at denne bedriften halverer utslippet i løpet av 5 år. Bedriften vil oppfyll myndighetenes krav ved å redusere utslippet av CO_2 med en fast prosentsats hvert år framover.

c) Bestem denne prosentsatsen.

V17 - Oppgave 2 (del 1)

Ved en skole er det 125 elever. En dag to 25 av elevene buss til skolen.

Hvor mange prosent av elevene tok buss til skolen denne dagen?

V17 - Oppgave 2 (del 2)

Emil betalte 3 703 000 kroner for en leilighet. Han betalte 15 % mer enn prisantydningen.

Hva var prisantydningen for denne leiligheten?

V17 - Oppgave 3 (del 2)

For 20 år siden arvet Ida penger. Hun satte alle pengene inn på en ny bankkonto. Hun har fått en fast rente på 4,25 % per år. I dag har hun 1 724 180 kroner på kontoen.

Hvor mye penger arvet Ida?

V17 - Oppgave 9 (del 2)

Elise og Ådne opprettet hver sin bankkonto 1. januar 2017. Elise satte inn 20 000 kroner. Ådne satte inn 25 000 kroner. Begge får en rente på 2,75 % per år, og begge lar pengene stå urørt.

a) Lag et regneark som gir en oversikt over hvor mye Elise og Ådne vil ha i banken hvert år fram til og med 31. desember 2036.

b) Hvor mange år vil det gå før de til sammen har mer enn 70 000 kroner i banken?

c) Hvor mye vil Elise og Ådne til sammen få i renter disse 20 årene?

H17 - Oppgave 5 (del 1)

Du får 40 % rabatt på en billett. Rabatten utgjør 120 kroner.

Hvor mye ville billetten ha kostet dersom du ikke hadde fått rabatt?

H17 - Oppgave 6 (del 2)

Karen lånte 90 000 kroner den 1. november 2017. Hun har fått følgende betingelser for nedbetaling av lånet:

- en rente på 0,4 % per måned
- månedlige terminer
- et fast avdrag på 2500 kroner per termin
- termingebyr 50 kroner

a) Vis at første terminbeløp blir 2 910 kroner.

b) Lag et regneark som Karen kan bruke for å holde oversikt over lånet til det er nedbetalt. Nedenfor ser du hvordan de første radene i regnearket skal se ut.

c) Hvor mye må Karen totalt betale for dette lånet?

(oppgaven fortsetter på neste side)

Like etter at Karen inngikk låneavtalen ovenfor, så hun en reklame der hun kunne ha fått følgende betingelser for nedbetaling av et lån på 90 000 kroner:

- en rente på 0,5 % per måned
- månedlige terminer
- et fast avdrag på 2500 kroner per termin
- ingen gebyrer

d) Hvor mye måtte Karen totalt ha betalt for dette lånet?

V18 - Oppgave 2 (del 2)

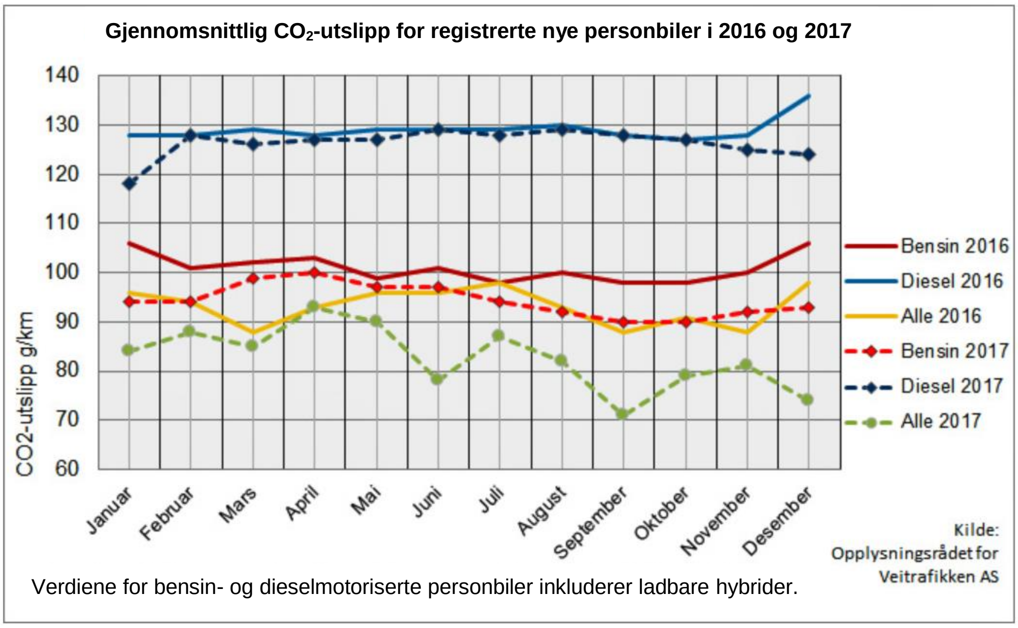
I klassen til Mats er det 25 elever. 20 % av elevene har bodd i Norge i mindre enn fire år.

a) Hvor mange av elevene i klassen har bodd i Norge i mindre enn fire år?

Skolen Mats går på, er pusset opp og bygd ut. Nå er det 1500 elevplasser ved skolen. Dette er 150 % flere elevplasser enn før utbyggingen.

b) Hvor mange elevplasser var det ved skolen før utbyggingen?

V18 - Oppgave 3 (del 2)



Diagrammet ovenfor viser gjennomsnittlig CO_2-utslipp for registrerte nye personbiler i 2016 og 2017.

Hvor mange prosent gikk gjennomsnittlig CO_2-utslipp for bensinbiler ned med fra januar 2016 til oktober 2017?

V18 - Oppgave 4 (del 2)

Verdien av en bil har avtatt med 12 % hvert år siden den var ny. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 12 % hvert år framover. I dag er bilen verd 300 000 kroner.

a) Hvor mye vil bilen være verd om fem år?

b) Hvor mye var bilen verd for fem år siden?

Forberedelse til prøven

Uten kalkulator

F1

a) Skriv som prosent og desimaltall:
   1) $\frac{1}{4}$
   2) $\frac{140}{200}$

b) I en klasse er $\frac{3}{5}$ av elevene jenter. 50 % av jentene spiller håndball. Ingen av guttene spiller håndball.
   Hvor mange prosent av elevene i klassen spiller håndball?

F2

a) Før kostet en vare 50 kr. Nå koster varen 80 kr. Hvor mange prosent har prisen økt med?

b) I løpet av noen år steg Meretes lønn fra 150 kr til 165 kr. Hvor mange prosent steg lønna med?

c) I midten av 2018 var antallet mennesker i verden på 7,6 millioner. Omtrent 15 % av disse bor i Afrika. Omtrent hvor mange mennesker bor i Afrika?

d) Prisen på en jakke økte med 150 kr. Dette gjorde at jakka ble 20 % dyrere. Hvor mye kostet jakka før prisøkningen?

F3
Skriv av tabellen under i besvarelsen din.

Gjør utregninger og fyll inn det som mangler i tabellen:

Prosentvis endring	Vekstfaktor
$+2\ \%$	
$-11\ \%$	
	1,08
	0,975

Med kalkulator

F4

Prisen på en telefon ble redusert med 15 %. Året etter ble den satt opp med 15 %.

Begrunn om den nye prisen er lik eller forskjellig fra den gamle.

F5
a) Høsten 2018 begynte 650 elever ved Hellerud VGS. I juni har elevtallet sunket til 520. Hvor mange prosent av elevene som begynte i høst går fortsatt på skolen? Hvor mange prosent av elevene som begynte har sluttet?
b) 18 % av de elevene som begynte skoleåret gikk på Bygg og anlegg. Hvor mange elever var dette?

F6

a) På VG1 spilte 20 % av elevene fotball. Dette utgjorde 27 elever. Hvor mange elever gikk på VG1 på denne skolen?

b) I Oppland fylke går ca. 6 500 personer på videregående skole. Dette utgjør 4 % av alle videregåendeelevene i Norge. Hvor mange elever går på videregående skole i Norge?

F7

a) I januar 2019 hadde du 2 500 kr på konto. Etter 1 år har beløpet steget med 2 % Bruk vekstfaktor til å regne den nye saldoen.

b) Anta at veksten i a) fortsetter. Hvor mye har du etter 4 år?

c) Anta at du i januar 2019 setter 4 000 kroner i et aksjefond, og lar dem stå noen år. Aksjefondet går dårlig, og det første året synker verdien med 2,5 %. Hvor høy er verdien av aksjefondet etter ett år.

d) Aksjefondet fortsetter å synke med samme prosent. Hvor høy er verdien etter 5 år?

F8
En leilighet kostet 1 million kr i år 2000. Den årlige verdiøkningen har vært 9 % siden 1995.
a) Hvor mye var leiligheten verdt i 1999?
b) Hvor mye var leiligheten verdt i 1995?

F9
Kristina har kjøpt en leilighet til 3 millioner kr. Verdien på leiligheten steg med 3,5 % de første fire årene. De neste seks årene steg verdien med 4,3 %.

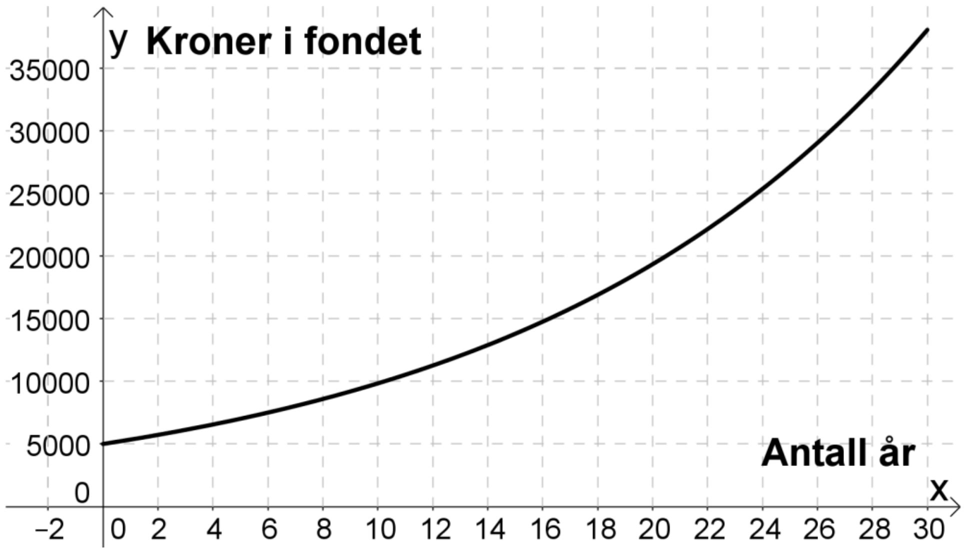
a) Hvor mye har leiligheten steget med på disse 10 årene, målt i kroner?

b) Hvor mye har leiligheten steget med på disse 10 årene, målt i prosent?

Kapittel 2. Funksjoner

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser. I dette kapitlet skal vi se nærmere på to typer funksjoner, lineære og eksponentielle.

- Hvordan vi skal tolke grafer
- Hva som kjennetegner lineær vekst
- Hva som kjennetegner eksponentiell vekst
- Framstille funksjoner ved hjelp av tekst, formel, verditabell og graf.
- Finne gjennomsnittlig og momentan vekstfart
- Tolke svarene i praktiske situasjoner



Mål for kapittel 2. Funksjoner

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre greie for begrepet linær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- bruke digitale verktøy til å undersøke kombinasjoner av polynomfunksjoner, rotfunksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og finne gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmingsverdier for momentan vekstfart
- bruke funksjoner til å modellere, drøfte og analysere praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg tegner et koordinatsystem med riktig inndeling av aksene
- ☐ hvordan jeg merker av punkter i et koordinatsystem
- ☐ hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en graf
- ☐ hvordan jeg tegner en funksjon i GeoGebra med aksetitler
- ☐ hvordan jeg leser av fra x- og y-aksen i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner nullpunkter i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner topp- og bunnpunkt i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner gjennomsnittlig og momentan vekstfart i GeoGebra

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

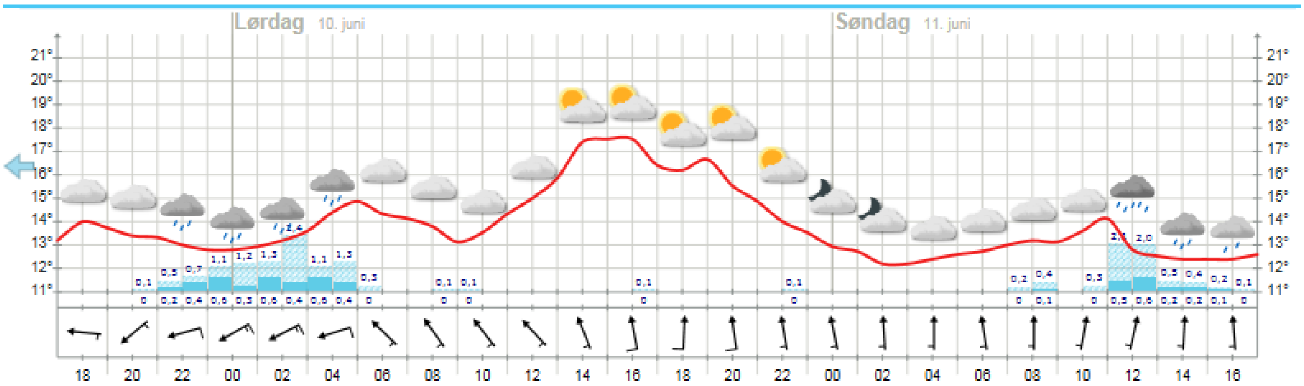
- ☐ hva som kjennetegner ulike typer funksjoner: lineære-, polynom-, eksponentiell-, potens- og rotfunksjoner
- ☐ hvordan jeg finner konstantledd og stigningstall
- ☐ hvordan jeg kan tegne en rett linje ved hjelp av konstantledd og stigningstall
- ☐ hva gjennomsnittlig og momentan vekstfart forteller meg om en praktisk situasjon

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ forklare hva avleste verdier fra en graf forteller meg om en praktisk situasjon
- ☐ velge hensiktsmessig hjelpemidler når jeg jobber med funksjoner

1. Graftolkning

En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.



Se på bildet over fra yr.no som viser varselet for Hellerud videregående skole. Angi tidspunktene som hele timer, og temperaturen med én desimal. Starttidspunktet er kl. 17:00 fredag 9.juni.

a) Når er det varmest på søndag?
   1. Hva er temperaturen da?
   2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
b) Når blir det kaldest på lørdag?
   1. Hva er temperaturen da?
   2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
c) Når vil det være varmest i perioden? (marker på figuren)

d) Når vil det være kaldest i perioden? (marker på figuren)

e) Hvor stor er forskjellen mellom det varmeste og kaldeste på lørdag og hvor mange timer går det fra det er kaldest til varmest?

f) Hvor mye stiger temperaturen med per time fra det kaldeste til det varmeste på lørdag?

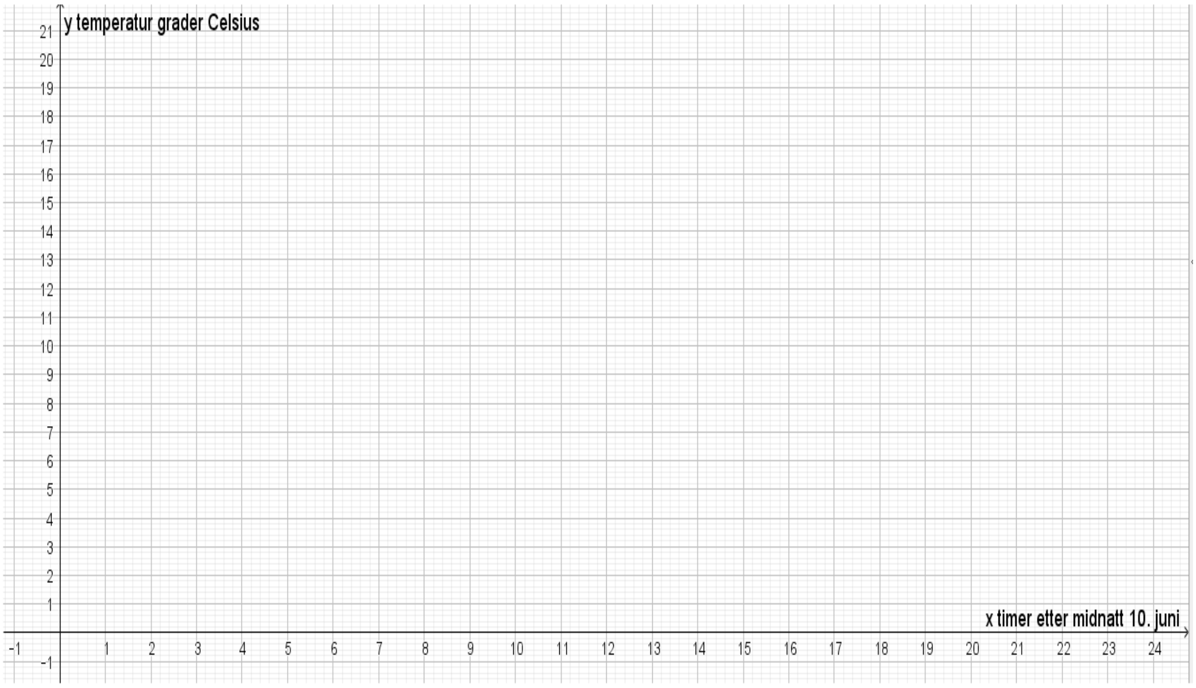
g) Hvor mange ganger er temperaturen 15 °C? (marker på figuren)

h) Når er temperaturen 13 °C? (marker på figuren)

i) I hvilken periode er temperaturøkningen sterkest? (marker på figuren)

j) I hvilken periode er temperaturreduksjonen sterkest? (marker på figuren)

k) Tegn en framstilling av temperaturutviklingen i løpet av lørdag 10. juni i et koordinatsystem. Merk av temperatur hver time og tegn. Beskriv deretter temperaturutviklingen det døgnet med egne ord og relevante matematiske begreper.



2. Rette linjer

2.1 Proporsjonale størrelser

Grafen til proporsjonale størrelser vil være en rett linje som begynner i origo, det vil si der x- og y- aksen krysser hverandre og har koordinatet (0,0). Dersom du vet koordinatet til ett punkt til har du nok informasjon til å tegne grafen.

Når du har tegnet grafen kan du lese av den informasjonen du blir spurt om å finne. Det er derfor lurt å lese gjennom hele oppgaven før du begynner å tegne grafen, slik at du vet hvor lang grafen må være og hvor detaljert tallene på x- og y-aksen må være.

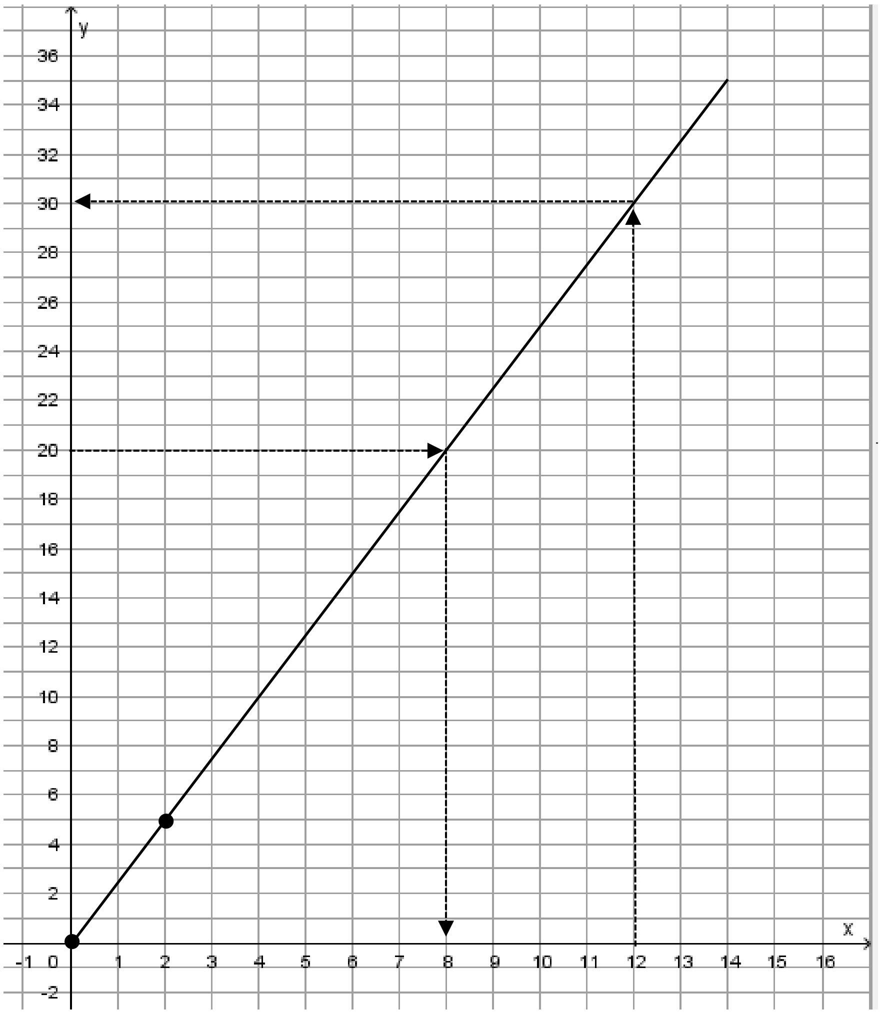
Dersom du tegner grafen **for hånd** hender det at du ikke klarer å lese av nøyaktig verdi på enten x- eller y-aksen. Da må du gi et omtrentlig svar, og du bør bruke ordet «cirka» i svaret ditt. Dersom du bruker **GeoGebra** vil du kunne finne nøyaktige svar uansett hvor kompliserte tallene er. Husk at du i så fall må skrive hvilke kommandoer/fremgangsmåter du har brukt. På en tentamen eller en eksamen vil GeoGebra naturlig nok kun være tilgjengelig på del 2.

Eksempel:

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (2,5)

b) Hva blir y når x er 12?

c) Hva blir x når y er 20?



1. Markerer punktene (0,0) og (2,5)

2. Trekker deretter en linje (stråle) fra det første punktet gjennom det andre

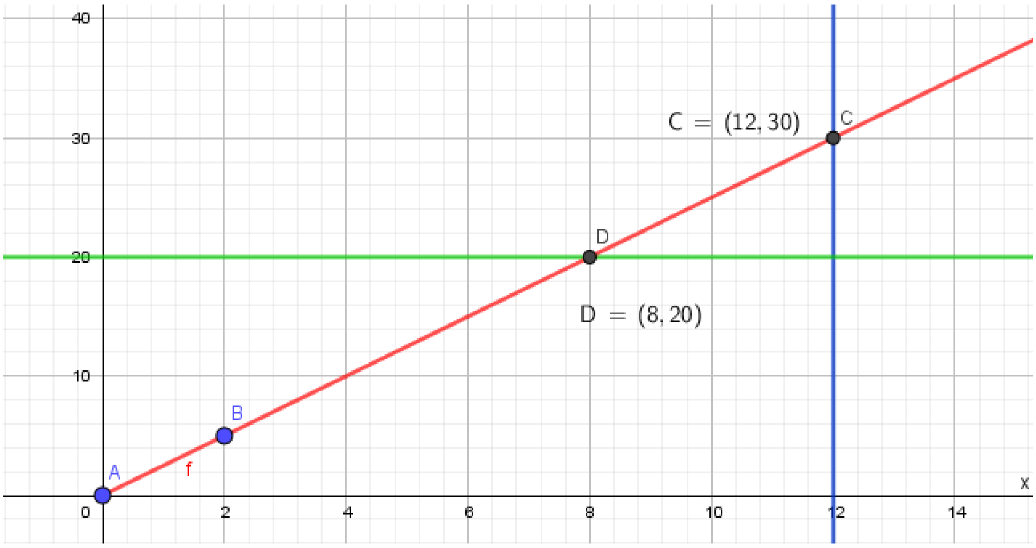
3. Finner den oppgitte *x*-verdien og leser av den tilhørende *y*- verdien

4. Finner den oppgitte *y*-verdien og leser av den tilhørende *x*-verdien

b) $y = 30$ når $x = 12$

c) $x = 8$ når $y = 20$

I GeoGebra:



Fremgangsmåte:

Skrev inn punktene (0,0) og (2,5)

Brukte «stråle gjennom to punkt», fikk stråle f

Skrev x=12, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt C

Skrev y=8, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt D

(Svarene blir de samme.)

Løs alle oppgavene nedenfor både for hånd og i GeoGebra. Til de første oppgavene har vi laget ferdige koordinatsystemer. I den siste oppgaven må du tenke gjennom tallene på x- og y-aksen selv.

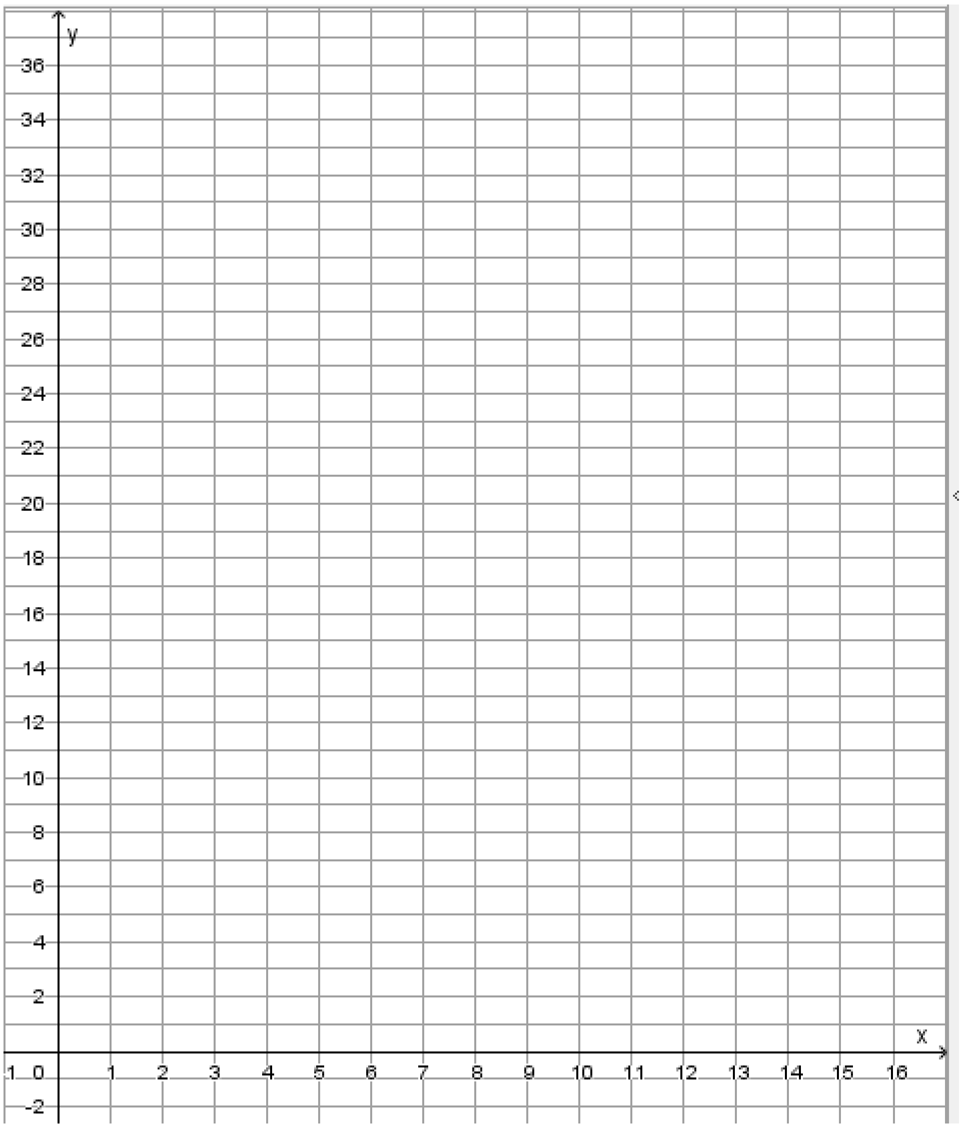
Oppgave 8

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (4,6)

b) Hva blir *x* når *y* er 22?

c) Hva blir *y* når *x* er 14?

d) Hva blir *y* når *x* er 9?



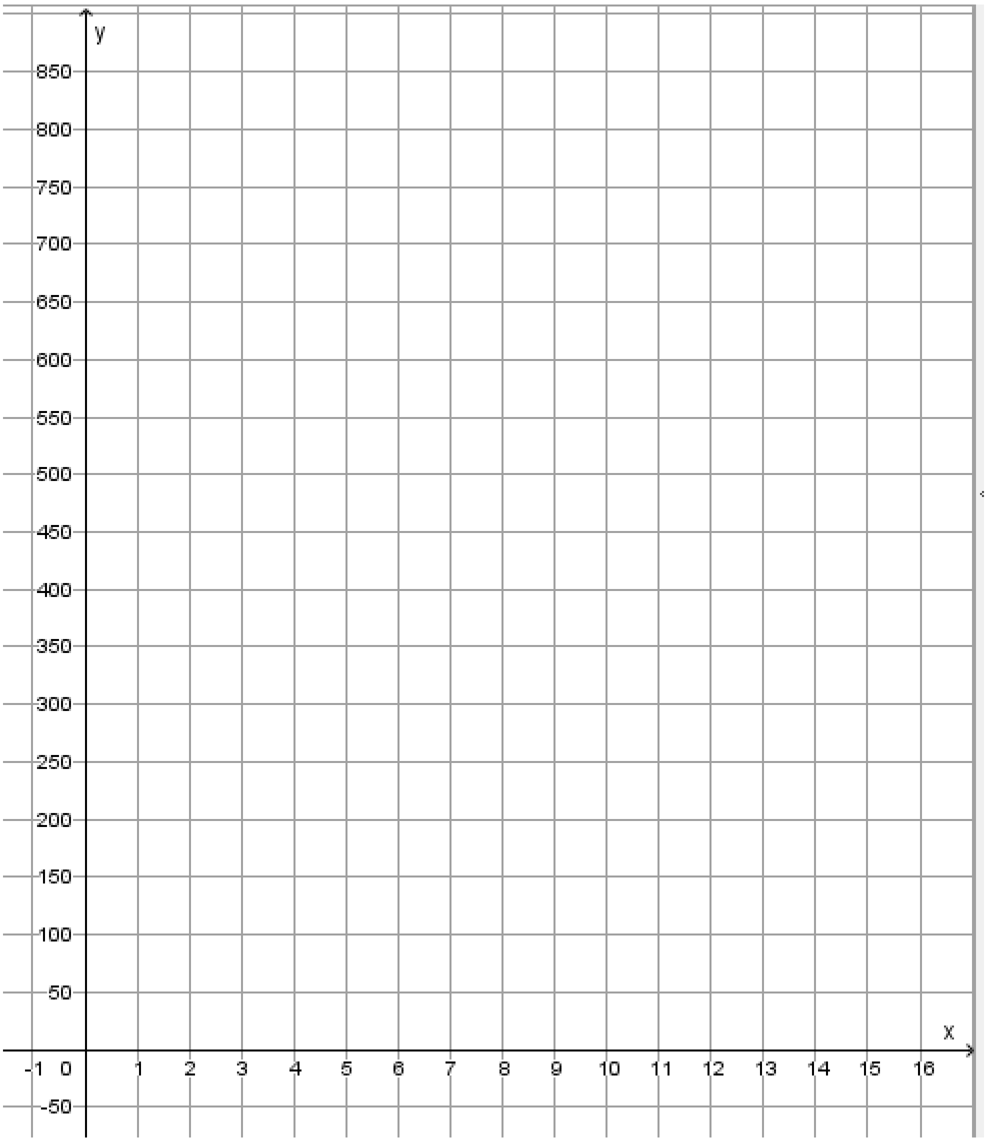
Oppgave 9

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (3,150)

b) Hva blir *x* når *y* er 700?

c) Hva blir *y* når *x* er 8?

d) Hva blir *x* når *y* er 575?



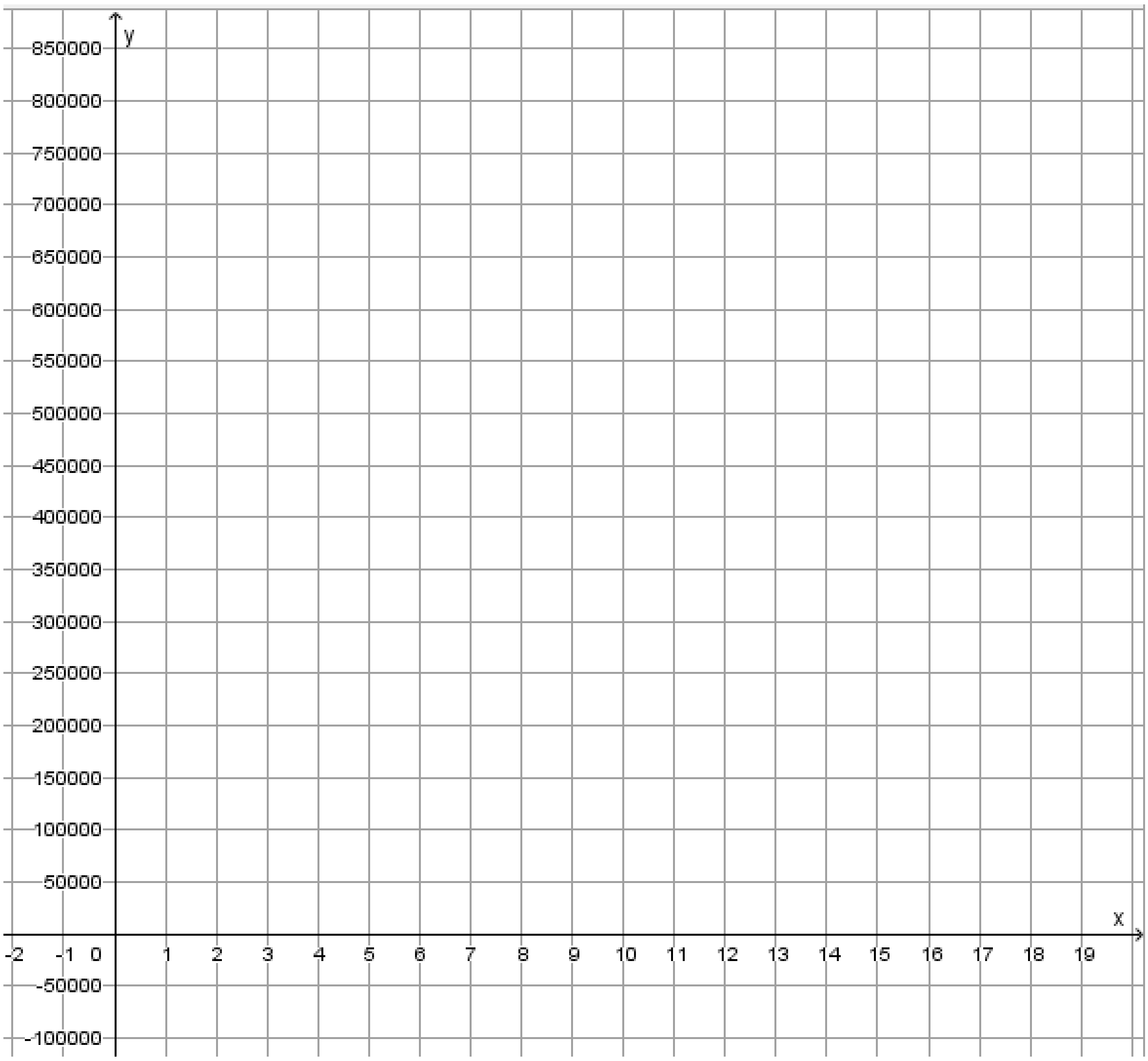
Oppgave 10

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (1,50000)

b) Hva blir *x* når *y* er 250 000?

c) Hva blir *y* når *x* er 14?

d) Hva blir *x* når *y* er 425 000?



Oppgave 11

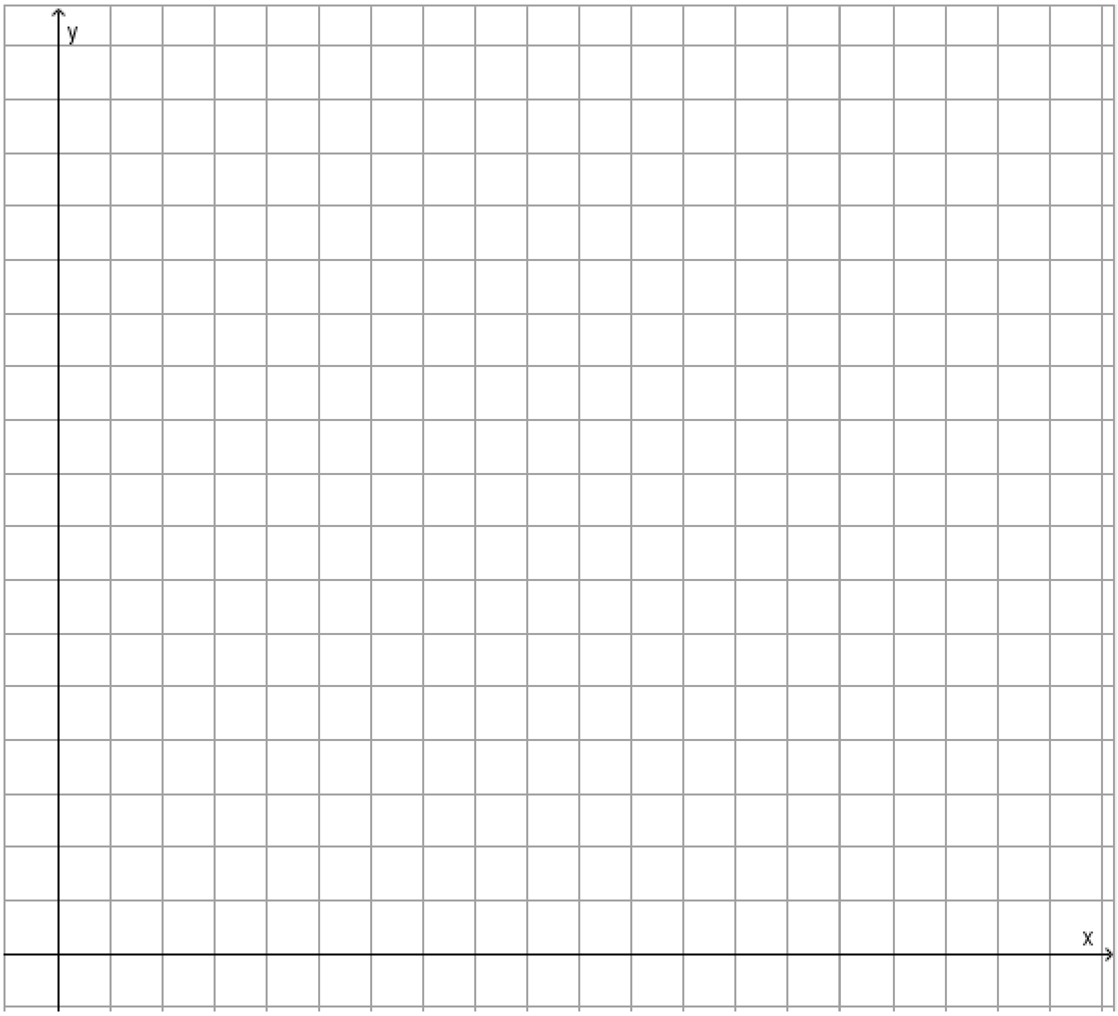
a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (3,8)

b) Hva blir *x* når *y* er 32?

c) Hva blir *y* når *x* er 9?

d) Hva blir *x* når *y* er 18?

e) Hva blir *y* når *x* er 5?



2.2 Rette linjer med startverdi

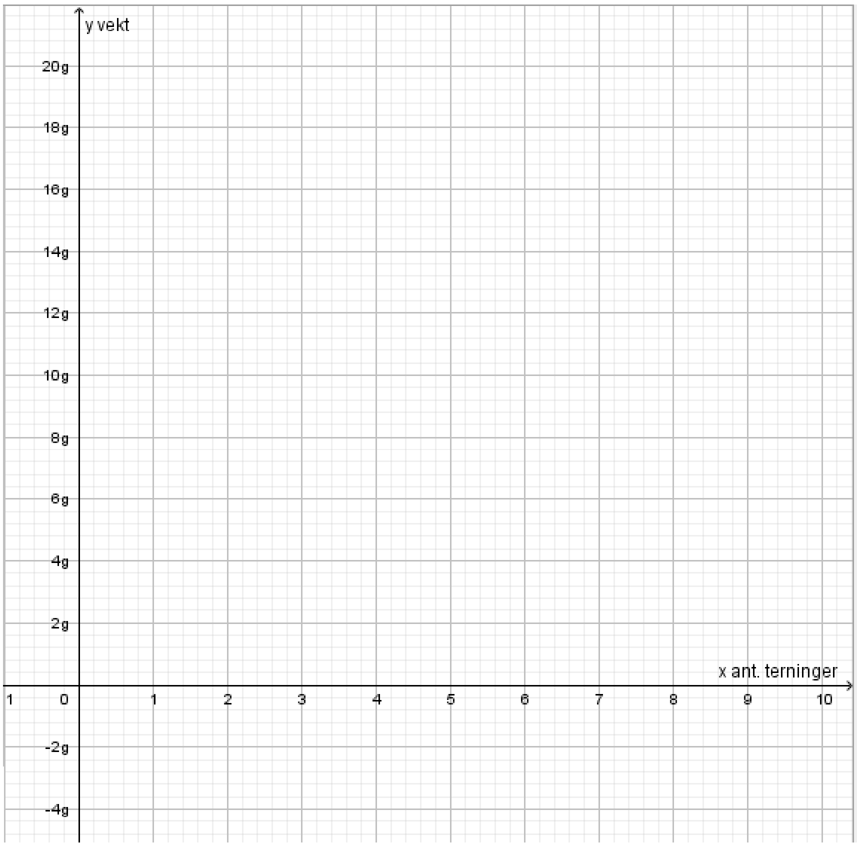
Utforskende oppgave – Finne stigningstall og konstantledd

Funksjoner på formen $y = ax + b$

Forsøk 1: læreren legger terninger oppi en kopp vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		

Forsøk 2: læreren tar terninger ut av en kopp vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		

Forsøk 3: læreren legger terninger på en vekt som ikke var justert vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		



Marker punktene fra forsøkene over i koordinatsystemet til venstre, og trekk de lineære grafene.

Ved hvilket antall terninger blir vekta til forsøkene like?

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

2.3. Noen begreper

Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*. Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

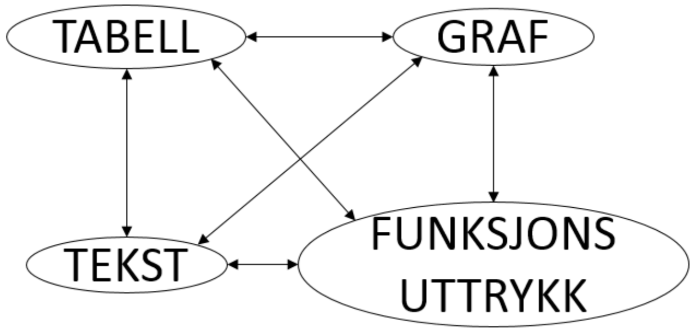
Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

1) en *tabell*
2) en *graf*
3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.
4) En tekst



Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for x.
Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for y.

Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr
Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr
Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3{,}5 = 70$ kr

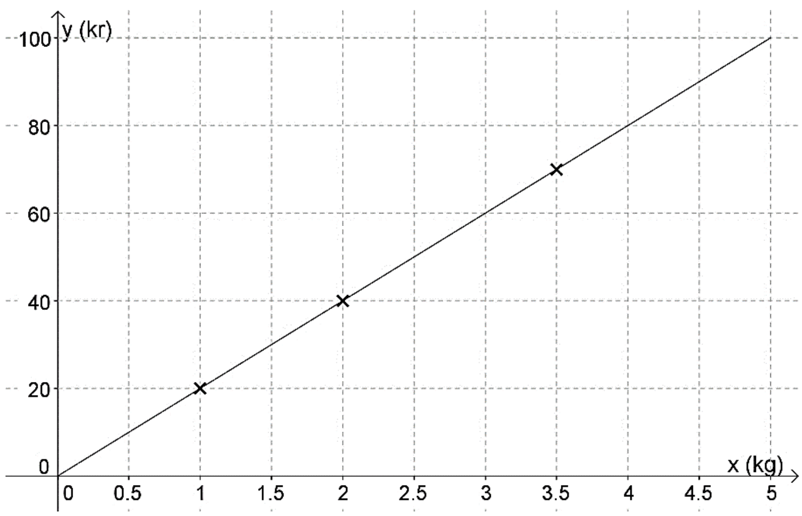
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (x) og prisen av posen (y) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenheten*e i tabellen.

Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *grafen* til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

Viktige begreper

Funksjon	
Konstantledd	
Stigningstall	
Variabel	
Funksjonsuttrykk	
Punkt	
Graf	
Lineær funksjon	

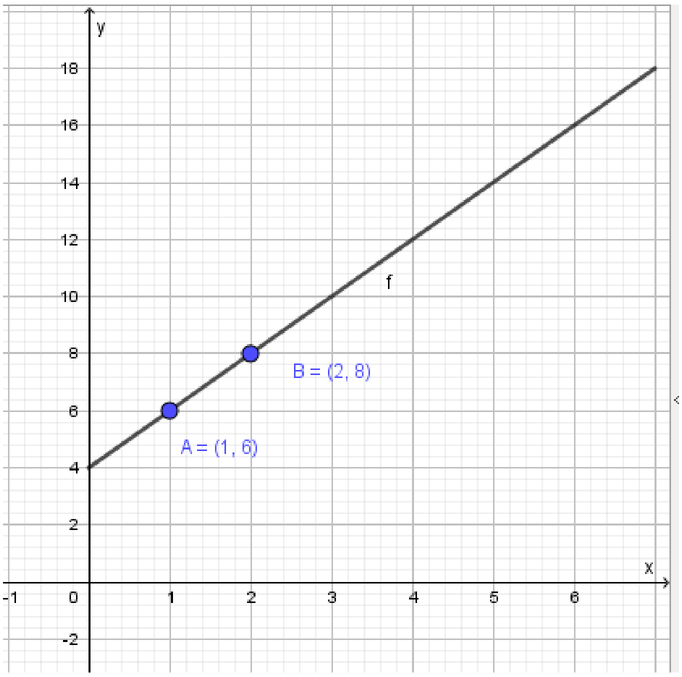
2.4 Lineære funksjoner

I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

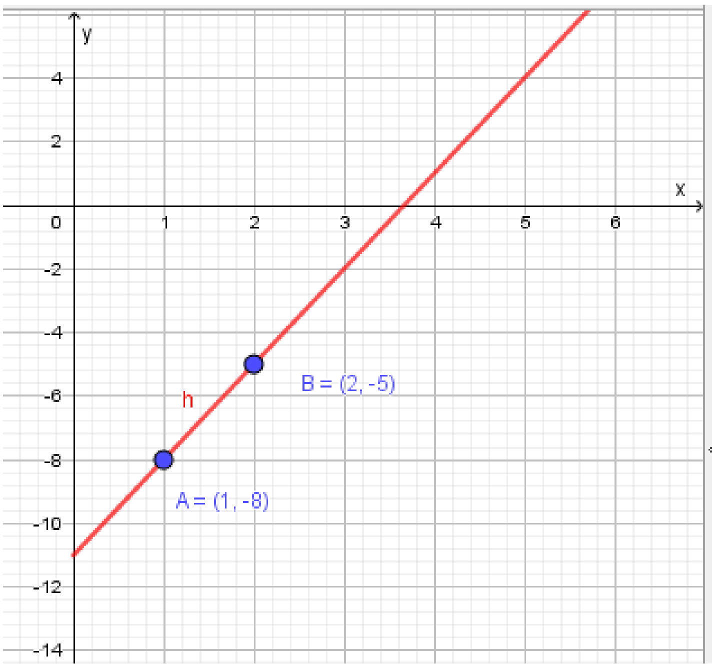
Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

Oppgave 12

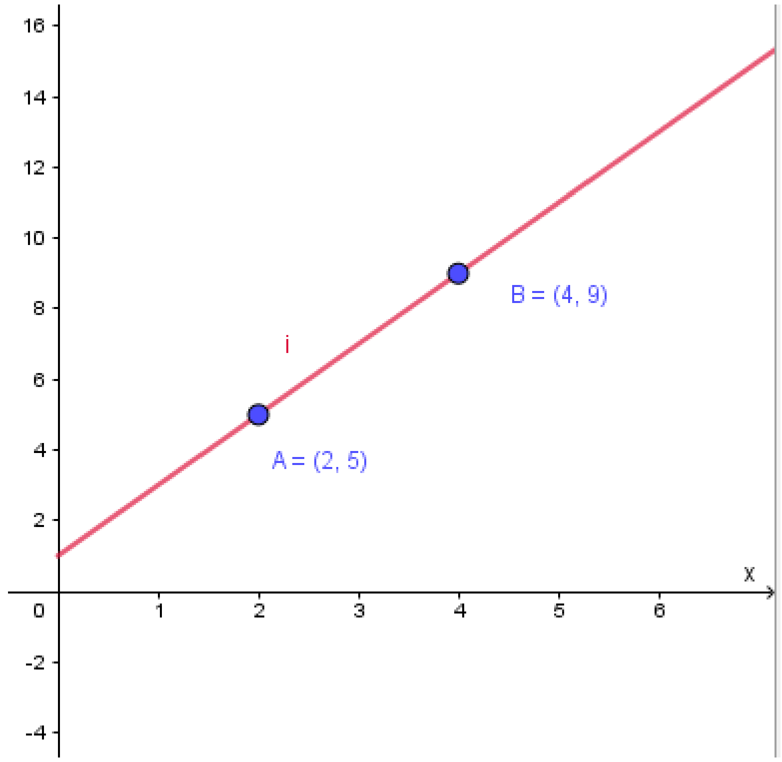
De lineære funksjonene *f. g, h og i* går gjennom punktene A og B. Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonen, og skriv funksjonsuttrykket til *f* på formen $y = ax + b$



a = _________ b = _________ *f*(x) = ______________________

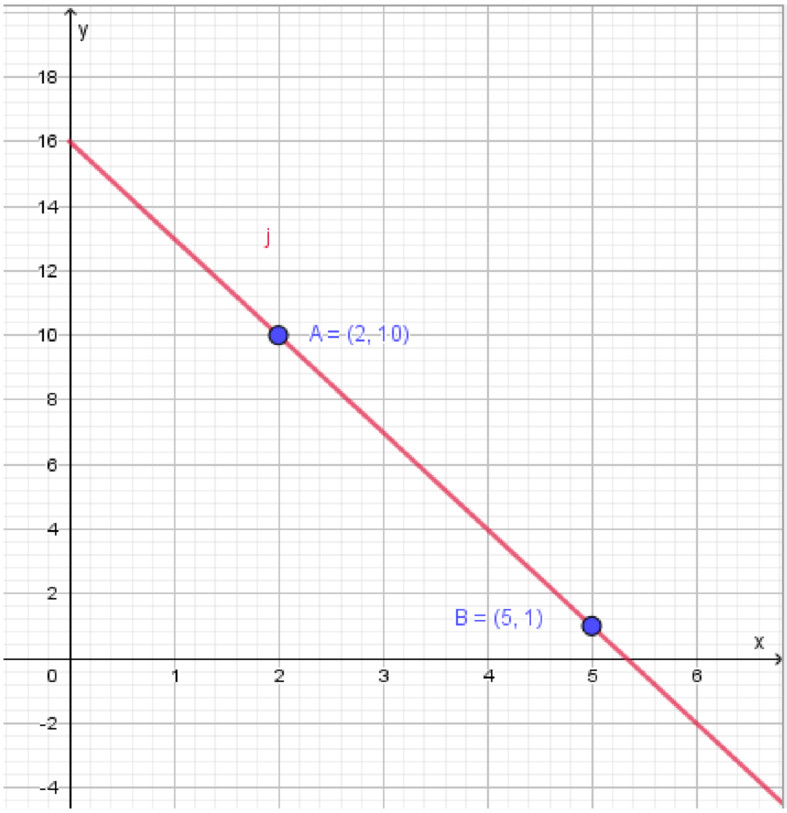


a = _________ b = _________ *h*(x) = ______________________



16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
5
6
x
i
B = (4, 9)
A = (2, 5)

a = _________ b = _________ *i*(x) = ______________________



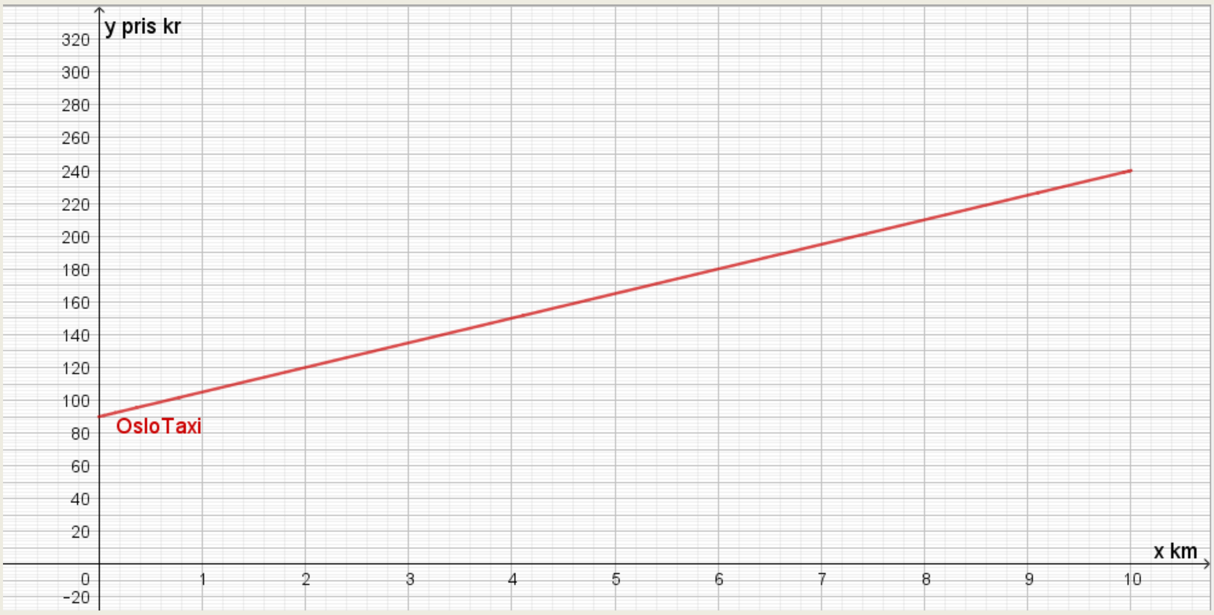
y
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
5
6
x
j
A = (2, 10)
B = (5, 1)

a = _________ b = _________ *j*(x) = ______________________

2.5 Praktisk bruk av lineære funksjoner

Oppgave 13

Når du kjører taxi er det en sammenheng mellom hvor langt du kjører og hvor mye du betaler. I tillegg må du betale en startpris. Prisen *y* er en funksjon av *x* antall km + startprisen. Grafen nedenfor viser denne sammenhengen for OsloTaxi.



a) Omtrent hvor mye må du betale for å kjøre 5 km med en taxi fra OsloTaxi?
b) En kunde betalte 220 kr. Omtrent hvor langt kjørte denne kunden?
c) Alle taxier har en startpris, det vil si hva taksameteret står på idet du setter deg inn i taxien. Hvor høy er startprisen til OsloTaxi?
d) I tillegg må du betale for hver enkelt km. Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut prisen per km.
e) Sammenhengen mellom ant. km og pris kan skrives på formen y = ax + b, der y er pris og x er antall km. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til prisen du betaler for å kjøre OsloTaxi.

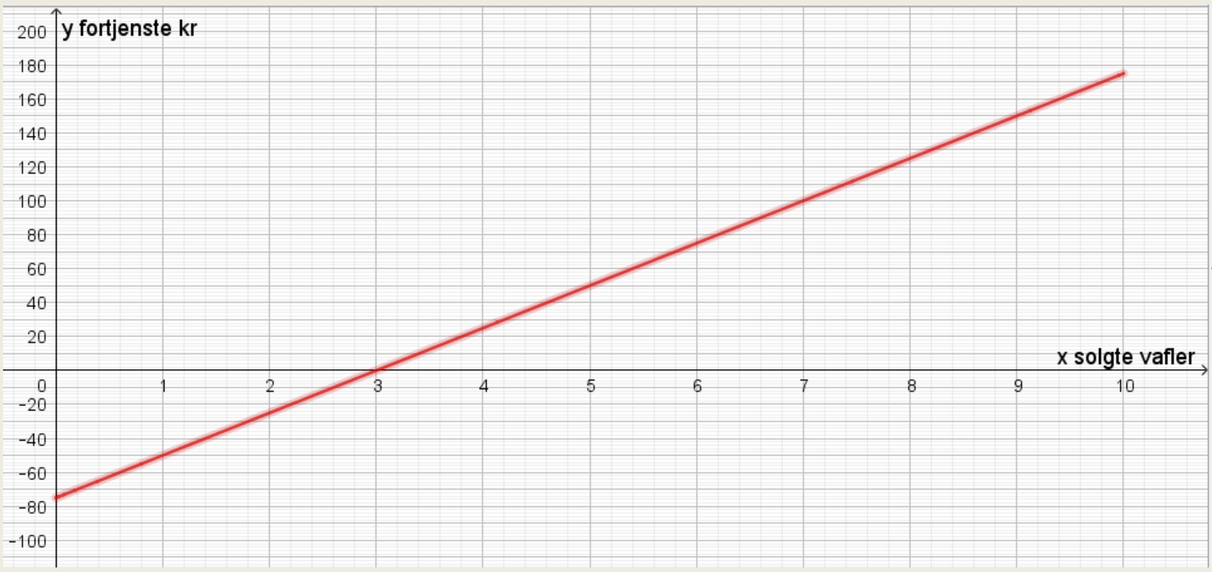
Oppgave 14

En familie hadde vært på ferie, og ønsket å lage en digital fotobok av bildene. Familien må betale en viss sum for selve boken. I tillegg øker prisen for hvert bilde med et fast beløp. Prisen *y* er en funksjon av *x* antall bilder + prisen for boken. Bruk tabellen nedenfor til å finne ut prisen for selve boken og prisen per bilde.

Antall bilder	10	20
Pris for fotoboken	300	350

Oppgave 15

Noen barn ønsket å selge vafler. De kjøpte en stor pose vaffelrøre og solgte vaflene til forbipasserende. Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom hvor mange vafler de solgte og hvor mye de tjente. Fortjenesten *y* er en funksjon av *x* ant. solgte vafler – prisen på vaffelrøra.



a) Omtrent hvor mye tjente de dersom de solgte 6 vafler?
b) Etter 1 time hadde de tjent 150 kr. Hvor mange vafler hadde de da solgt?
c) Hvor mye betalte de for posen med vaffelrøre?
d) Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut prisen per vaffel.
e) Sammenhengen mellom ant. solgte vafler og fortjeneste kan skrives på formen y = ax + b, der y er fortjeneste og x er antall solgte vafler. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til fortjenesten til disse barna.

Oppgave 16

Kjøtt som skal grilles bør ha romtemperatur før det legges på grillen. Et kjøttstykke tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken. Temperaturen stiger med et lavt antall grader per minutt. Temperaturen *y* er en funksjon av *x* antall minutter – temperaturen kjøttet hadde da det ble tatt ut av fryseren. Bruk tabellen nedenfor til å finne ut tepmperaturen på det frosne kjøttet og hvor mange grader temperaturen stiger med per minutt.

Antall minutter på kjøkkenbenken	60	360
Temperatur på kjøttet	- 12	18

Oppgave 17

Selbu sjokoladefabrikk selger gaveesker med sjokolade, hvor du betaler 40 kr for en gaveeske og 15 kr per sjokoladebit. Prisen *y* du betaler er en funksjon av *x* antall sjokoladebiter + gaveeska.

a) Fyll ut tabellen nedenfor, og skriv funksjonsuttrykket til prisen for gaveeske + sjokolade.

Antall sjokolader	0	2	6
Pris			

b) Marker punktene i koordinatsystemet på nedenfor

c) Tegn grafen for prisen for 0 til 15 sjokoladebiter. Skriv navn på aksene.

Bruk grafen til å svare på spørsmålene nedenfor.

d) Omtrent hvor mye må du betale for 9 sjokoladebiter i en gaveeske?

e) En kunde betalte 220 kr. Hvor mange sjokoladebiter kjøpte denne kunden?

Oppgave 18

Tenk deg at du kjøper en ny mobiltelefon velger tilbudet om delbetaling for telefonen. Det betyr at prisen på telefonen deles opp slik at du betaler et fast beløp per måned frem til hele prisen er betalt og telefonen er din. Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom hvor mange måneder du har gått siden du kjøpte telefonen og hvor mye du har igjen å betale. Restbeløp *y* er en funksjon av telefonens pris - *x* ant. måneder.

a) Omtrent hvor høyt er restbeløpet når det har gått 7 måneder?
b) Hvor lang tid tar det før telefonen nedbetalt?
c) Hvor mye kostet telefonen?
d) Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut nedbetaling per måned.
e) Sammenhengen mellom ant. måneder og restbeløp kan skrives på formen y = ax + b, der y er restbeløp og x er antall måneder. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til restbeløpet på denne telefonen.

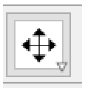
2.4 Lineære funksjoner i GeoGebra

Vi kan bruke en graftegner (GeoGebra) til å tegne lineære funksjoner. Vi skriver da inn funksjonsuttrykket i GeoGebra. Det er viktig å sette navn på aksene i koordinatsystemet.

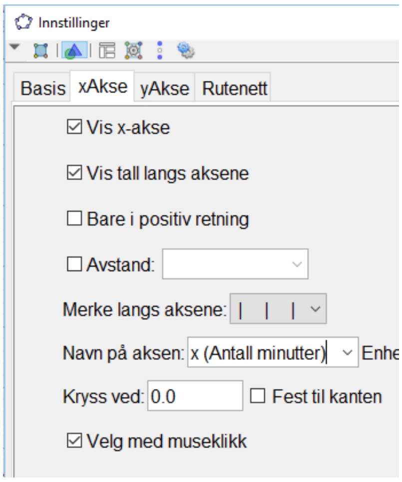
Eksempel:

Ole skal lade opp mobiltelefonen sin. Displayet viser at han har 23% igjen på batteriet og batteriet lades med 1% i minuttet. Uttrykket f(x) = x + 23 viser oppladingsprosenten til batteriet etter x minutter. Vi skal tegne funksjonen de første 60 minuttene.

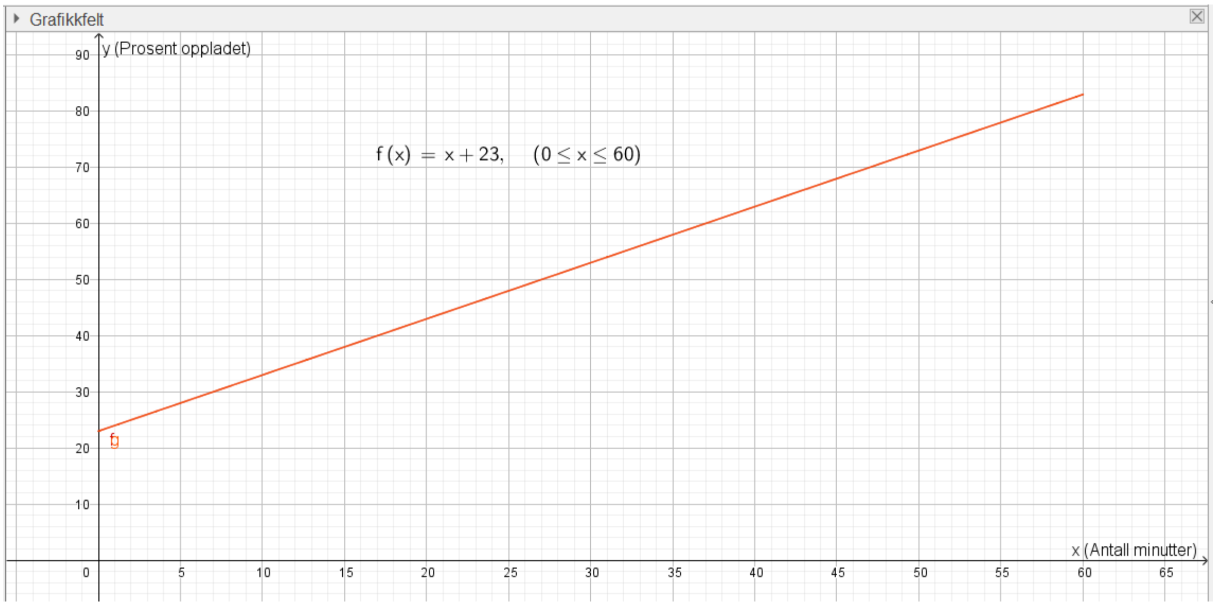
Vi går på **Skriv inn** og velger **Funksjon(Funksjon,start,slutt)**. Vi skriver inn det som står etter = i uttrykket og 0 på start og 60 på slutt slik **Funksjon(x+23,0,60)** og trykker enter.

Vi stiller aksene med  og drar i x og y-aksen slik at grafen legger seg over x-aksen fra 0 til 60.

Vi setter navn på aksene ved å **høyreklikke i Grafikkfeltet**, velge **Grafikkfelt** og x- og y-akse etter tur. Der det står **Navn på aksen** skriver vi inn hva x og y er.



Da blir bildet i GeoGebra slik:



Oppgave 19

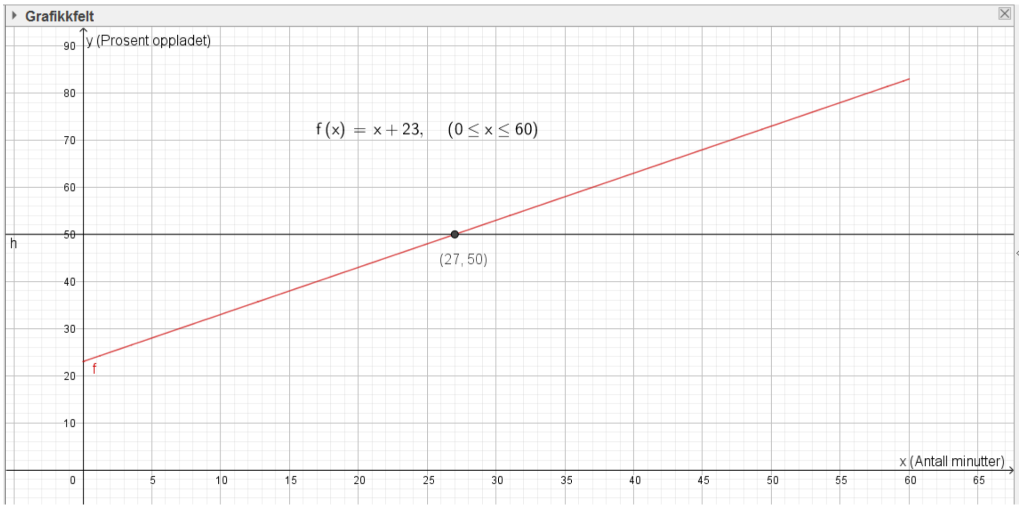
Bruk funksjonsuttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2. Tegn dem i hvert sitt koordinatsystem i GeoGebra og la $0 \leq x \leq 10$.

Vi kan bruke grafen til å finne informasjon om situasjonen vi har tegnet.

Eksempel.

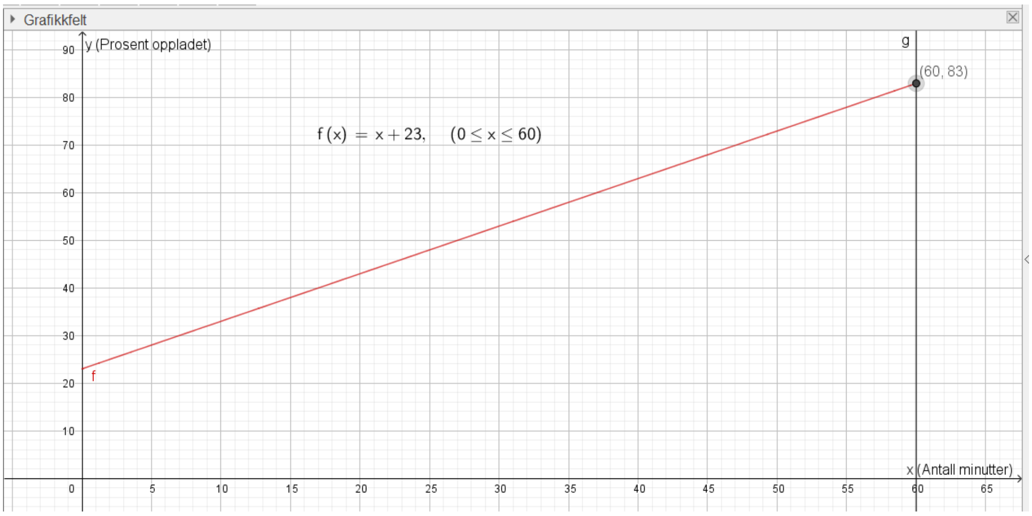
Ole lurer på når batterikapasiteten er på 50% og hvor mange prosent han har på batteriet etter 60 minutter.

Vi finner batterikapasiteten på y-aksen og skriver derfor inn **y = 50** på **Skriv inn** og trykker enter. Vi får da frem en rett linje som krysser grafen. Vi leser av x-verdien i skjæringspunktet med grafen ved å bruke **Skjæring mellom to objekt**.



Vi ser at batterikapasiteten er 50% etter 27 minutter.

Når vi skal finne batterikapasiteten etter 60 minutter, gjør vi det samme som ovenfor. Men vi finner minuttene på x-aksen. Derfor skriver vi inn **x = 60** på **Skriv inn** istedenfor. Vi leser så av y-verdien i skjæringspunktet med grafen.



Vi ser at batterikapasiteten er på 83% etter 60 minutter.

Du må alltid lime inn GeoGebra bildet i besvarelsen din og skrive svartekst og fremgangsmåte (hvilke kommandoer du har brukt i GeoGebra)

Sjekkliste for GeoGebra-oppgaver:

- ☐ Har jeg skrevet inn aksetitler?
- ☐ Har jeg trukket funksjonsuttrykket inn i koordinatsystemet?
- ☐ Har jeg trukket alle punktene inn i koordinatsystemet?
- ☐ Synes hele grafen på bildet?
- ☐ Har jeg skrevet framgangsmåte på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg skrevet en svarsetning på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg tydelig oppgavenummer?

Oppgave 20

Vi har en vekt og et begerglass. Vi slår på vekta og setter begerglasset på vekta. Vi legger i en og en terning og leser av hva vekta viser. Uttrykket

$$y = 5x + 100$$

viser vekta *y* når vi har lagt på *x* antall terninger.

a) Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 20
b) Hva viser vekta når vi har lagt på 7 terninger?
c) Hvor mange terninger ligger det på vekta når den viser 150 gram?
d) Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
e) Hvor mye veier en terning?

Oppgave 21

Per fyller bensintanken helt full. Han vil se hvor langt han kan komme på en full tank. Uttrykket

$$y = -0{,}5x + 45$$

viser hvor mange liter han har igjen på tanken når han har kjørt x mil.

a) Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 100
b) Hvor mye har Per igjen på tanken når han har kjørt 30 mil?
c) Hvor langt har Per kjørt når det er 10 liter igjen på tanken?
d) Hvor langt har han kjørt når tanken er tom?
e) Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
f) Hvor mange liter bruker bilen per mil?

3. Eksponentielle funksjoner

3.1 Flere prosentvis like endringer

I praksis kan det være lett å blande eksponentiell og lineær vekst, et mål er derfor å kunne avgjøre når veksten er eksponentiell og når den er lineær.

«Ja, Nei, Hvorfor?»

Timelønna til Peter er 200 kr. Han får to ulike tilbud om lønnsøkning:

Tilbud A: 10 % etter 6 måneder, deretter nye 10 % etter 12 måneder.	**Tilbud B: 20 kr etter 6 måneder, deretter nye 20 kr etter 12 måneder**

Vil Peter ha den samme lønna etter 12 måneder uavhengig av hvilket tilbud han velger?

Eksempel 1

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Hvor mye er det på konto etter 1 år? Etter 2 år? Hvorfor blir økningen forskjellig disse årene?

Etter 1 år vil si at 10000 kr har økt med 5 %. 1 % av 10000 kr er $\frac{10000}{100} = 100$ kr.
5 % er da $100 \cdot 5 = 500$. Etter 1 år er det 10000 + 500 = 10500 kroner i fondet.

Etter 2 år vil si at 10500 kr har økt med 5 %. 1 % av 10500 kr er $\frac{10500}{100} = 105$ kr
5 % er da $105 \cdot 5 = 525$. Etter 2 år er det 10500 + 525 = 11025 kroner i fondet.

Det første året øker fondet med 500 kr, det andre året øker fondet med 525 kr. Økningen er altså større det andre året, fordi tallet vi regner 5 % av er større.

Oppgave 22

Ved en skole er det 1000 elever. Antallet elever **vokser** med omtrent 10 % hvert år.

a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? ____________________________

b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? ____________________________

c) Hvorfor er endringen eksponentiell? ___________________________________

Oppgave 23

a) En flatskjerm koster 10 000 kr. Vi antar at verdien **avtar** med 10 % hvert år.

b) Hva er verdien til flatskjermen etter 1 år? ________________________________

c) Hva er verdien til flatskjermen etter 2 år? ________________________________

d) Hvorfor er endringen eksponentiell? ___________________________________

Oppgave 24

Tabellen under viser økningen i antall treningstimer til en svømmer fra hun er 15 til hun er 20 år.

a) Regn ut økningen i antall timer fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

b) Regn ut økningen i prosent fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

c) Er økningen i antall treningstimer eksponentiell? Begrunn svaret.

Alder	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Timer	**500**	**550**	**605**	**665**	**730**	**803**
Økning i timer						
Økning i prosent						

Ved eksponentiell vekst er endringen **prosentvis lik** per enhet.

3.2 Uttrykket til eksponentielle funksjoner

Fra kapitlet om prosent og oppgavene over ser vi at verdien alltid endrer seg med samme prosent fra en periode til den neste når veksten er eksponentiell. Da kan vi skrive verdien etter x år som ett regnestykke. Vi ser på situasjonen fra eksempel 2:

Eksempel 2

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Vekstfaktoren er $100\ \% + 5\ \% = 105\ \% = \frac{105}{100} = 1{,}05$

Startverdi: 10000

Uttrykk for verdi etter 1 år: $10000 \cdot 1{,}05$

Verdien etter 2 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^2$

Verdien etter 3 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^3$

Verdien etter x år: $10000 \cdot \underbrace{1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot \ldots \cdot 1{,}05}_{x \text{ antall år}} = 10000 \cdot 1{,}05^x$

Utrykk for eksponentiell vekst: **Startverdi · Vekstfaktor**$^{\textbf{antall perioder}}$

Oppgave 25

Skriv opp uttrykket for antallet elever om x år ved skolen i oppgave 8

____

Oppgave 26

Skriv opp uttrykket for verdien til flatskjermen om x år i oppgave 9

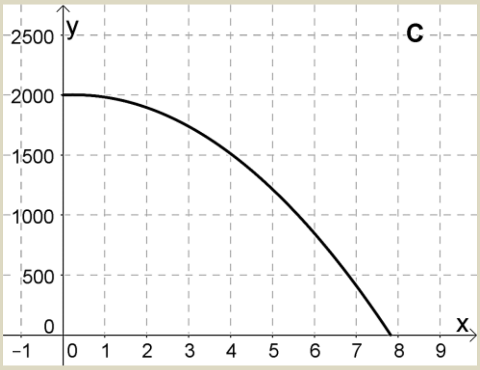
____

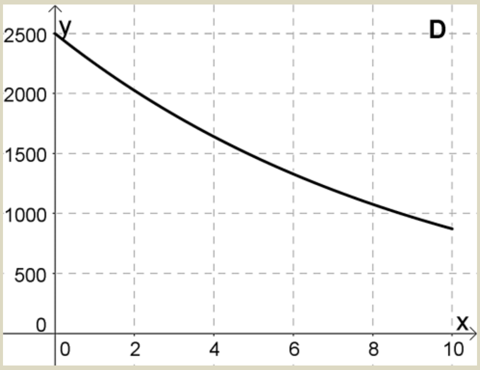
3.3 Grafen til eksponentielle funksjoner

Hvordan ser grafen ut til noe som vokser eller avtar med samme prosent?

Oppgave 27

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser eksponentiell vekst.

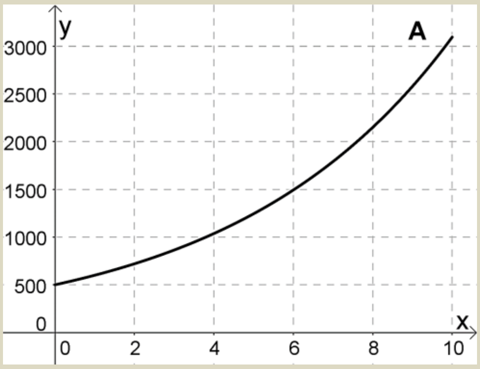


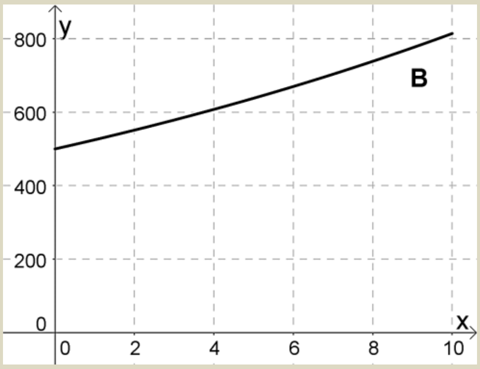


Forklar hvorfor grafen(e) viser eksponentiell vekst

Oppgave 28

Hvilken graf nedenfor er grafen til funksjonen $f(x) = 500 \cdot 1{,}20^x$? Begrunn svaret





3.4 Eksponentielle funksjoner i GeoGebra

Vi kan jobbe med eksponentialfunksjoner i GeoGebra på samme måte som med lineære funksjoner.

Oppgave 29

Da Dennis ble født satte foreldrene inn penger i et aksjefond. Uttrykket

$$f(x) = 10000 \cdot 1{,}05^x$$

viser hvor mye han har i aksjefondet etter x år.

a) Tegn grafen til f når x er mellom 0 og 20 år.
b) Hvor mye har Dennis i aksjefondet etter 10 år?
c) Når har han mer enn 15 500 kr i aksjefondet?
d) Hvor mange kroner satte foreldrene til Dennis inn i aksjefondet da han ble født? Forklar.
e) Hvor mange prosent rente får han i avkastning per år? Forklar.

Oppgave 30

Funksjonen

$$E(x) = 650 * 0{,}9^x$$

viser elevtallet ved en skole x år etter 2010.

a) Hva forteller tallene i uttrykket?
b) Tegn grafen til E for perioden 2010 til 2020.

Funksjonen

$$N(x) = 355 * 1{,}10^x$$

viser elevtallet ved naboskolen x år etter 2010.

c) Hva forteller tallene i uttrykket? Forklar.
d) Tegn grafen til N i det samme koordinatsystemet som E.
e) Når er det like mange elever på de to skolene.
f) I 2016 ble de to skolen slått sammen. Hvor mange elever var det da ved den nye skolen?

4. Polynomfunksjoner

"Polynom" betyr "flere ledd". En polynomfunksjon består av en sum av potenser av *x*. Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

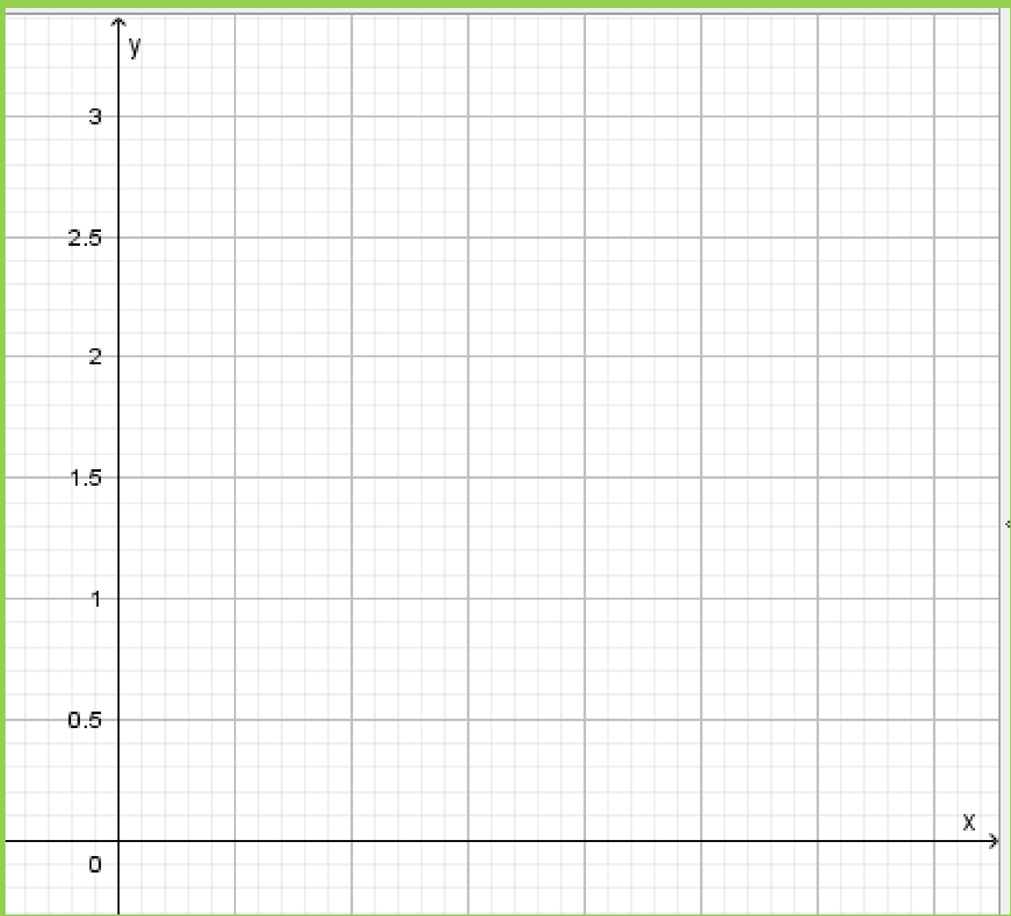
Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon.*

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene *f* og *g* ovenfor.

Utforskende oppgave – Grafen til en polynomfunksjon

En lærer kaster en ertepose opp i lufta, og lar den lande på gulvet. Skisser en graf som beskriver erteposens bevegelse i koordinatet nedenfor. Hvilke navn skal x- og y-aksen?



Hvilke spørsmål kan vi stille til en slik graf?

Akseintervall	
Definisjons-område	
Toppunkt	
Bunnpunkt	
Nullpunkt	

4.1. Spørsmål til polynomfunksjoner

Vi kan stille de samme spørsmålene til polynomfunksjoner som til lineære funksjoner. Siden grafen til polynomfunksjoner endrer retning kan vi i tillegg stille noen andre spørsmål.

Eks:
Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter *x* sekunder er ballen tilnærmet *h*(x) meter over bakken, der

$$h(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

Inntegning av grafen

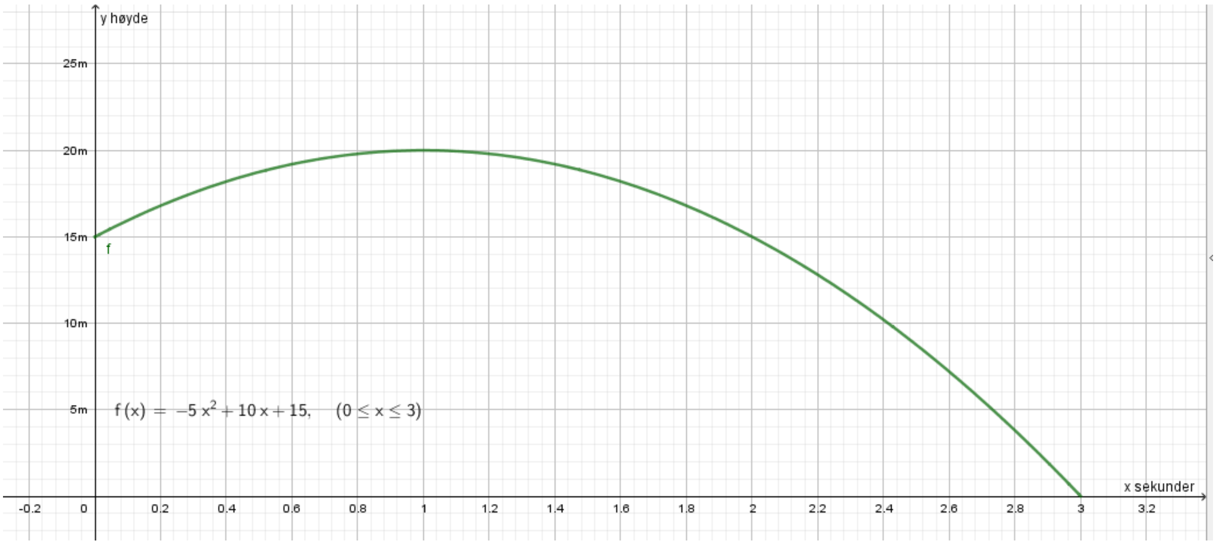
a) Tegn grafen til h når x er mellom 0 og 3 sekunder. Hvor høyt står Karl?
Dette betyr at definisjonsområdet til funksjonen er 0 til 3. Dette kan skrives på andre måter.

Eks:

$0 \leq x \leq 3$

$x \in [0,3]$

Løsning:

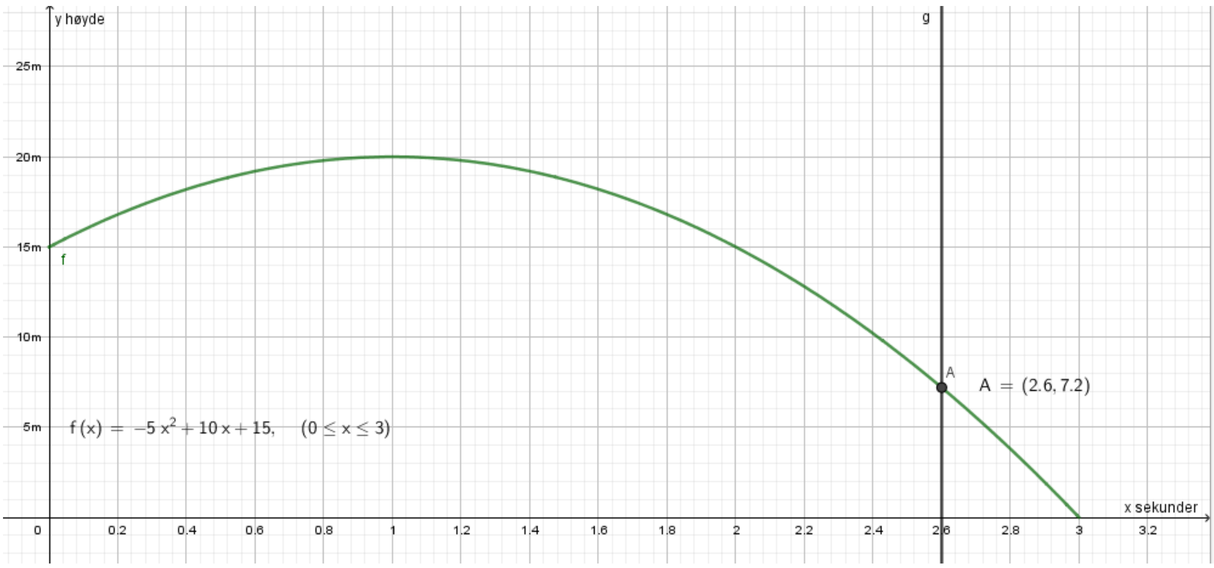


Svar: Karl står 15 meter over bakken. Dette er konstantleddet til funksjonen, og kan enten finnes i funksjonsuttrykket eller der grafen skjærer y-aksen.

Finne en y-verdi når x-verdien er oppgitt – skjæring mellom to objekt

b) Hvor høyt er ballen etter 2,6 sekunder?

2,6 sekunder er x-verdi. Høyden (som vi skal finne) er den tilhørende y-verdien.



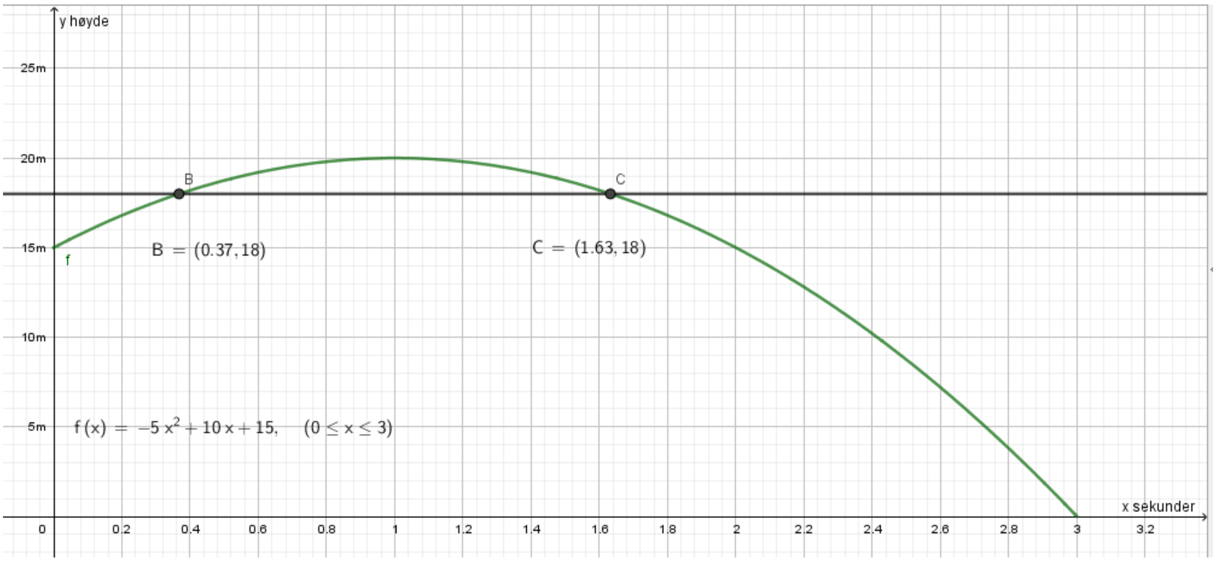
Svar: etter 2,6 sekunder er ballen 7,2 meter over bakken.

Fremgangsmåte: skrev x = 2.6, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt A.

Finne en eller flere x-verdier når y-verdien er oppgitt

c) Når er ballen 18 meter over bakken?

18 meter er y-verdi. Siden ballen er 18 meter over bakken både på vei opp og ned vil denne y-verdien ha 2 tilhørende x-verdier.

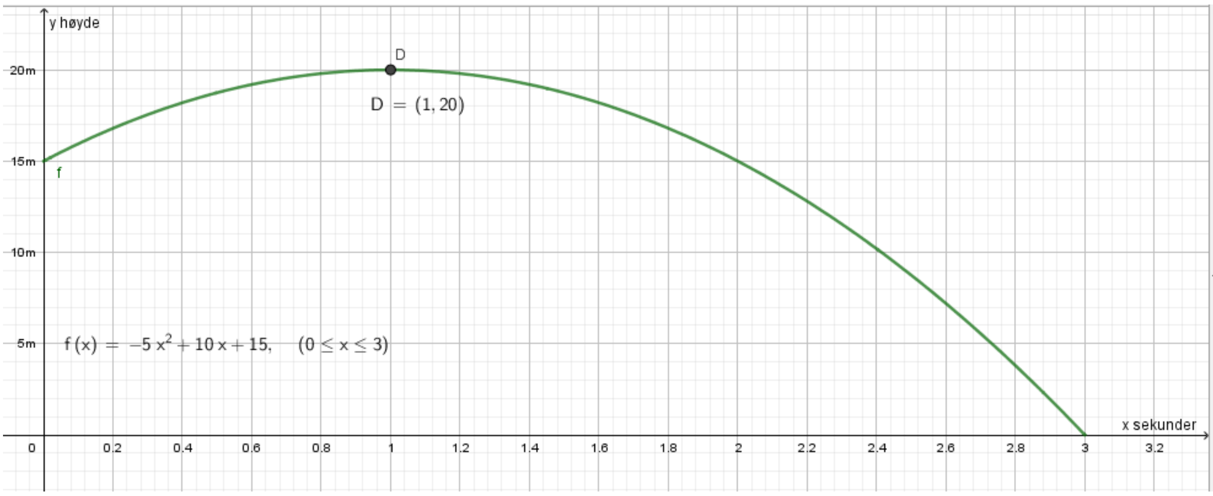


Svar: Ballen vil være 18 meter over bakken etter 0,37 og 1,63 sekunder.
Fremgangsmåte: skrev y = 18, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punktene B og C.

Finne topp- og bunnpunkter - ekstremalpunkt

d) Når er ballen på sitt høyeste? Hvor høyt er den da?

«Ekstremalpunkt» finner punktet der grafen endrer retning. Ofte er dette på det laveste/høyeste punktet. Derfor kan vi ofte bruke ekstremalpunkt for å finne topp- eller bunnpunkt (men ikke alltid).

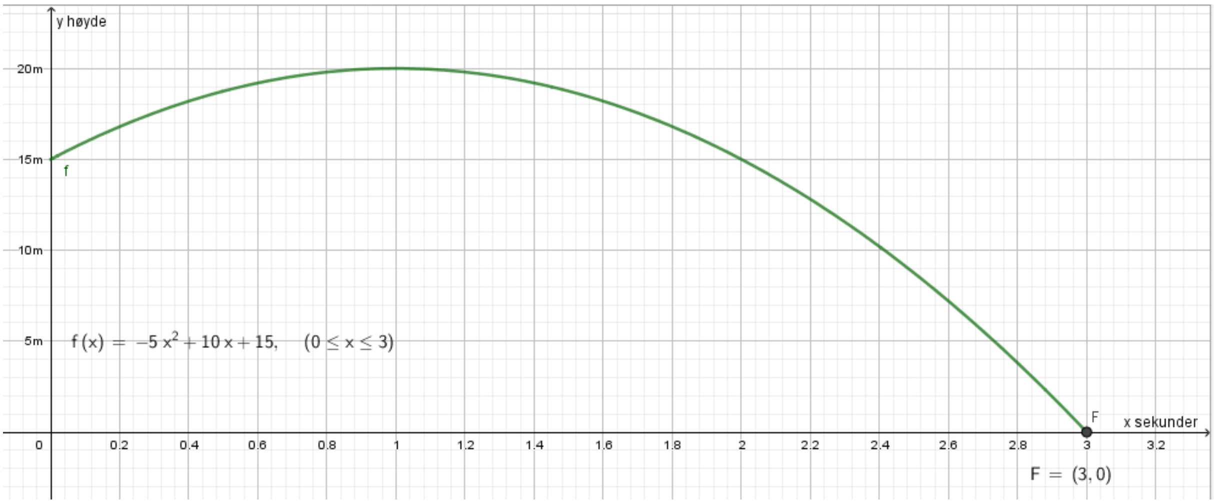


Svar: Ballen er på sitt høyeste etter 1 sekund. Da er ballen 20 meter over bakken.
Fremgangsmåte: brukte «ekstremalpunkt», fikk punkt D.

Finne nullpunkter - nullpunkt

e) Når treffer ballen bakken?

Når grafen skjærer x-aksen er y-verdien = 0. Dette kalles nullpunkt.

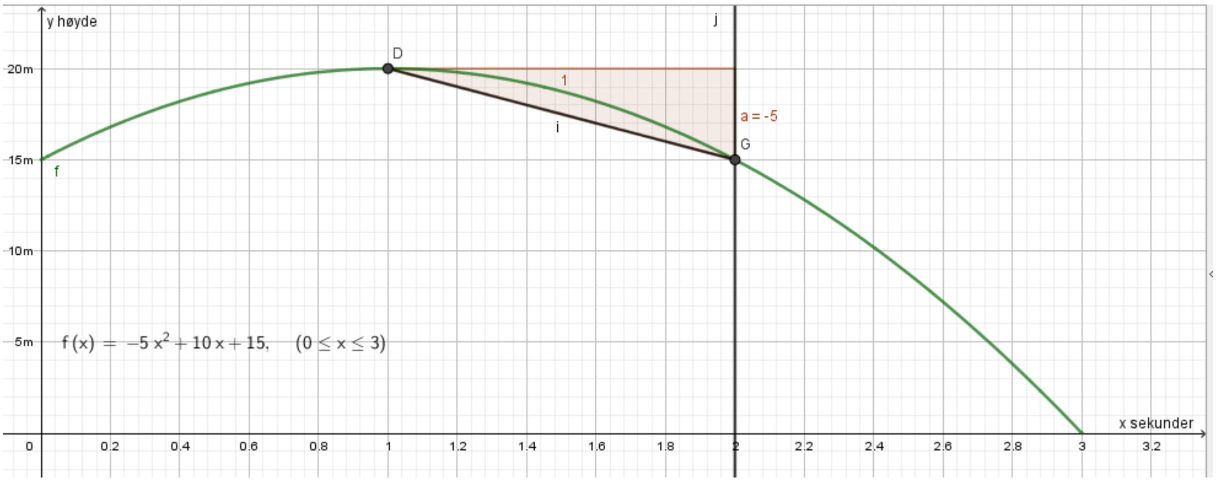


Svar: ballen treffer bakken etter 3 sekunder.
Fremgangsmåte: brukte «nullpunkt», fikk punkt F.

Finne gjennomsnittlig vekstfart mellom to x-verdier

f) Finn gjennomsnittlig vekstfart i ballens høyde mellom 1 og 2 sekunder.

Gjennomsnittlig endring = lik (konstant) endring = lineær funksjon. Vi er ute etter stigningstallet til den rette linja mellom de to oppgitte punktene.



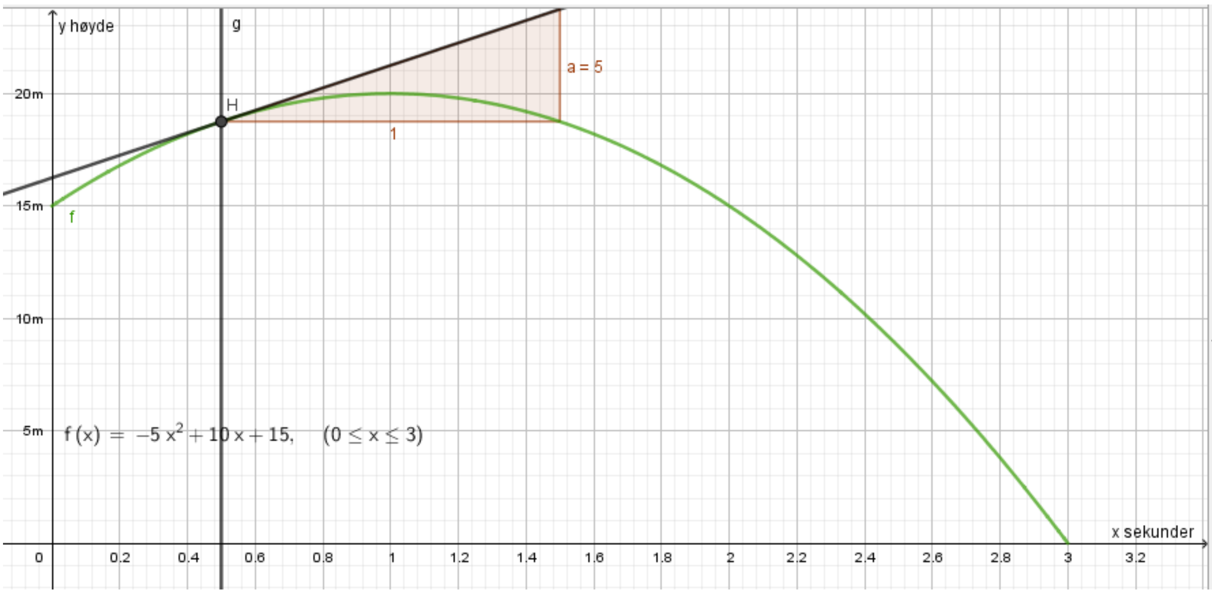
Svar: ballen sank i gjennomsnitt 5 meter per sekund mellom 1 og 2 sekunder.

Fremgangsmåte: skrev x = 2, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt G, brukte «linjestykke mellom to punkt», fikk linje i, brukte «stigning».

Finne momentan vekstfart i et punkt

g) Finn den momentane vekstfarten til *f*(0,5).

Momentan vekstfart forteller hvordan y-verdien endres fra et punkt dersom x øker litt. Vi er ute etter stigningstallet til den rette linja som tangerer punktet og grafen.



Svar: fra 0,5 sekunder stiger ballens høyde med 5 m/sek.

Fremgangsmåte: skrev x = 0.5, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt H, brukte «tangent», fikk linje j, brukte «stigning».

4.2. Praktisk bruk av polynomfunksjoner

Sjekkliste for GeoGebra-oppgaver:

- ☐ Har jeg skrevet inn aksetitler?
- ☐ Har jeg trukket funksjonsuttrykket inn i koordinatsystemet?
- ☐ Har jeg trukket alle punktene inn i koordinatsystemet?
- ☐ Synes hele grafen på bildet?
- ☐ Har jeg skrevet framgangsmåte på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg skrevet en svarsetning på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg tydelig oppgavenummer?

Oppgave 31

Funksjonen h gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.
Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen t år etter 1. januar 1990.

a) Tegn grafen til h for $0 \le t \le 10$.
b) Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjorter var det i kommunen da? Når var hjortebestanden på sitt laveste, og hvor mange hjorter var det i kommunen da?
c) Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
d) Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 – 1. januar 1998?
e) Finn den momentane vekstfarten til $h(2)$, og gi en praktisk tolking av svaret.

Oppgave 32

Funksjonene G og J gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$

$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.
b) Hvor mange kilogram veide hver av de to babyene etter 8 måneder?
c) Når passerte vekta til hver av de to babyene 7 kilogram?
d) Hvor mye vokste Geir og Janne i gjennomsnitt per måned det første leveåret?
e) Finn den momentane vekstfarten til $G(2)$ og $J(2)$. Gi en praktisk tolking av svaret.

Oppgave 33

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \le x \le 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f

b) Noen sørlendinger bader når sjøtemperaturen er høyere enn 14 °C. Når kunne de gjøre dette ifølge modellen?

c) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

d) Bestem $f(100)$ og den gjennomsnittlige endringen i temperatur per dag de første 100 dagene i 2014.

Oppgave 34

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside *x* timer etter midnatt et gitt døgn.

a) Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 24$.

b) Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden? Hvor mange personer var logget på nettsiden da?

c) Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

d Bestem den gjennomsnittlige endringen i antall påloggete per time fra kl. 06.00 til kl. 14.30.

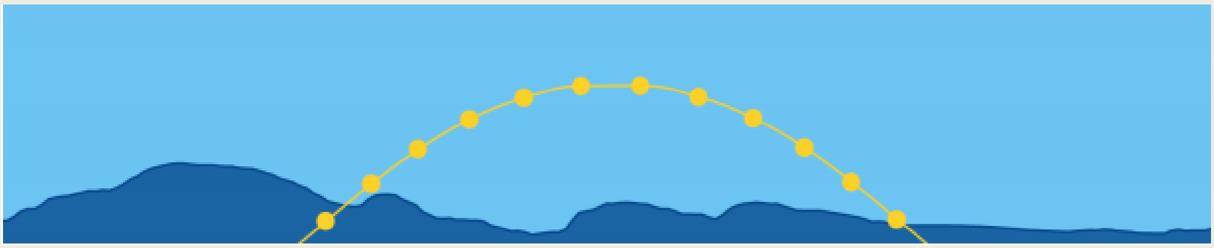
e) Finn den momentane vekstfarten til $x = 19$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 35

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader *B(x)* sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.



a) Bruk graftegner til å tegne grafen til B.

b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?

d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 11.30?

e) Finn den momentane vekstfarten til *B*(20), og gi en praktisk tolking av svaret.

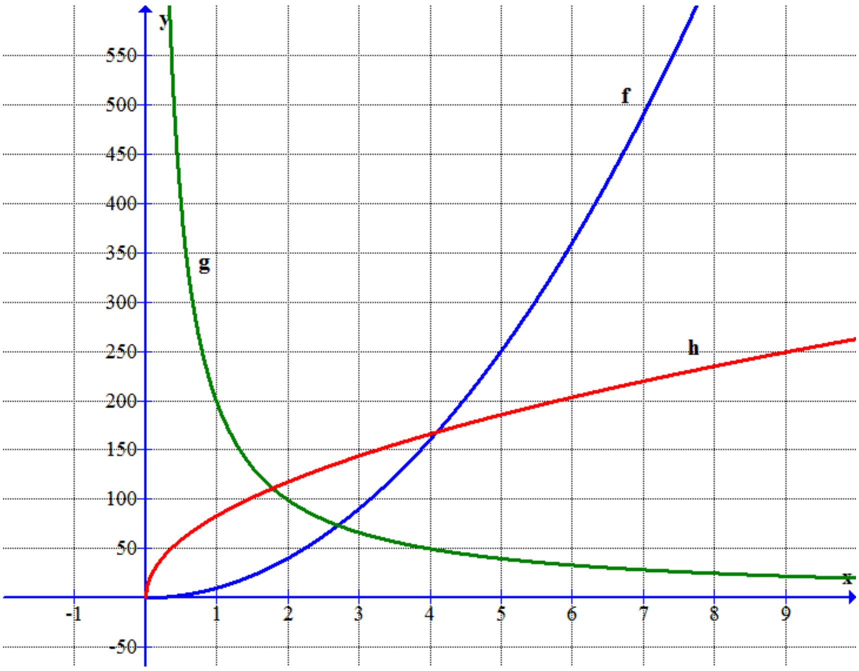
5. Potens- og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er *a* og *b* faste tall. Eksempler:

$$f(x) = 10 \cdot x^2$$
$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

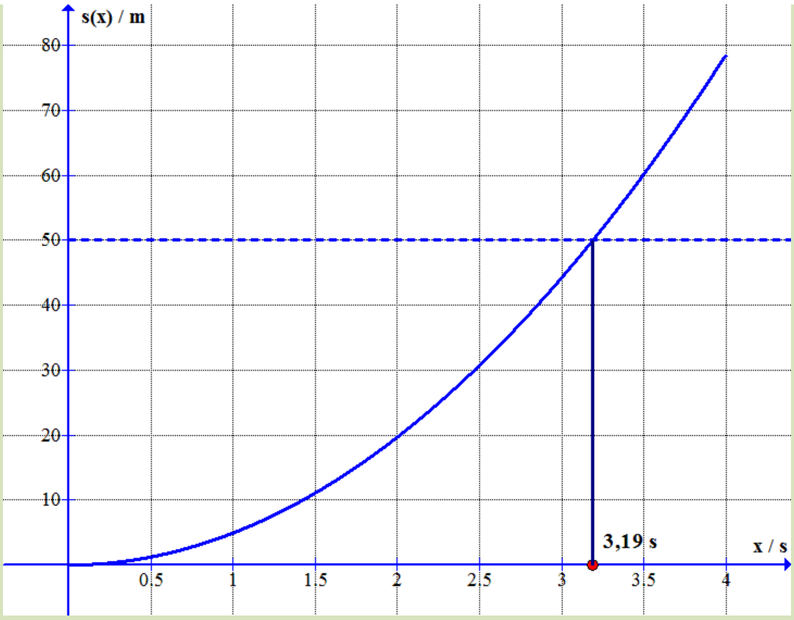
Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 3

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter *x* sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x) = 4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..
For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja y= 50 i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

Oppgave 36

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle x meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x) = 0,45\sqrt{x}$.

a) Tegn grafen til t når $0 \leq x \leq 100$. $\sqrt{x}$ skriver du som sqrt(x) i Geogebra. (sqrt = square root.)
b) Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?
c) Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

GeoGebra – fremgangsmåte

Lage graf for et bestemt definisjons-område	
Lage graf utfra punkter	
Skrive inn aksetitler	
Tilpasse x- og y-aksen	
Svare på oppgaver	
Finne en x- eller y-verdi når den andre er oppgitt	
Finne topp- og bunnpunkt	
Finne nullpunkt	
Finne gjennomsnittlig endring mellom to x-verdier	
Finne momentan endring/vekstfart	

Oppsummerende oppgave

Funksjonen T gitt ved

$$T(x) = -0{,}08x^3 + 1{,}29x^2 - 3{,}9x + 1{,}2 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq 12$$

viser temperaturen i grader Celsius *T(x)* på Hellerud 1. april et år x timer etter midnatt

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *T*.

Fremgangsmåte:

b) Når var temperaturen over 10 ºC?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

c) Hva var temperaturen kl 01:00?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

d) Når var temperaturen 0 ºC?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

e) Hva var den laveste og den høyeste temperaturen disse timene?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

f) Hvor mange grader økte temperaturen med i gjennomsnitt per time fra den var på det laveste til den var på det høyeste?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

g) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen *T* når x=11.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret

Svartekst:
Fremgangsmåte:

Lim inn bildet fra GeoGebra her:

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 7 (del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet *h*(t) meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$							

b) Tegn grafen til *h*.

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av *h*(0) og *h*(3).

V15 - Oppgave 8 (del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

V15 - Oppgave 5 (del 2)

Du skal kjøpe ny sykkel, og du vil forsikre den. Dersom sykkelen blir stjålet, må du betale 2000 kroner i egenandel på forsikringen.

Anta at sykkelen koster *P* kroner som ny. Dersom sykkelen blir stjålet før det har gått et år, vil du få utbetalt (*P* - 2000) kroner i erstatning fra forsikringsselskapet. Erstatningen avtar med 10 % per år.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Forklar at $F(x) = (P - 2000) \cdot 0,9^x$ er en modell for hvor mye du får utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter x år.

Du velger å kjøpe en sykkel som koster 10 000 kroner.

b) Hvor mye får du utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter 7 år?

For å forsikre sykkelen må du betale 150 kroner i forsikringspremie per år.

Anta at sykkelen blir stjålet etter x år.

c) Sett opp en modell som viser hvor mye du totalt sitter igjen med når du tar hensyn til det du har betalt i forsikringspremie i løpet av disse x årene.

Din venn Ronny mener at du bør si opp forsikringsavtalen etter 13 år.

d) Ta utgangspunkt i modellen du fant i oppgave c) og kommenter Ronnys utsagn.

V15 - Oppgave 6 (del 2)

Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \qquad 0 \le x \le 300$$

viser temperaturen f (x) grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet *x* dager etter

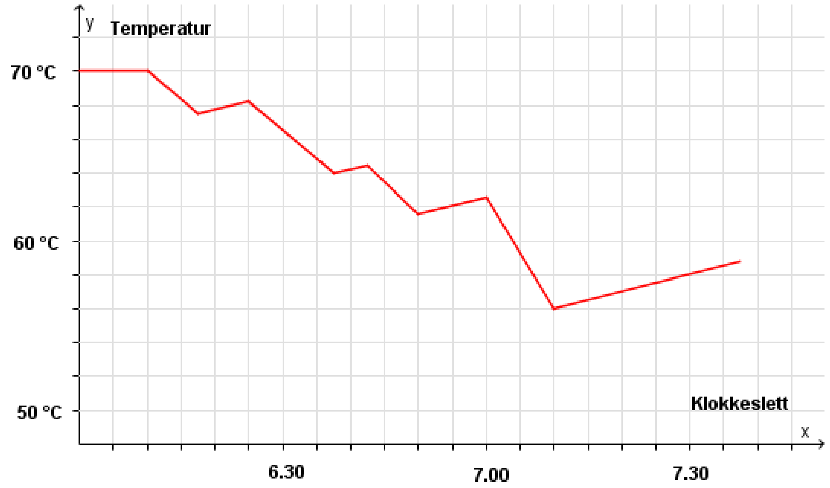
31. desember 2013.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *f*.

Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

b) Bestem *f*(100) og den momentane vekstfarten til *f* når *x* = 100.
Hva forteller disse svarene?

H15 - Oppgave 10 (del 1)



Hos familien Vassdal er termostaten i varmtvannstanken satt til 70 °C. Når familien bruker varmtvann fra tanken, renner kaldt vann inn, og gjennomsnittstemperaturen på vannet i tanken avtar. Varmeelementet slår seg da automatisk på, og vannet varmes opp igjen.

Grafen ovenfor viser hvordan temperaturen i tanken varierte en morgen. Det varme vannet ble bare brukt til å dusje.

a) Hvor mange familiemedlemmer dusjet denne morgenen?

Datteren Vanda var den som brukte lengst tid i dusjen.

b) Hvor lenge dusjet hun?

Da familien forlot hjemmet klokka 7.30, var temperaturen i varmtvannstanken 58 °C.

c) Hvor lang tid tok det før temperaturen var steget til 70 °C igjen?

V15 - Oppgave 2 (del 2)

Funksjonene *G* og *J* gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$
$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.

b) Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?

c) Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?

d) Bestem $\frac{G(12)-G(0)}{12}$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2}$
Hva forteller disse svarene om vekten til Geir?

V16 - Oppgave 6 (del 1)

Marte er telefornselger. Hun har fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner.
Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

a) Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.

b) Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.

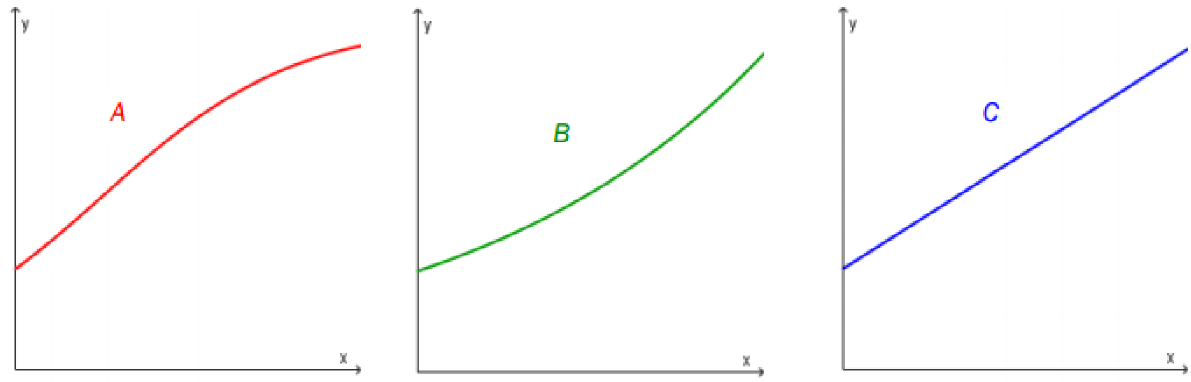
c) Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

V16 - Oppgave 6 (del 1)

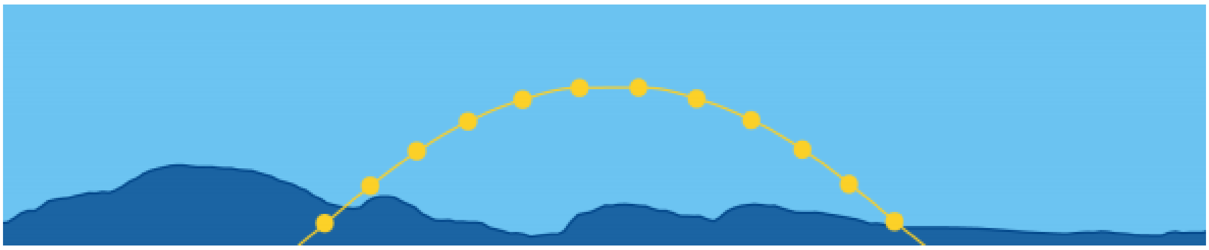
Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt.

Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse grafene illustrerer eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt.

(oppgaven fortsetter på neste side)



V16 - Oppgave 3 (del 2)



Funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}5 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola står over horisonten *x* timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *B*.

b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?

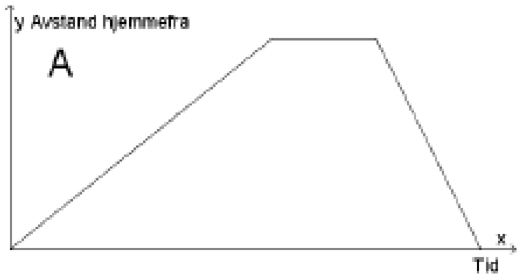
d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokken 05.00 til klokka 12.00?

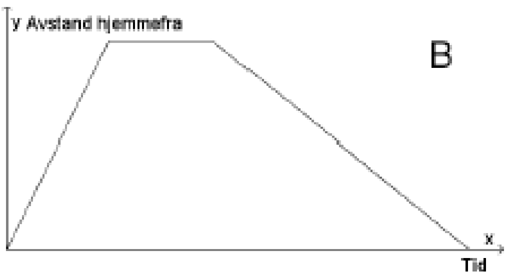
H16 - Oppgave 10 (del 1)

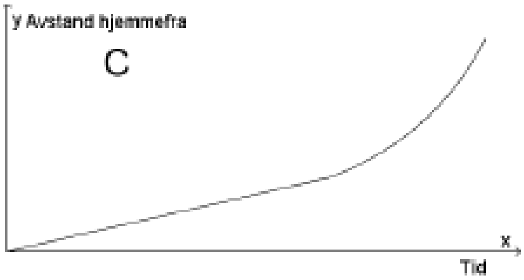
Nedenfor har vi beskrevet fire ulike situasjoner.

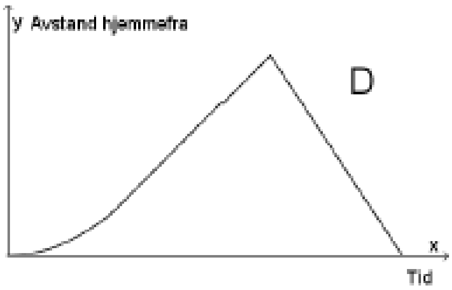
Situasjon	Beskrivelse
1	Eline tar en løpetur. Hun starter hjemmefra i rolig tempo og øker så tempoet etter hvert. Etter en stund snur hun og løper raskt tilbake samme vei.
2	Eline løper hjemmefra for å rekke bussen. Etter å ha ventet noen minutter skjønner hun at hun ikke rakk bussen, og går tilbake samme vei.
3	Eline starter hjemmefra og går opp en bratt bakke. Hun tar en liten pause på toppen av bakken før hun løper tilbake samme vei.
4	Eline starter hjemmefra og padler over fjorden. I starten har hun motvind, men etter hvert avtar vinden, og farten øker.

Nedenfor ser du grafiske framstillinger som beskriver sammenhengen mellom tid og Elines avstand hjemmefra for hver av de fire situasjonene.









Hvilken graf passer til situasjon 1?
Hvilken graf passer til situasjon 2?
Hvilken graf passer til situasjon 3?
Hvilken graf passer til situasjon 4?

Begrunn svarene dine.

H16 - Oppgave 8 (del 1)

Siri har kjøpt bil. Hun antar at verdien av bilen x år etter at hun kjøpte den, vil være gitt ved

$$V(x) = 250\,000 \cdot 0{,}9^x$$

a) Hva forteller tallene 250 000 og 0,9 i dette funksjonsuttrykket om verdien av Siris bil?

b) Hva vil bilens verdi være ett år etter at Siri kjøpte den?

V17 - Oppgave 1 (del 2)

Funksjonen V er gitt ved

$$V(x) = 0{,}064x^4 - 2{,}41x^3 + 28{,}4x^2 - 105x + 39 \quad , \quad 0 \le x \le 18$$

viser vannstanden $V(x)$ centimeter over eller under middelvann x timer etter midnatt i Tromsø en dag.

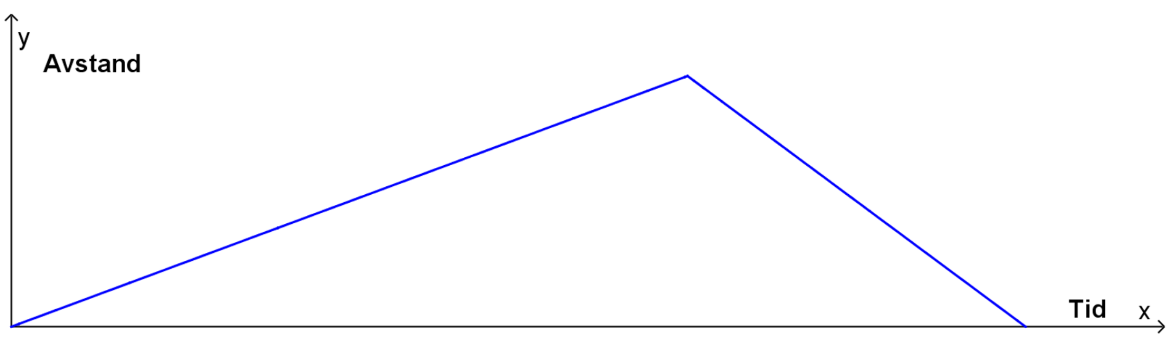
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.

b) Vis at vannstanden er ca. 40 cm under middelvann én time etter midnatt og ca. 31 cm over middelvann 12 timer etter midnatt.

c) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i perioden fra midnatt og fram til klokka 18.00.

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V klokken 07.00.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

V17 - Oppgave 4 (del 2)



Beskriv en praktisk situasjon som passer med grafen ovenfor.

V17 - Oppgave 6 (del 2)

Temperaturen blir lavere jo høyere over havet vi kommer. Spiterstulen ligger 1 106 m over havet. Toppen av Galdhøpiggen ligger 2 469 m over havet. En dag er temperaturen på Spiterstulen 12,0 ℃ .

Vi antar at temperaturen $T(x)$ ℃ , x meter over Spiterstulen denne dagen er gitt ved.

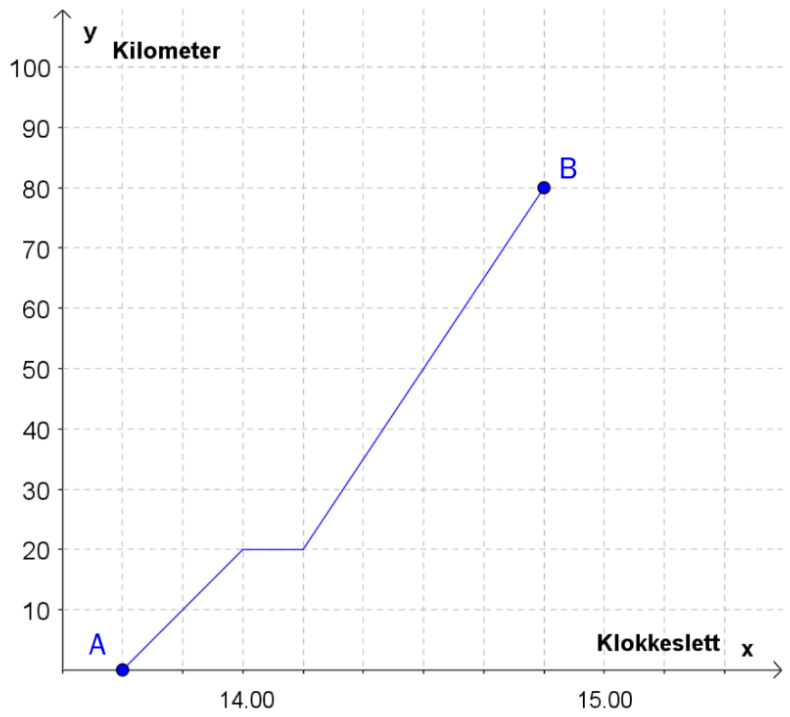
$$T(x) = -0{,}0065x + 12 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq 1400$$

e) Hvor høyt over Spiterstulen vil du være når temperaturen er 5 ℃ denne dagen?

f) Bestem temperaturen på toppen av Galdhøpiggen denne dagen.

g) Hvor mange grader synker temperaturen med per 100 m stigning denne dagen?

H17 - Oppgave 3 (del 1)



Et tog kjørte fra by A til by B. Se diagrammet ovenfor.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Bestem reisetiden mellom de to byene.

b) Beskriv hva som skjer 20 km fra by A.

c) Bestem farten til toget når det er 10 km fra by A, og når det er 10 km fra by B.
Du skal gi svarene i km/h.

H17 - Oppgave 6 (del 1)

I en butikk kan kundene kjøpe armbånd og charms (små figurer) til å feste på armbåndene. Butikken selger alle charms til samme pris. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall charms en kunde setter på et armbånd, og prisen kunden må betale for armbåndet med charms.

Antall charms	3	7
Pris for armbånd med charms (kroner)	1350	2450

a) Hvor mye koster armbåndet, og hvor mye koster hver charm?

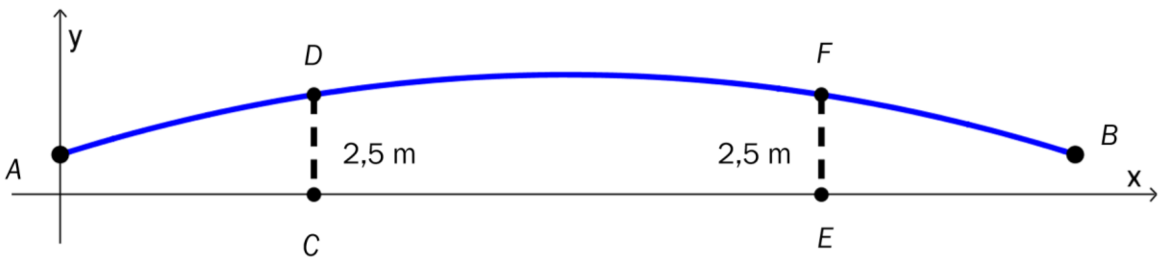
b) Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris for armbånd med charms.

Hanne betaler 3825 kroner for et armbånd med charms.

c) Hvor mange charms har hun på armbåndet?

H17 - Oppgave 2 (del 2)

En gangbro går over en elv. I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet en skisse av broen. På skissen går broen fra punktet A til punktet B.



(oppgaven fortsetter på neste side)

Funksjonen *G* gitt ved

$$G(x) = -0{,}0008x^2 + 0{,}08x + 1 \qquad , \qquad 0 \le x \le 100$$

viser broens høyde $G(x)$ meter over elva ved normal vannstand der den horisontale avstanden fra punktet *A* er x meter.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *G*.

En båt har en mast som når 290 cm over vannflaten.

b) Vil båten kunne passere under broen ved normal vannstand?

Broen hviler på to bropilarer i punktene *D* og *F*. Ved normal vannstand er høydene *CD* og *EF* fra vannflaten opp til broen lik 2,5 m.

c) Bestem avstanden fra *C* til *E*.

d) **V18 - Oppgave 1 (del 2)**

Funksjonen A gitt ved

$$A(x) = -0{,}08x^3 + 1{,}29x^2 - 3{,}9x + 6{,}2 \qquad , \qquad 0 \le x \le 12$$

viser hvor mange millioner kvadratkilometer $A(x)$ rundt Antarktis som var dekket av havis x måneder etter 1. januar 2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

b) Hvor lenge var mer enn 10 millioner kvadratkilometer dekket av havis?

c) Hvor mange kvadratkilometer økte området som var dekket av havis, i gjennomsnitt med per måned fra 1. mars til 1. september?

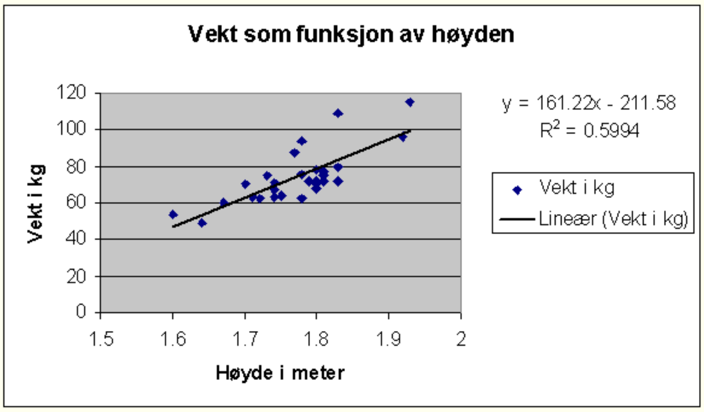
Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 5$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

Kapittel 3. Matematiske modeller

En matematisk modell er en funksjon som mer eller mindre bra beskriver en praktisk situasjon.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hvordan lage en matematisk modell ved hjelp av gitte opplysninger.
- Hvordan finne en matematisk modell ut fra en tabell med observerte sammenhenger mellom to størrelser (regresjon).
- Hvordan finne mønster i et tallmateriale.



Mål for kapittel 3. Matematiske modeller

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre målinger i praktiske forsøk og formulere matematiske modeller på grunnlag av observerte data
- analysere praktiske problemstillinger knytte til dagligliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller
- utforske matematiske modeller, sammenligne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon, og vurdere hvilken informasjon modellene kan gi, og hvilket gyldighetsområde og begrensninger de har
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hva vi mener med en matematisk modell
- ☐ hvordan jeg legger inn data fra en tabell i et regneark i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg utfører regresjonsanalyse i GeoGebra for å finne en matematisk modell

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en matematisk modell
- ☐ hvordan jeg finner mønster i tall og figurer

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ velge hvilken modell som passer best til en praktisk situasjon
- ☐ forklare hvilken informasjon en matematisk modell kan gi
- ☐ argumentere for en modell sitt gyldighetsområde og hvilke begrensninger den har

Utforskende oppgave – Strikkhopp med Barbie og Ken

Kilder (hentet 07.06.2017):

http://www.caspar.no/tangenten/2005/inspirasjonshefte2005.pdf s. 122-128 og

http://www.ntnu.no/documents/2004699/2c5c784d-cbe2-452d-8d37-5934c34bbb40

I denne oppgaven skal du la Barbie eller Ken hoppe i strikk og bestemme en sammenheng mellom antall strikk og fallhøyden. Sammenhengen skal du bruke til å gjøre en praktisk beregning.

Problemstilling 1: Bestem sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Utstyr:

- En Barbie- eller Ken dukke
- Strikk
- Målebånd
- Papir og blyant
- GeoGebra

Oppgave:

1. Bind strikk rundt bena på Barbie
2. Slipp dukka fra en gitt høyde og mål fallhøyden (la Barbie falle med hodet først)
3. Lag en tabell som viser sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Antall strikk												
Fallhøyde (cm)												

4. Finn et uttrykk for sammenhengen mellom fallhøyde og antall strikk ved hjelp av regresjon i GeoGebra

(Lim inn GeoGebra bildet her)

f(x) =

5. Forklar hva de ulike konstantene i funksjonen uttrykker:

Problemstilling 2: Bruk modellen du kom frem til og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke i strikkhoppet for akkurat å bare bli våt i håret

Utstyr:

Et kar med vann hvor vannflaten står _________ cm under Barbies hoppunkt.

Oppgave:

1. Bruk modellen og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke

(Lim inn GeoGebra bildet her)

Antall strikk:

2. La Barbie hoppe med dette antallet strikk og undersøk om din beregning stemmer. Resultat:

Feilkilder:

Har dette forsøket noen feilkilder?

1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra "virkeligheten". Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

2.1 Lineære modeller

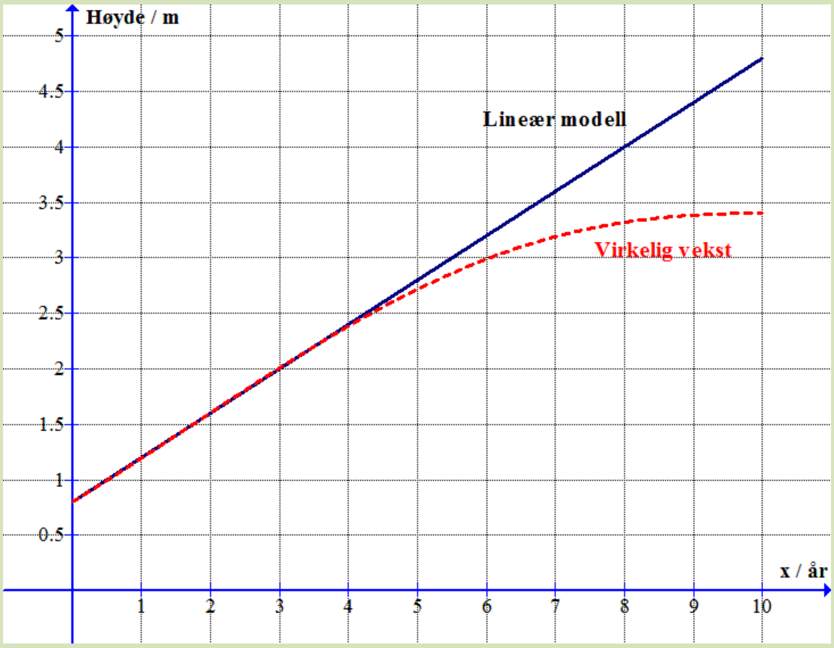
Eksempel 1
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for *x*, kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$ m.

Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er *x* mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik: $x \in [0,5]$.

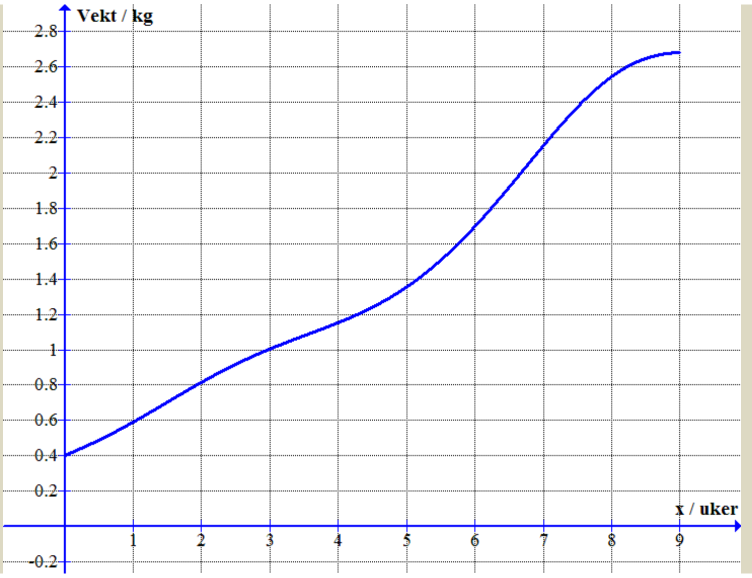


Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.

a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten $v(x)$ som passer bra for de fem første ukene.

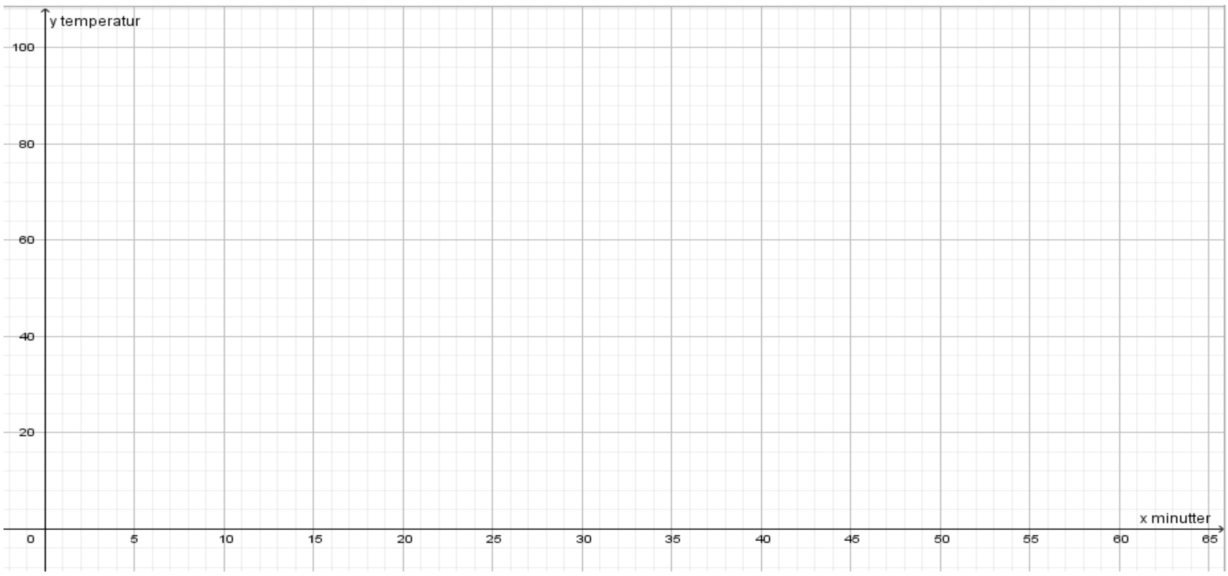


Oppgave 2

Anta at temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

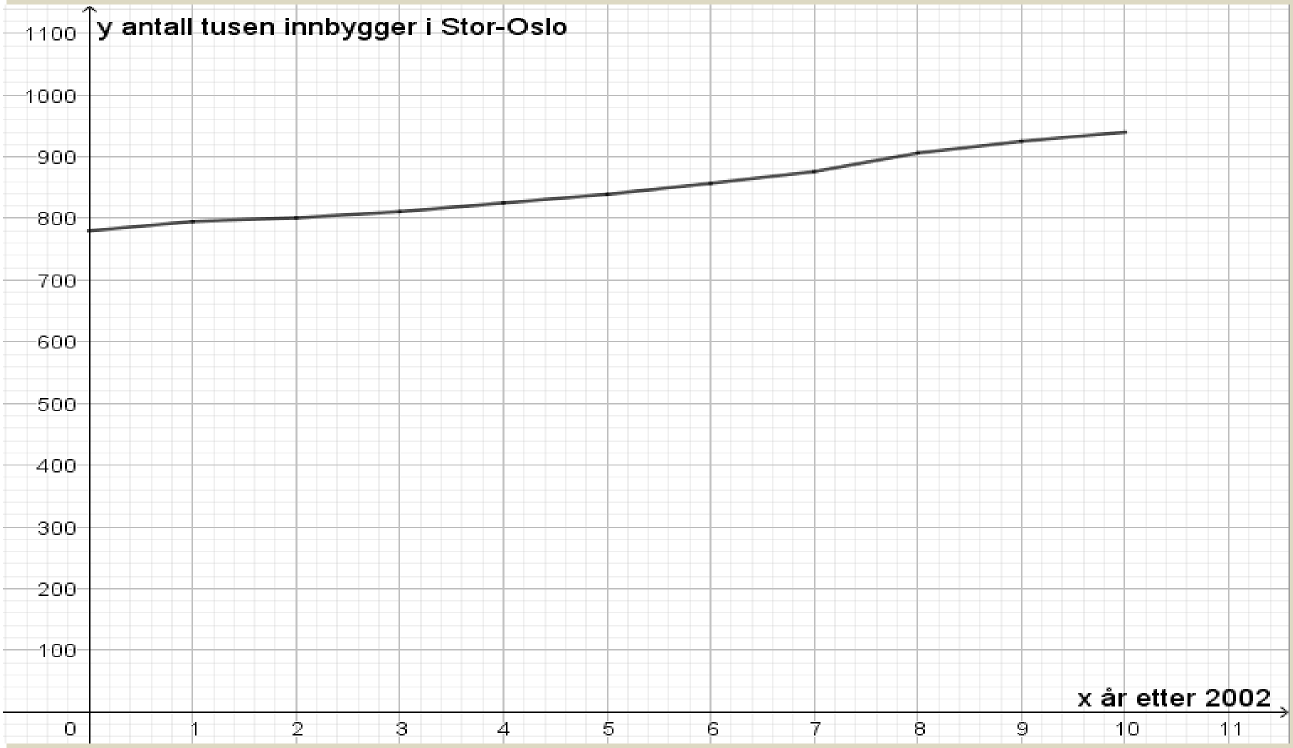
a) Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?
b) Lag en lineær modell som beskriver temperaturen T i koppen etter x minutter.
c) Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?
d) Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?
e) Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når x øker.
f) Tegn grafen til modellen.

g)  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.



Oppgave 3

Stor-Oslo er en betegnelse på et geografisk område som inkluderer Oslo og Akershus, samt flere kommuner i Buskerud, Oppland, Vestfold og Østfold. Diagrammet nedenfor viser utviklingen i antall innbyggere i dette området fra 2002, målt i antall 1000 innbyggere.



a) Omtrent hvor mange mennesker bodde i Stor-Oslo i 2007?
b) Hvor mye økte innbyggertallet i Stor-Oslo i gjennomsnitt per år fra 2002 til 2012?
c) Lag en lineær modell som viser innbyggertallet i Stor-Oslo x år etter 2002.

2.2 Eksponentielle modeller

Eksempel 2

I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.

Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.

Temperaturforskjellen er 22 – (-8) = 30 grader i starten.

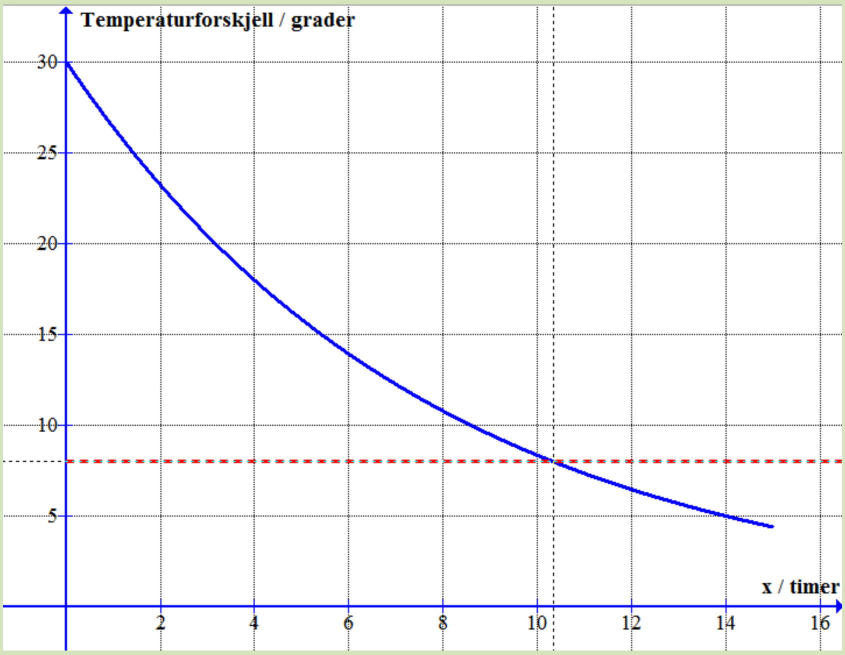
Vekstfaktoren er 100 % – 12 % = 88 % = 0,88.

Vi kaller antall timer som har gått for x. Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0{,}88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.

Når er innetemperaturen null?
Vi tegner grafen til *f* med **Funksjon(30*0.88^x,0,15)**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen *y* = 8, viser at dette skjer etter 10,4 timer.

Oppgave 4

I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

a) Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
b) Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

Oppgave 5

Antall registrerte store rovdyr i Norge 2018 var på 180 stk. Dette er en nedgang på 20 stk. fra 2017. Anta at denne nedgangen fortsetter frem til 2025.

La *x* = 0 være 2017, *x* = 1 være 2018 osv.

a) Lag en lineær modell som viser utviklingen i antall store rovdyr i Norge i perioden 2017 – 2025, og tegn grafen i GeoGebra.
b) Lag en eksponentiell modell som viser utviklingen i antatall store rovdyr i samme periode, og tegn grafen i samme koordinatsystem som grafen i oppgave a).

Forskere antar at det vil være ca. 100 store rovdyr i Norge i 2025
c) Hvilken av modellene du fant i oppgave a) og b) passer best ut fra denne antakelsen?

3. Å lage en matematisk modell ved hjelp av regresjon (kurvetilpasning)

3.1 Lineær regresjon

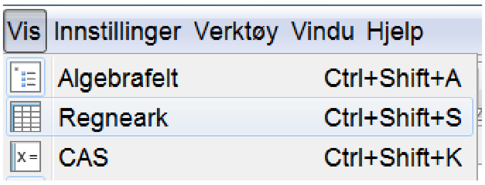
Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under **Innstillinger, Avrunding**. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

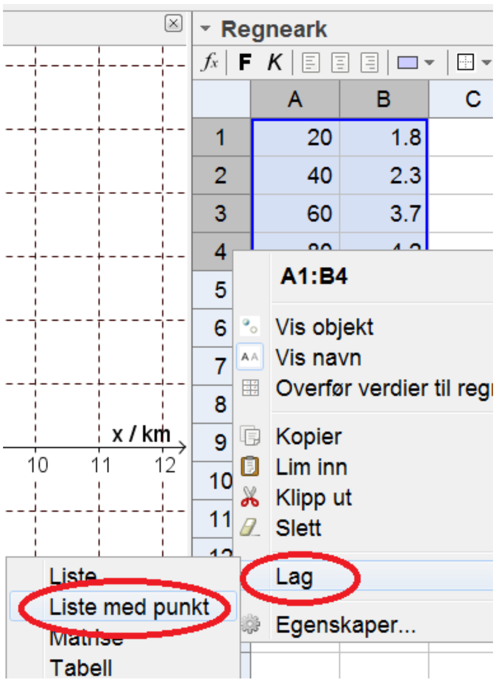
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder x / år	20	40	60	80
TV-tid y / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

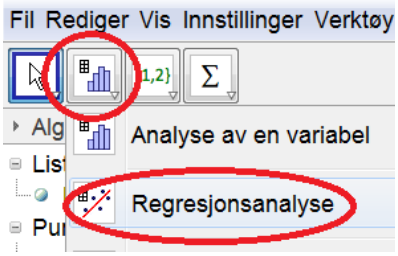
Vi åpner regnearket i Geogebra:

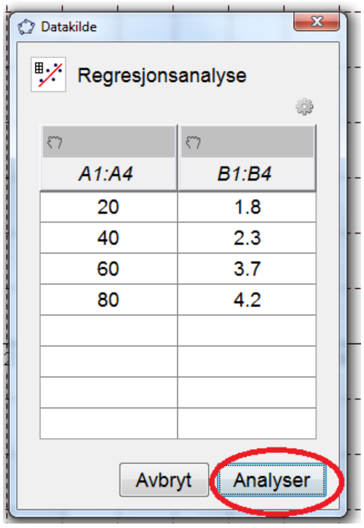


Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

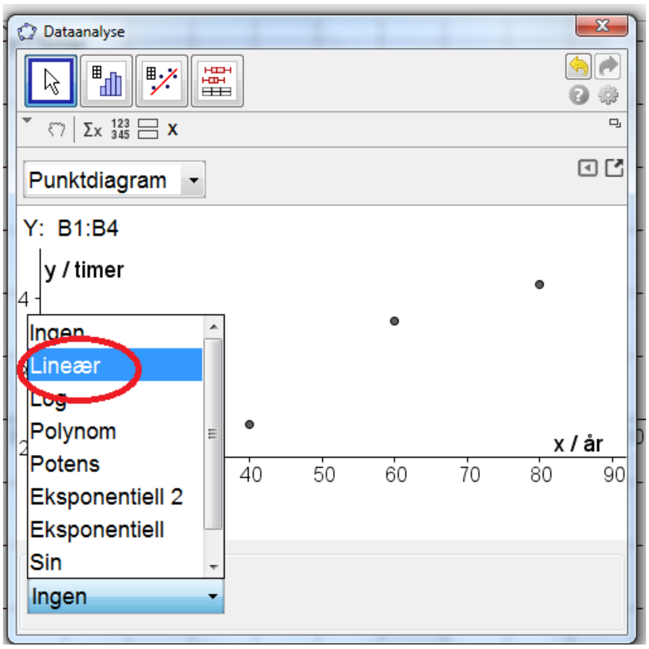


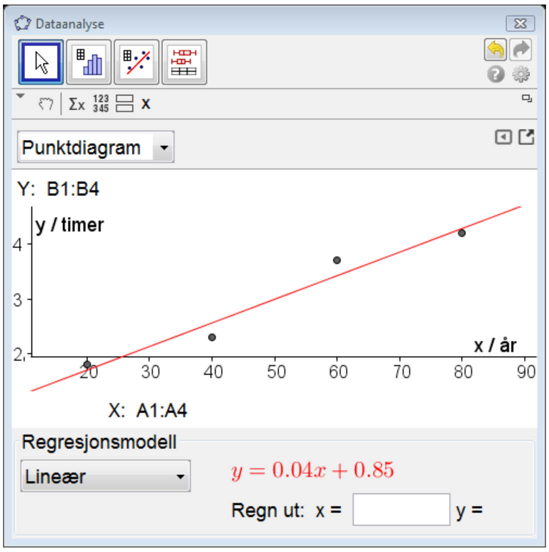
Så velger vi regresjonsanalyse:





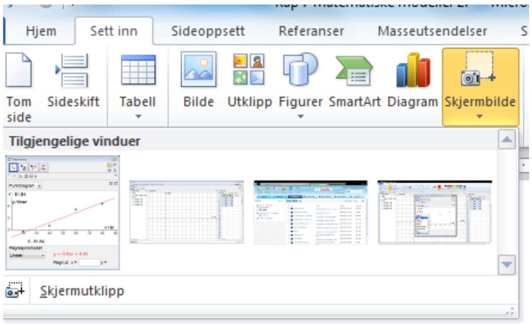
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er $y = 0,04x + 0,85$.

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.

Ut fra dette kan vi si at $f(x) = 0,04x + 0,85$ er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$ timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for *x* hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ($x = 0$) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

Oppgave 3

Tabellen viser folketallet *y* i Norge (i millioner) fra 1950 (*x* = 0) til 2000 (*x* = 50).

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

a) Finn ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
b) Hva var folketallet i 2010 (*x* = 60) ifølge denne modellen?
c) Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
d) Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

3.2 Polynomregresjon

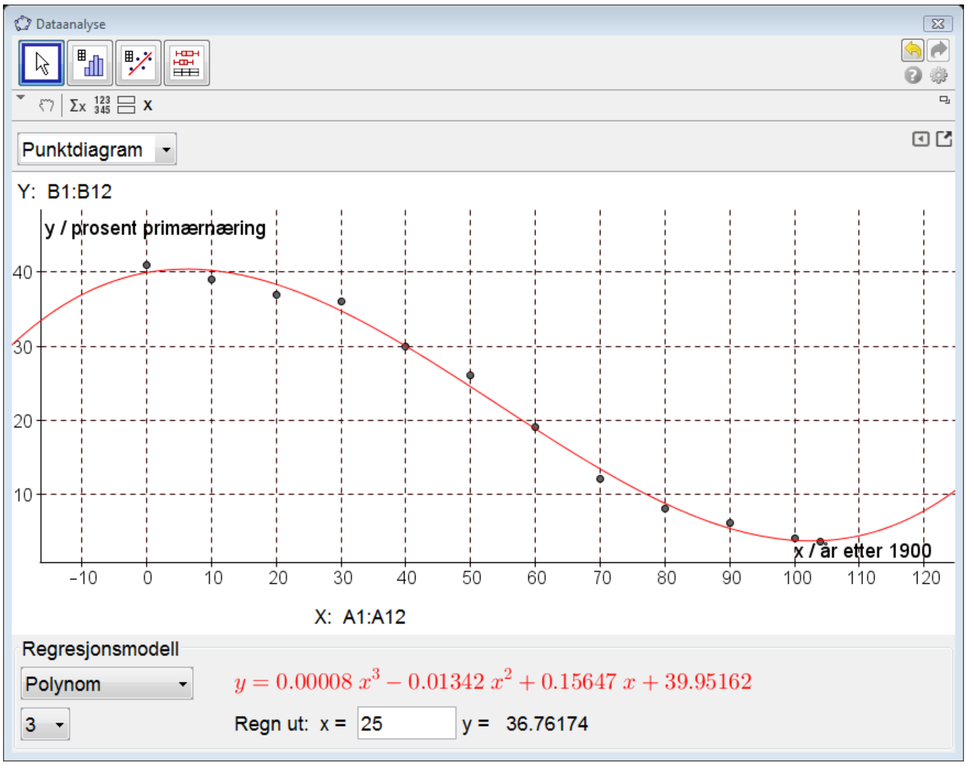
År	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**	**1940**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2004**
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
***y*/%**	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la *x* være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3.5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$. (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor x ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut $f(25)$ ved å skrive $x = 25$ inn i Geogebravinduet (se ovenfor). Da finner vi $f(25) = 37$ %.

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av x i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut $f(120)$. Geogebra gir da ca. 8 %.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8 % i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

Oppgave 4

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen $O(x)$ er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
O	0	20	35	50	100	150	175	160

a) La x være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.

b) Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?

c) I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?

d) Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet(time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene.,

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

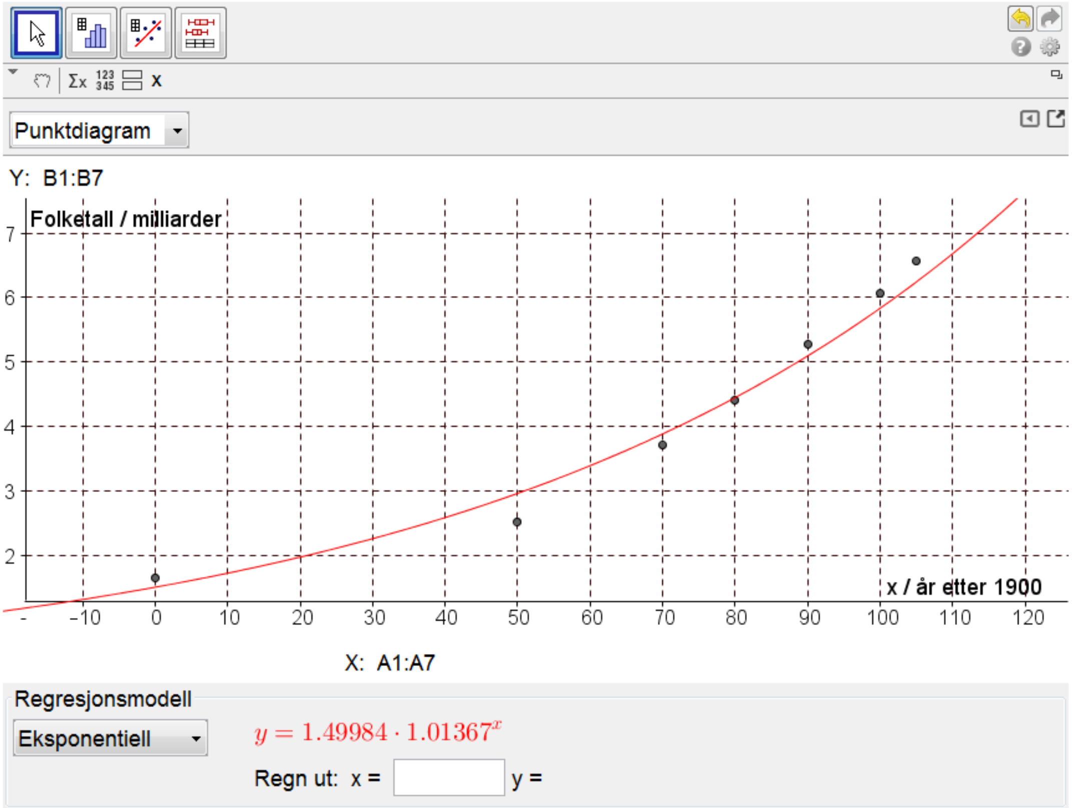
År	**Folketall (milliarder)**
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar x være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til $x = 0$, 1950 svarer til $x = 50$ osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

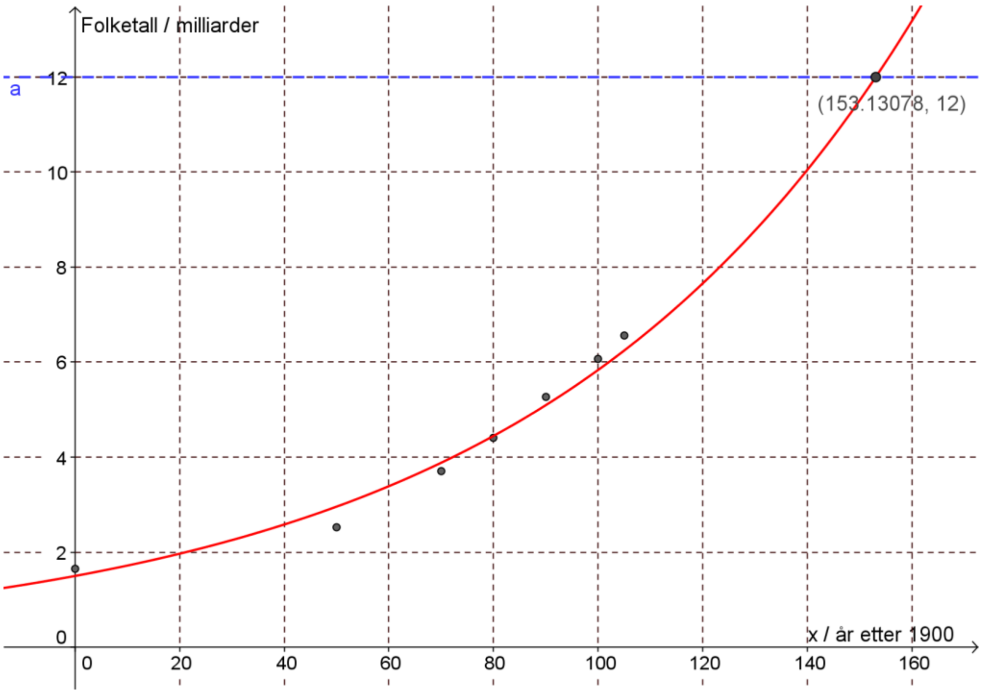
Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:



Funksjonen som passer best (passe avrundet) er $f(x) = 1,5 \cdot 1,014^x$.

Fra vekstfaktoren 1,014 = 101,4 % ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte 101,4 % - 100 % = 1,4 % i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja y = 12 og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:



Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

Oppgave 5

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

a) Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der $x = 0$ svarer til 1975.
b) Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
c) Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
d) En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

Oppgave 9

Antall fremmede arter i naturen i Norge har en ekstrem økning. Hvert år registreres nye tilfeller av fremmede arter i Norge. Mange av dem gjør stor skade i naturen og koster samfunnet mye penger.

Tabellen nedenfor viser antall registrerte fremmede arter i Norge siden oppstart av registreringen på 1800-tallet.

Årstall	1800	1850	1900	1950	2000	2012
Antall fremmede arter	10	150	360	1050	1980	2650

a) La x være antall år etter 1800, og bruk regresjon til å vise at $F(x)= 22.5 \cdot 1.024^x$ er en modell som beskriver utviklingen av antall nye fremmede arter i Norge.

b) Hvor mange prosent har antall fremmede arter økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til F(x) fra 1800 til 1950 og fra 1950 til 2012?
Gi en praktisk tolkning av svarene.

Ifølge forskerne som til daglig jobber med registrering av fremmede arter i Norge, så antas det at siste målinger i 2018 vil vise 3500 antall fremmede arter i Norge og at i 2024 vil det være opp 5000 fremme arter.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.

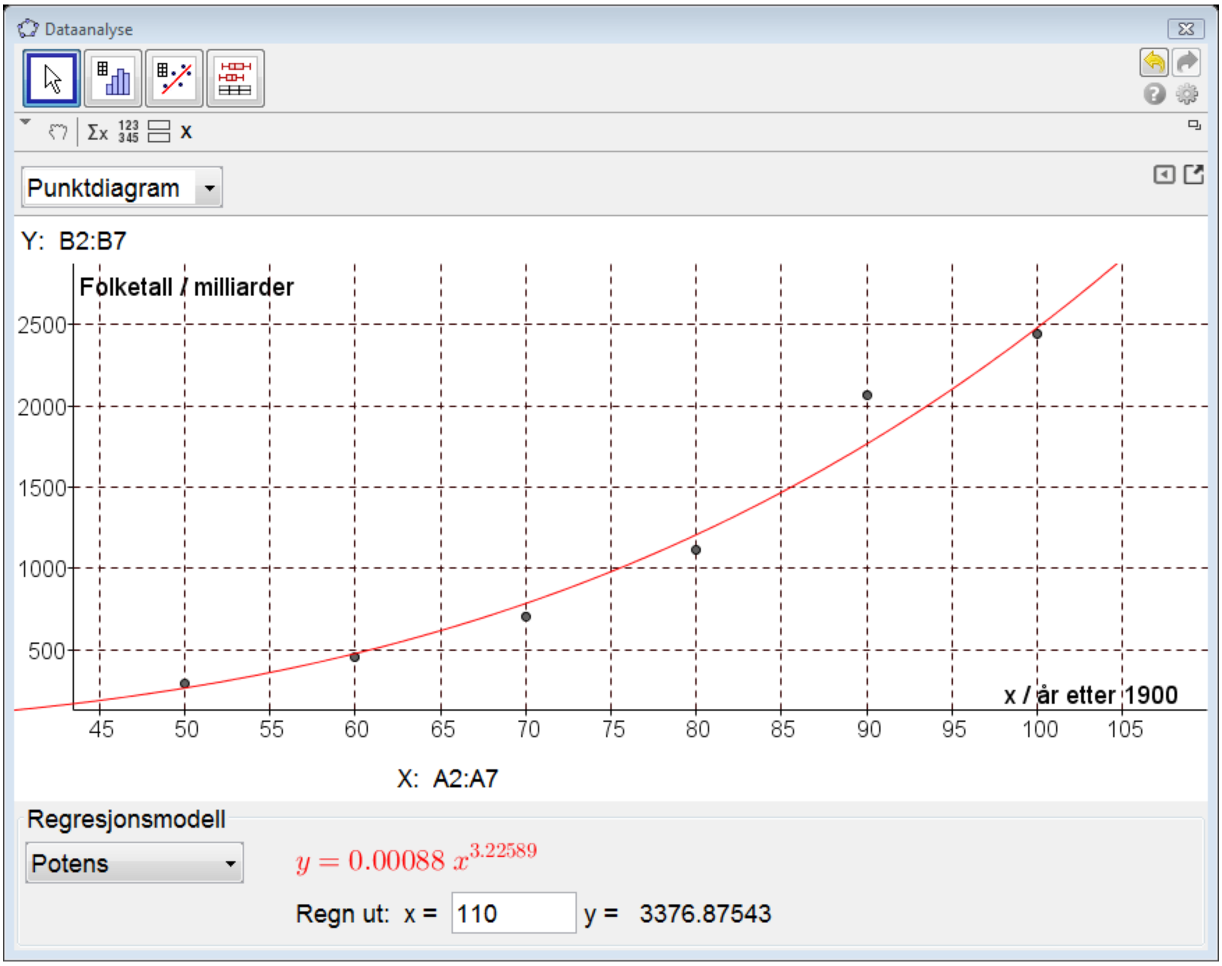
3.4 Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^b$. Eksponenten *b* kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
***t* / tusen**	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar *x* bety antall år etter 1900 (x = 50 tilsvarer da 1950, x = 60 tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon.* Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er $t(x) = 0,00088x^{3,226}$ (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

Oppgave 10

Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
x	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
y	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden x fra sola og omløpstiden y for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

a) Finn den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.

b) Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?

c) Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

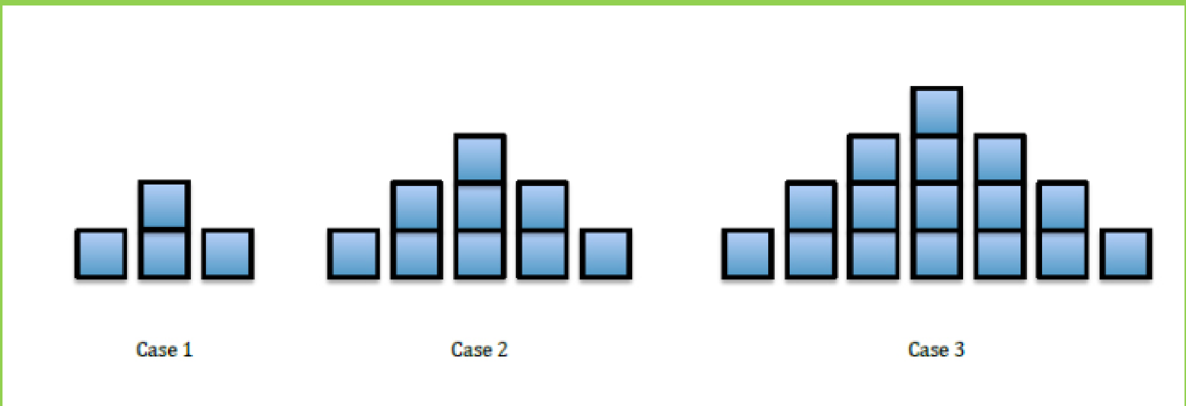
Utforskende oppgave – Mønster i figurer

Kilde (hentet 08.06.2017): https://www.youcubed.org/task/squares-upon-squares/

I denne oppgaven skal du prøve å finne et mønster for hvordan klosser legges til fra en figur til den neste (se over).

Individuelt:

Se på figurene og marker hvordan du ser at klossene legges til fra en figur til den neste:



I gruppe:

Sammenlign det du ser med hva læringspartneren din ser. Er det bare en måte å se dette på?

Kommenter.

I plenum:

Hvor mange ulike måter har klassen kommet frem til?

Oppfølgingsspørsmål (IGP):

1. Hvordan ville figur 100 se ut? Hvor mange klosser ville den ha? Hvordan vet du det?

2. Hvordan ville figur 0 se ut? Hvordan vet du det?

3. Hvor mange klosser ville det være i figur n? Hvordan vet du det?

4. Å finne mønster i utviklingen mellom figurer

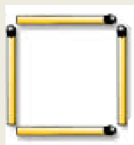
En vanlig oppgave til eksamen i 2P er å analysere utviklingen mellom figurer som endres etter et bestemt mønster. Denne utviklingen kan være lineær, kvadratisk eller en kombinasjon.

Oppgaven består både av å bestemme utseende eller størrelsen til de neste figurene i rekka, og å lage et uttrykk for figurene som kan brukes til å finne størrelsen til en figur med et høyt figurnummer (uten å måtte finne størrelsen på alle figurene frem til den).

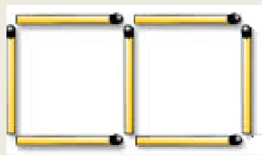
4.1 Lineær utvikling

Oppgave 11

Figur 1 (f_a) viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.

f_1 

Figur 2 (f_2) viser to kvadrat bygget av 7 fyrstikker

f_2 

Anta at vi bygger de neste figurene etter samme mønster.

a) Tegn f_3. Hvor mange fyrstikker må brukes til å lage f_3?

b) Med hvor mange fyrstikker øker hver figur?

c) Hvor mange fyrstikker må brukes for å lage f_4, f_5 og f_6?

d) Hvordan vil f_0 se ut? Hvor mange fyrstikker trengs for å lage f_0?

e) Bruk svarene i oppgave d) og b) til å lage et uttrykk for f_n

Bruk uttrykket du laget i e) til å svare på de neste oppgavene

f) Hvor mange fyrstikker brukes for å lage f_{30}?

g) Til en figur ble det brukt 151 fyrstikker. Hvilket nummer hadde denne figuren?

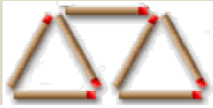
Oppgave 12

Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker f_4 trengs for å lage 4 slike trekanter?

b) Finn en formel for f_n.

c) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?

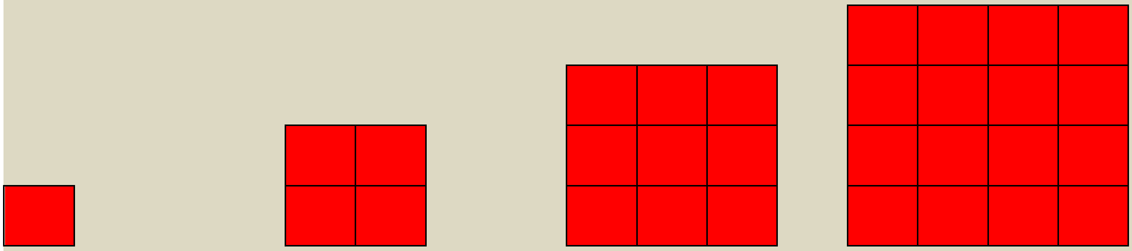


d)  Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?

4.2 Kvadratisk utvikling

Oppgave 13

Anta at en figur har følgende utvikling:



f_1 f_2 f_3 f_4

a) Skriv antall ruter i hver figur. Er økningen lineær?

b) Hvordan vil f_5 se ut? Hvor mange ruter består f_5 av?

c) Ser du en sammenheng mellom figurnummeret og antall ruter? Skriv dette som et uttrykk.

d) Hvor mange ruter vil det være i f_{10}?

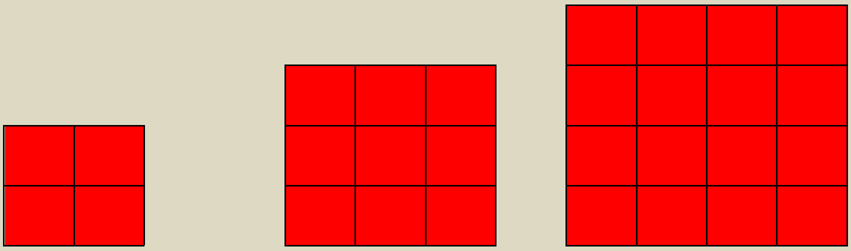
e) Til en figur ble det brukt 144 ruter. Hvilket nummer hadde denne figuren?

4.3 En mer eller en mindre

Noen ganger har vi behov for å uttrykke et tall som er en høyere eller en lavere enn figurnummeret. Dersom vi kaller figurnummer for n vil et tall som er en høyere enn figurnummeret skrives som $n + 1$. Et tall som er en lavere enn figurnummeret vil skrives som $n – 1$.

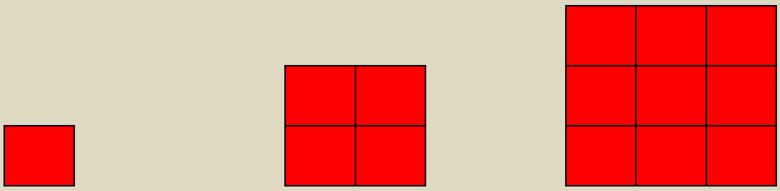
Oppgave 14

a) Finn uttrykket til f_n for rekkeutviklingen nedenfor



f_1 f_2 f_3

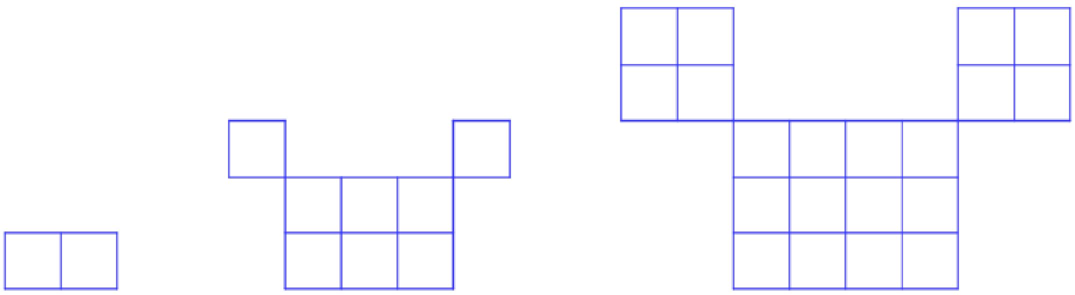
b) Finn uttrykket til f_n for rekkeutviklingen nedenfor



f_1 f_2 f_3 f_4

Utfyllingsoppgave – Mønster i figurer

I denne oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan gå frem for å finne mønster i figurer.



F_1 F_2 F_3

(Eksamen 2P høsten 2016)

Se på figurene. **Tenk**: Hva skjer fra en figur til den neste? Beskriv hva du ser med ord og marker på figurene.

Tegn den neste figuren.

Finn et uttrykk for antall klosser i figur f_n

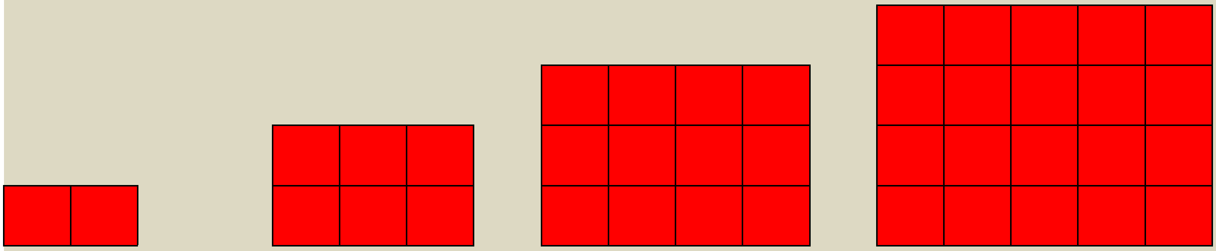
Hvor mange klosser vil det være i figur f_7?

Hvor stor figur kan du lage hvis du har 1000 klosser?

Hvor mange klosser vil du da ha igjen? ____________

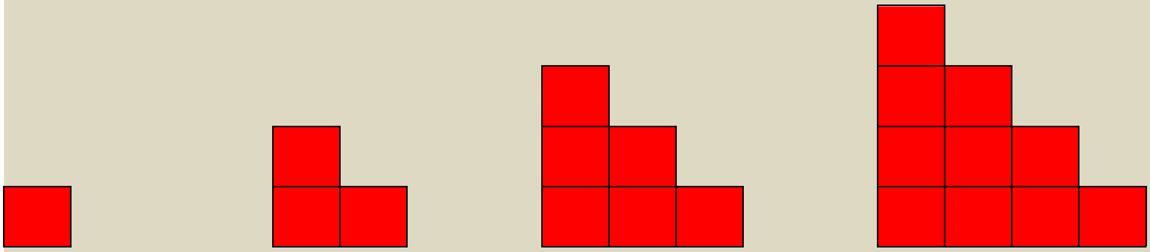
Oppgave 15

a) Figuren nedenfor viser de fire første rektangeltallene. Finn et uttrykk for f_n.



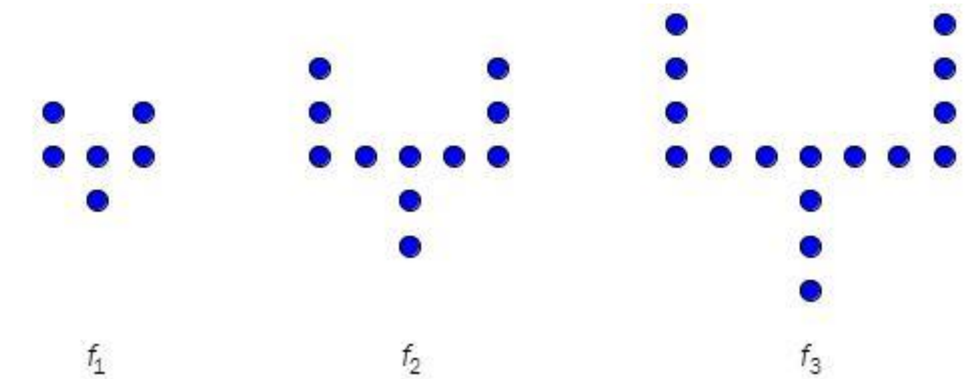
f_1 f_2 f_3 f_4

b) Figuren nedenfor viser de fire første trekanttallene. Finn et uttrykk for f_n.



f_1 f_2 f_3 f_4

Oppgave 16 (Eksamen 2P 2012)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

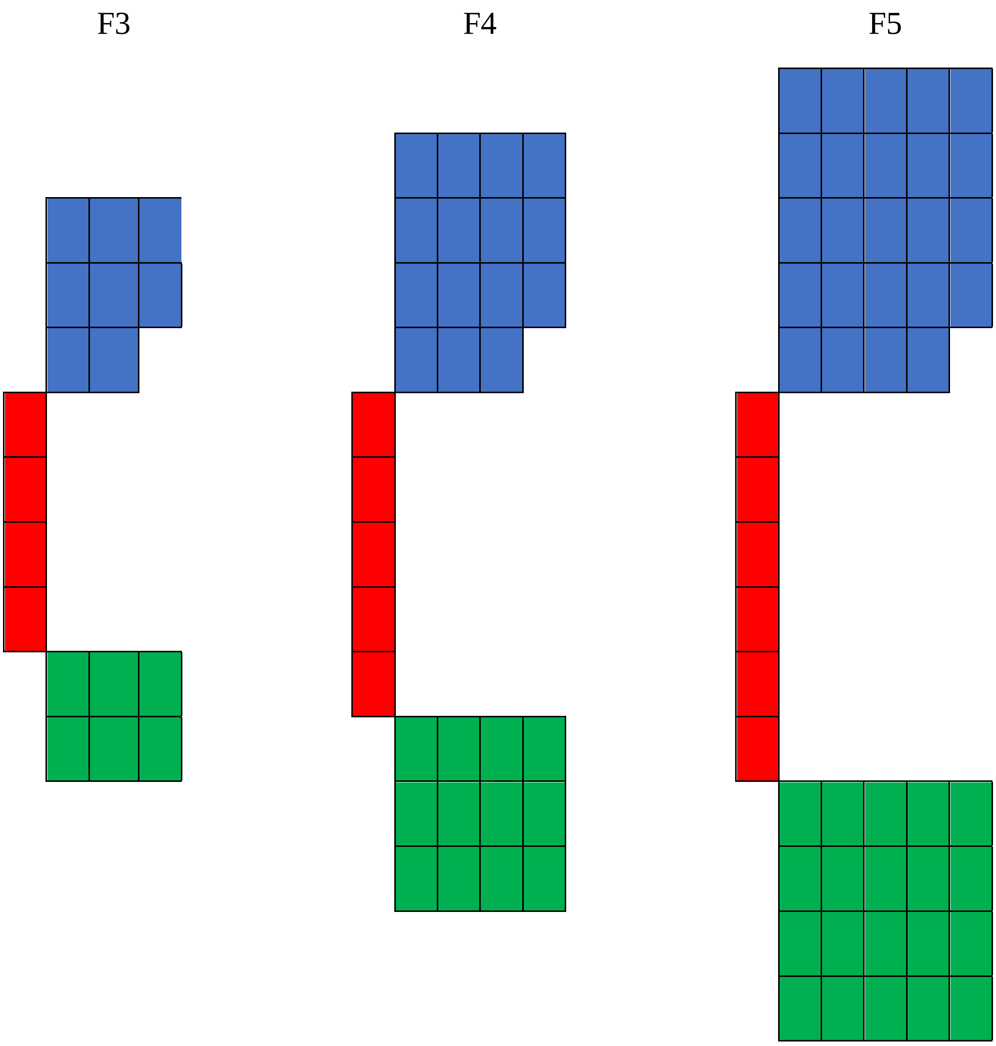
a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4.
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n, uttrykt ved n.

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

Oppgave 17



Ovenfor ser du en rekke med figurer som vokser etter bestemte mønstre. Figurene består av 3 deler: **blå**, **rød**, og **grønn.** Hver av delene er bygd opp av små ruter.

a) Fyll ut de tomme rutene.

Antall kvadrater i figur nr.	Del			Sum ruter i hele figuren
	Rød	Grønn	Blå	
3	4	6	8	
4	5	12	15	
5	6	20	24	
6				
10				
n				

b) I en figur var det til sammen 800 små kvadrater. Hvilket figurnummer hadde denne figuren?

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 5 (del 1)

Antall elever ved en skole har avtatt lineært de siste 10 årene. For 10 år siden var det

1 400 elever ved skolen. Nå er det 1 340 elever ved skolen.

a) Bestem en modell som viser utviklingen disse 10 årene.

De neste årene regner en med at antall elever vil avta med 0,5 % per år.

b) Bestem en modell som viser hvor mange elever det vil være ved skolen om x år.

V15 - Oppgave 2 (del 2)

Tabellen nedenfor viser antall kvinnelige studenter i Norge noen utvalgte år.

År	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013
Antall kvinnelige studenter	53553	58237	59562	63292	62957	68391	73332

La $x = 0$ svare til år 2000, $x = 1$ til år 2001, og så videre.

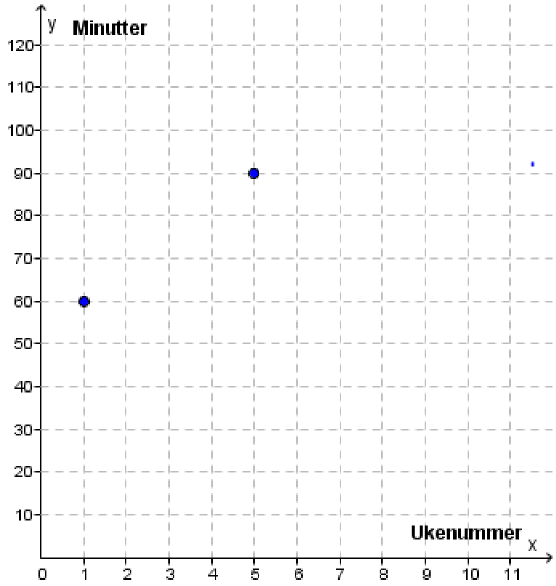
a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en lineær modell som viser hvordan antall kvinnelige studenter har utviklet seg i denne perioden.

b) Hvor stor har økningen i antall kvinnelige studenter vært i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Anta at denne utviklingen fortsetter i årene som kommer.

c) I hvilket år vil antall kvinnelige studenter passere 85 000?

H15 - Oppgave 7 (del 1)

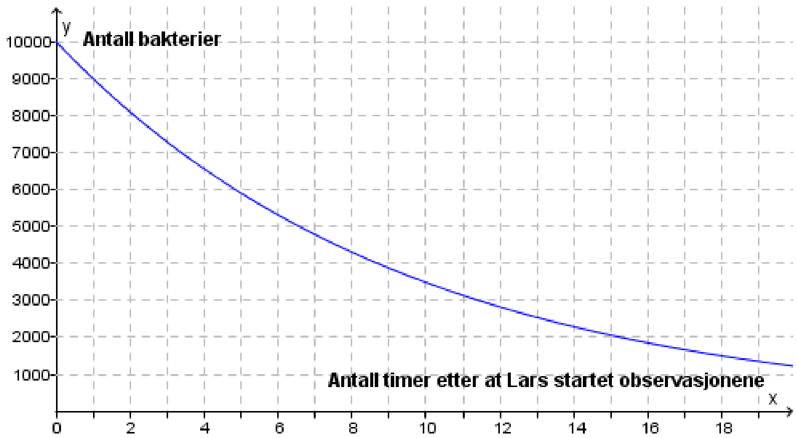


I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må trene hver uke framover for å nå dette målet.

b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

H15 - Oppgave 8 (del 1)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen *B* ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp utrykket for $B(x)$.

H15 - Oppgave 3 (del 2)

Tabellen nedenfor viser hvor mange nye elbiler som ble solgt i Hordaland i 2010 og 2014.

År	2010	2014
Antall nye elbiler	26	2962

a) La x være antall år etter 2010. Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for elbilsalget i Hordaland.

b) Hvor mange prosent steg elbilsalget per år i perioden fra 2010 til 2014 ifølge modellen fra oppgave a)?

Diagrammet ovenfor viser utviklingen i salget av nye elbiler i Hordaland i perioden 2010–2014.

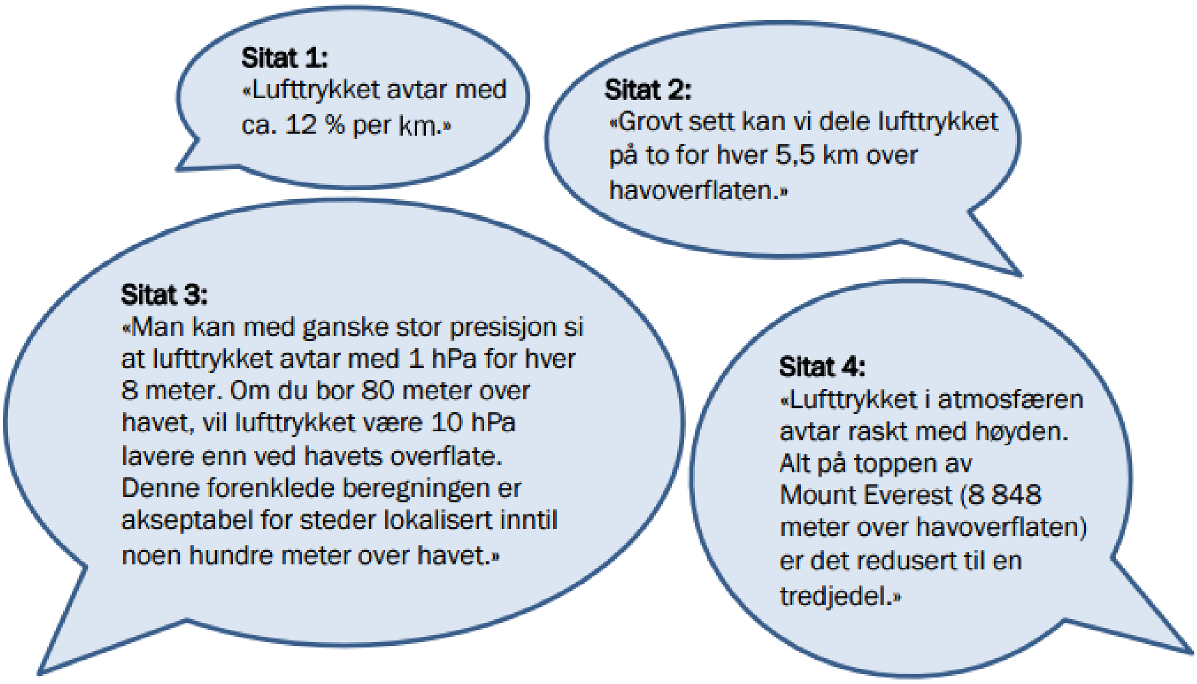
c) Gjør beregninger og vurder om modellen fra oppgave a) er en god modell for å beskrive denne utviklingen.

V16 - Oppgave 7 (del 2)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1 000 hPa (hektopascal).

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsteder og se på noen modeller for hvor stort luftrykket er x kilometer over havets overflate.

(Oppgaven fortsetter på neste side)



a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell *f* der $f(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x$
Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 10$

b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor. Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modell *f*. Gi denne modellen navn *g*.
Tegn grafen til *g* for $0 \le x \le 10$ i samme koordinatsystem som grafen til *f*.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell *h*. Tegn grafen til *h* for $0 \le x \le 10$ i samme koordinatsystem som du har brukt tidligere i oppgaven.
Kommenter siste setning i sitat 3.

d) Bruk hver av de tre modellene *f*, *h* og *h* til å bestemme lufttrykket 8 848 meter over havoverflaten. Sammenligne svarene du får, med sitat 4, og kommenter.

H16 - Oppgave 3 (del 2)

Tabellen nedenfor viser pris og antall solgte enheter av en vare.

Pris (kroner)	15	19	24	30	34	42	50
Antall solgte enheter	160	132	108	90	79	67	58

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x)\ 1600 \cdot x^{0,85}$$

er en god modell for sammenhengen mellom pris og antall solgte enheter av varen.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $15 \leq x \leq 50$.

c) Bestem antall solgte enheter når prisen er 45 kroner.

d) Bestem prisen når antall solgte enheter er 100.

e) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten for funksjonen f fra $x = 20$ til $x = 40$.

Hva forteller svaret om antall solgte enheter?

H16 - Oppgave 5 (del 2)

Når en pasient har tatt en tablett, vil virkestoffet i tabletten brytes ned i kroppen. Konsentrasjonen av virkestoffet i blodet vil avta eksponentielt med tiden.

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen i mikrogram per milliliter (μg/ml) av virkestoffet i blodet 1 time etter og 24 timer etter at pasienten har tatt tabletten.

Timer etter at pasienten har tatt tabletten	1	24
Konsentrasjon av virkestoff i blodet (μg/ml)	0,5	0,05

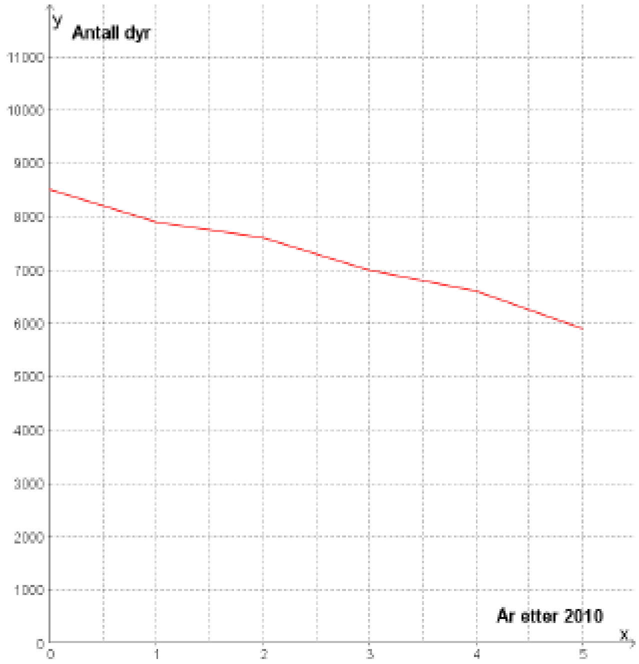
a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for konsentrasjonen av virkestoffet i blodet x timer etter at pasienten har tatt en tablett.

b) Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 10 timer etter at pasienten har tatt en tablett.

En pasient begynner å ta tabletter. Han tar én tablett klokka 08.00 hver morgen og én tablett klokka 20.00 hver kveld.

c) Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 30 timer etter at pasienten tok den første tabletten.

H16 - Oppgave 6 (del 1)



Linjediagrammet ovenfor viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

a) Bestem en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.

b) Hvor mange dyr av arten vil det være i området i 2018 ifølge funksjonen fra oppgave a)?

c) Hvor mange år vil det gå før det ikke er flere dyr av arten igjen i området ifølge funksjonen fra oppgave a)?

V17 - Oppgave 5 (del 1)

I 2017 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.

Per antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

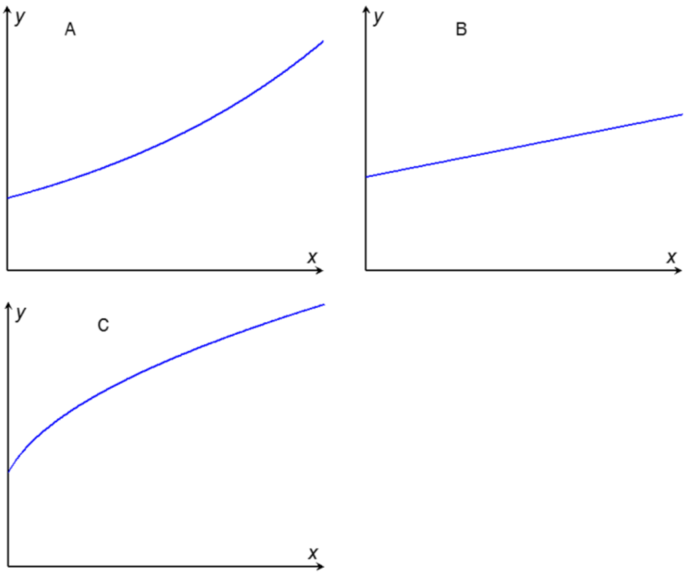
a) Sett opp en modell som viser verdien $f(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Per antar.

Kari antar at verdien vil stige med 8 % hvert år.

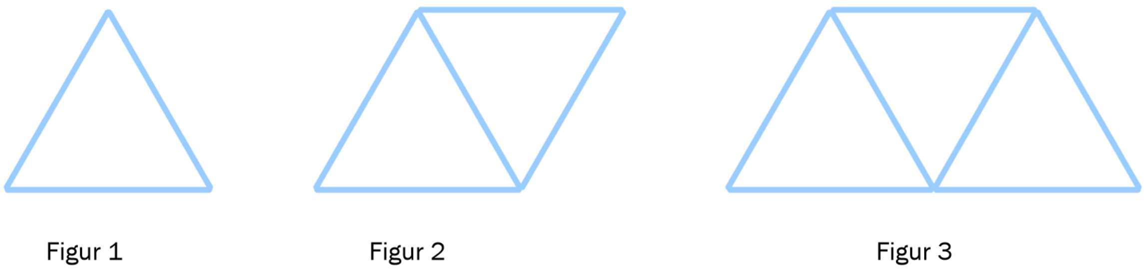
(Oppgaven fortsetter på neste side)

b) Sett opp en modell som viser verdien $g(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Kari antar.

c) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til f ?
Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til g ?
Begrunn svarene dine.



V17 - Oppgave 7 (del 1)



Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små, blå pinner. Hver pinne har lengden 2,5 cm. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

a) Hvor mange pinner trenger du for å lage figur 4?
Bestem omkretsen av figur 4.

b) Bestem et uttrykk for antall pinner i figur *n* uttrykt ved *n*.

c) Bestem et uttrykk for omkretsen av figur *n* uttrykt ved *n*.

En figur som følger samme mønster som ovenfor, har en omkrets på 105 cm.

d) Bestem antall pinner i denne figuren.

V17 - Oppgave 7 (del 2)

Tabellen nedenfor viser hvor høy Per var 0, 1, 3, 6 og 12 år etter fødselen.

Alder (år)	0	1	3	6	12
Høyde (cm)	52	76	97	118	148

a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en tredjegradsfunksjon f som tilnærmet viser høyden til Per de første 12 leveårene.

Espen er 12 år. Funksjonen *g* gitt ved

$$g(x) = 0{,}13x^3 - 2{,}8x^2 + 23x + 52$$

viser høyden hans $g(x)$ cm, *x* år etter fødselen.

b) Bestem Espens gjennomsnittlige vekstfart fra han var 7 år til han ble 12 år.

Sitatet på neste side er hentet fra nettsidene til Norsk Helseinformatikk AS.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

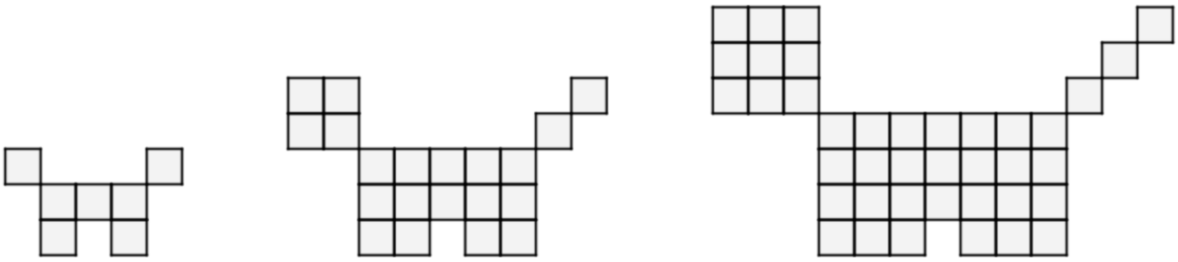
> «Gutter har en maksimal høydevekst på ca. 10 cm per år midt i puberteten. Etter vekstspurten i puberteten avtar veksthastigheten ned mot null.»

Anta at Espen kommer i puberteten når han er 12 år.

Puberteten varer vanligvis i to–tre år.

c) Ta utgangspunkt i sitatet ovenfor, og vurder om funksjonen g kan brukes til å bestemme høyden til Espen etter at han har fylt 12 år.

H17 - Oppgave 7 (del 1)



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 4?

b) Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 20?

H17 - Oppgave 1 (del 2)

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La *x* være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

e) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

f) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

g) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

H17 - Oppgave 4 (del 2)

I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

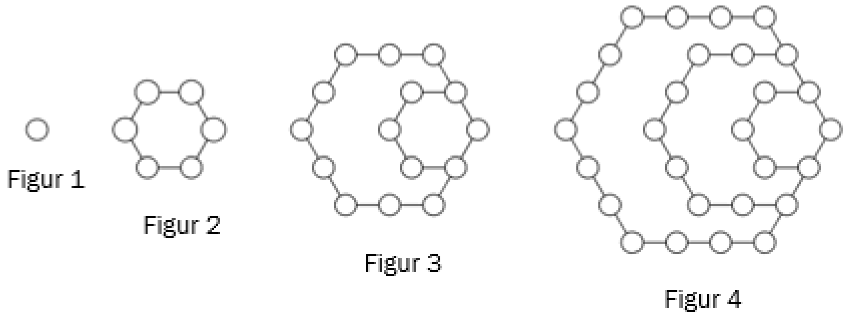
a) Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om *x* måneder dersom antallet avtar lineært.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om *x* måneder dersom antallet avtar eksponentielt.

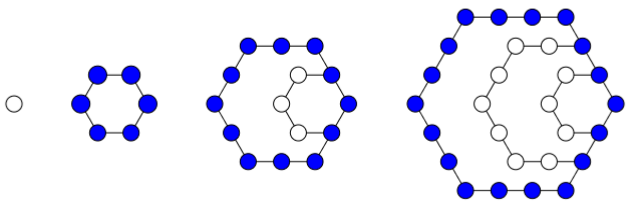
Anta at det om ett år vil være 96 kaniner igjen i området.

c) Vurder om det da er mest rimelig å anta at nedgangen vil være lineær eller eksponentiell.

V18 - Oppgave 4 (del 1)



Ovenfor ser du fire figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Hans og Grete vil fortsette å lage figurer etter samme mønster. De vil også se på ulike sammenhenger mellom antall sirkler i figurene.
Hans starter med figur nummer 2 og ser på sirklene i de ytterste sekskantene. Han fargelegger disse sirklene blå og setter opp tabellen til høyre nedenfor.



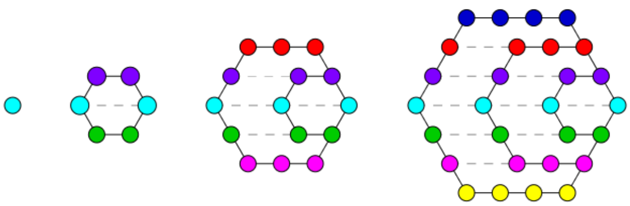
Figur-nummer	Antall sekskanter	Antall sirkler i ytterste sekskant
2	1	6
3	2	12
4		
5		
n		

a) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.

En figur har 246 sirkler i den ytterste sekskanten.

b) Hvor mange sekskanter er det i denne figuren?

Grete ser at sirklene ligger på rader. Hun stipler linjer og fargelegger slik at alle sirklene på én rad har samme farge. Etterpå setter hun opp tabellen til høyre nedenfor.



Figur-nummer	Antall rader	Antall sirkler i hver rad	Antall sirkler i figuren
1	1	1	1
2	3	2	6
3	5	3	15
4			
n			

c) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.
d) Hvor mange sirkler vil det være i figur nummer 100?

V18 - Oppgave 5 (del 1)

En dyrebestand består i dag av 12 000 dyr. En gruppe forskere antar at bestanden vil avta lineært, og at det vil være 6 000 dyr igjen om 10 år.
.

a) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom antakelsen er riktig.

En annen gruppe forskere antar at bestanden vil avta eksponentielt, og at det vil være 11 400 dyr igjen om ett år.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom denne antakelsen er riktig..

Ifølge hvilken av de to modellene ovenfor vil det være færrest dyr igjen i bestanden om 10 år?

V18 - Oppgave 6 (del 2)

Årstall	1920	1940	1960	1980	2000	2010	2017
Folketall i millioner	1902	2285	2991	4401	6088	6889	7474

Tabellen ovenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år i perioden fra 1920 til 2017.

a) La x være antall år etter 1. januar 1920, og bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$$

er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

b) Hvor mange prosent har folketallet økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 70$ til $x = 95$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

FN har utarbeidet prognoser som viser at folketallet i verden vil være 9,8 milliarder i år 2050 og 11,2 milliarder i år 2100.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.

Kapittel 4. Sannsynlighetsregning

Mål for Kapittel 4, Sannsynlighetsregning.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- ☐ lage eksempler og simuleringer av tilfeldige hendelser og redegjøre for begrepet sannsynlighet
- ☐ beregne sannsynlighet ved å telle opp gunstige og mulige utfall, systematisere opptellinger ved hjelp av krysstabeller, venndiagram og valgtre og bruke addisjonssetningen og produktsetningen i praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hva sannsynlighet er
- ☐ hva gunstige utfall er i ulike oppgaver
- ☐ hva forskjellen på uniform og ikke-uniform sannsynlighet er
- ☐ hvordan jeg ordner informasjon i en krysstabell, et venndiagram og et valgtre
- ☐ hva tilbakelegging betyr i sannsynlighetsregning

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvordan jeg finner sannsynlighet i enkle tilfeller uten tilbakelegging
- ☐ i hvilke tilfeller en bruker addisjonssetningen og produktsetningen
- ☐ hvorfor brøkregning er viktig i sannsynlighet
- ☐ hva en krysstabell representerer
- ☐ hvordan tilbakelegging påvirker sannsynligheten for en hendelse

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ lage og løse sammensatte tekstoppgaver knyttet til sannsynlighet
- ☐ utføre beregninger av sannsynlighet på bakgrunn av tekst og på bakgrunn av en krysstabell
- ☐ diskutere sannsynlighet brukt i dagligtale
- ☐ se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- ☐ vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – Første hest til 10

I denne oppgaven skal dere jobbe sammen i par.

På spillebrettet ser dere 12 hester som står klare ved startstreken og hvor målet er å være første hest til rute nummer 10. Hestene flytter på følgende måte:

- En av dere kaster 2 terninger, og legger sammen antall øyne på terningene. Summen forteller hvilken hest som skal flytte.
- Den andre setter et kryss i første ledige rute i kolonnen til riktig hest.

Før dere begynner:

- Velg dere tre hester hver. Skriv forbokstaven under hesten for å vise hvem som «eier» hvilken hest.
- Bli enige om hvem som kaster og hvem som setter kryss.
- Avgjør en premie til vinneren, dersom en av dere eier vinnerhesten.
- Når en hest har kommet til rute nummer 10 er konkurransen over, uavhengig av om noen eier denne hesten.

Når alle er ferdige lager læreren statistikk over resultatene. Vi skal da diskutere:

a) Hvilke hester blir kastet oftest? Hvorfor skjer dette?
b) Ligner resultatet du fikk på klassens resultat? Hvis det ikke gjør det, hva tror du grunnen er til det?
c) Hvor mange ganger har hest nummer 1 flyttet? Hva er grunnen til dette?
d) Dersom du skulle spilt dette en gang til, hvilke hester ville du valgt? Hvorfor ville du valgt disse hestene?
e) Velg deg en hest, og tenk gjennom følgende:
    - På hvor mange ulike måter kan terningene lande slik at din hest skal flytte?
    - På hvor mange ulike måter kan to terninger lande?
    - Kan du stille opp dette som en brøk, hvor du har antall ønskede kombinasjoner i telleren og antall mulige kombinasjoner i nevneren?
    - Hvorfor er antall muligheter og antall hester ulikt?
f) Still opp en slik brøk for alle hestene. Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for klassen? Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for alle klassene våren 2016?
g) Hvordan ville dette spillet sett ut dersom dere skulle kastet 3 terninger? Hvilke hester ville du valgt da?

1. Innledning

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.
I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er 80 % sannsynlig at Manchester United kommer til å slå Chelsea i lørdagens fotballkamp, eller at det bare er 10 % sannsynlig at Sara får 5 på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Manchester U. vil vinne, og at Sara antagelig ikke vil få 5. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotball-lagene og Sara har prestert tidligere. Hvis vi er helt sikre på at noe bestemt vil skje, sier vi ofte at "det er 100 % sikkert". Er vi sikre på at det ikke vil skje, kan vi si "det er null sannsynlighet" eller "null sjanse".
Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*. De enkleste regnemåtene skal du lære i dette kapitlet.
Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill.

2. Hva *er* sannsynlighet?

All sannsynlighetsberegning i 2PY tar utgangspunkt i sannsynlighetsformelen:

$$P(ønsket\ utfall) = \frac{antall\ gunstige\ utfall}{antall\ mulige\ utfall}$$

hvor svaret kan oppgis i (forkortet) brøk, desimaltall og/eller prosent. Vi bruker P fordi sannsynlighet heter "probability" på engelsk.

Anta at vi har undersøkt kjønn til 10 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	**Antall**	**Antall i prosent**
Gutt	5140	51,4 %
Jente	4860	48,6 %
Gutt eller jente	10000	100 %

Den andre kolonnen viser hvor mange tilfeller det er av hvert utfall.
Siste kolonne viser hvor mange prosent av forsøkene hvert av de to mulige utfallene forekommer.

Etter å ha gjort denne undersøkelsen, kan vi si at sannsynligheten for at et tilfeldig valgt barn er en gutt, er 51,4 %, eller 0,514. Sannsynligheten for at det er en jente, er 48,6 %, eller 0,486. Det skriver vi kort slik:

$$P(\text{gutt}) = 0{,}514\ ,\ P(\text{jente}) = 0{,}486.$$

Sannsynligheten for et bestemt utfall viser i hvor stor prosent av et forsøk dette utfallet forekommer, hvis vi gjør et forsøk *mange* ganger.
Verdien blir mer og mer nøyaktig jo flere ganger vi gjør forsøket.

Oppgave 1

På Hellerud videregående skole er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er gutt?

Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann er fargeblind?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann *ikke* er fargeblind?

3. Sannsynlighetsregning når alle utfall er like sannsynlige

3.1. Innledning

Hvis vi kaster et pengestykke har vi to mulige utfall. Vi kan få mynt, eller kron. Begge utfallene er like sannsynlige. Det betyr at P(M) = 1/2 og P(K) = 1/2. Fordi sannsynlighetene her er *nøyaktig* 50 % (0,50), bruker vi gjerne brøken $\frac{1}{2}$ isteden.

Her er noen eksempler på forsøk og de mulige utfallene

Forsøk	**Mulige utfall**
Kaste et pengestykke	Mynt, kron
Kaste en terning	1, 2, 3, 4, 5, 6
Trekke et kort fra en kortstokk med 52 kort	Hjerter ess, spar to, ... (tilsammen 52)
Bestemme kjønn til nyfødt barn	Gutt, jente
Bestemme antall jenter i en trebarnsfamilie	0, 1, 2, 3
Undersøke om en person er fargeblind	Fargeblind, ikke fargeblind
Undersøke fabrikkmerket på mobilen til en person	Apple, Samsung, LG, Nokia, HTC,...

3.2. Hendelser

Hva er sannsynligheten for å trekke en *hjerter* fra en kortstokk? Det er 13 hjerter i stokken slik at det er 13 av 52 mulige utfall som gir en hjerter.
Vi sier at "hjerter" er en *hendelse* som består av 13 utfall. Disse utfallene kaller vi *gunstige utfall* for hendelsen "hjerter". (Ordet "gunstig" betyr "passende" eller "bra".) Da finner vi sannsynligheten for at vi trekker et hjerterkort slik

$$P(\text{hjerter}) = \frac{13}{52} = \frac{13}{13\cdot 4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

(her har vi skrevet sannsynligheten som både brøk, desimaltall og prosent).

Hvis alle utfallene er like sannsynlige, finner vi sannsynligheten for en *hendelse* slik:

$$P(\text{ en hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Hvis vi kaster to terninger, kan vi kalle summen av øynene for en hendelse. Summen kan variere fra 2 til 12. Det er $6\cdot 6 = 36$ mulige utfall i dette forsøket. Hendelsen "summen av øynene er 7" har seks gunstige utfall: (1+6), (2+5), (3+4), (4+3), (5+2), (6+1). Da får vi

$$P(\text{sum øyne lik 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 3

a) Hva er sannsynligheten $P(\text{fem})$ for å få en *femmer* når vi kaster en terning?
b) Hva er sannsynligheten $P(\text{partall})$ for å få et *partall* når vi kaster en terning?
c) Hva er sannsynligheten for å trekke *hjerter ess* fra en kortstokk?
d) Hva er sannsynligheten for å trekke *ruter* fra en kortstokk?
e) Hva er sannsynligheten for å trekke *et "svart kort"* fra en kortstokk?
f) Hvordan ville du gå fram for å finne ut om alle fødselsdatoer er like sannsynlige? Anta at de faktisk er det. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person er født 1. mai? Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Oppgave 4

Finn sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger er lik
a) 5
b) 10
c) 12

3.3. Multiplikasjonsprinsippet: Hvordan finne antall mulige utfall

Anta at en restaurant tilbyr 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Du kan ikke bestemme deg og velger derfor forrett, hovedrett og dessert ved å sette ned fingeren i menyen helt tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å velge kamskjell til forrett, laks til hovedrett og sjokolademousse til dessert (hvis alle disse står på menyen)?

Vi antar at alle valg av de tre rettene er like sannsynlige, og trenger da antall mulige utfall. Hver av de tre forrettene kan vi kombinere med fem hovedretter. Det gir $3 \cdot 5 = 15$ mulige kombinasjoner. Hver av disse 15 kombinasjonene kan vi kombinere med 4 desserter. Det gir tilsammen $15 \cdot 4 = 60$ mulige treretters middager. Sannsynligheten for et bestemt treretters valg blir da 1/60.

Multiplikasjonsprinsippet: Hvis vi skal gjøre flere valg etter hverandre, finner vi antall mulige utfall ved å multiplisere antall muligheter i hvert av valgene.

Eksempel 1
Ida kan velge mellom sju sjokolader. For at det ikke skal bli for usunt, må hun også velge en av fire frukter. Hun klarer ikke å bestemme seg så hun trekker lodd for å velge. Hva er sannsynligheten for at hun trekker firkløver og pære?

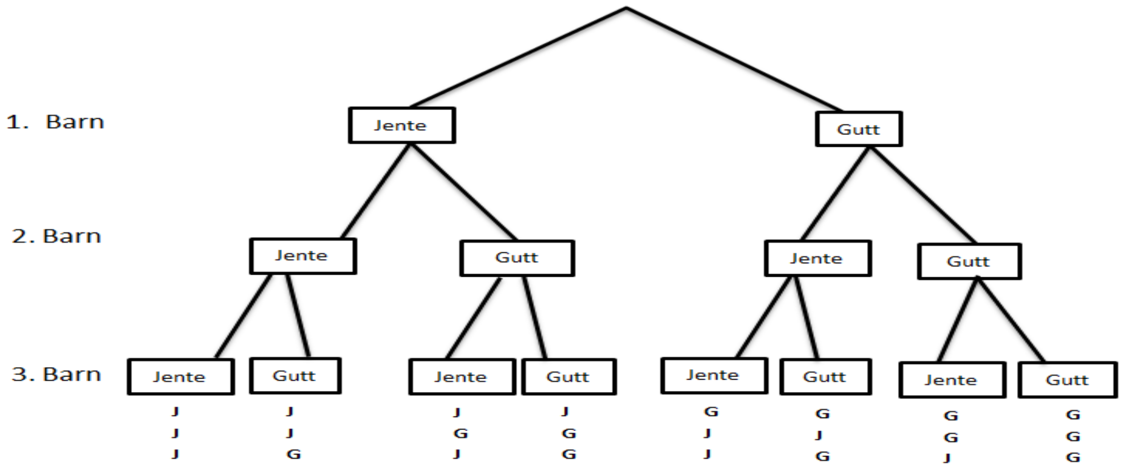
Antall mulige utfall av trekningen er $7 \cdot 4 = 28$.
Hvis hun trekker lodd, kan vi anta at alle de 28 utfallene er like sannsynlige. Derfor er

P(firkløver og pære) = $\frac{1}{28}$.

Eksempel 2
Hva er sannsynligheten for at det første barnet er en gutt, og de to neste er jenter, i en trebarnsfamilie? Anta at alle utfall er like sannsynlige.

Antall mulige utfall er her $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Derfor er $P(\text{GJJ}) = \frac{1}{8}$.

De mulige utfallene i eksempel 2 kan framstilles i et *valgtre*



Her kan vi se at GJJ er en av åtte muligheter totalt. Slik kunne vi brukt valgtreet og funnet at $P(GJJ) = \frac{1}{8}$, akkurat som vi fant i eksempelet over.

Oppgave 5

a) Hvor mange mulige utfall er det hvis vi kaster tre pengestykker?

b) Hva er sannsynligheten for at vi skal få MMK? (mynt på første pengestykke, mynt på andre og kron på tredje)?

c) Tegn et valgtre som ligner på valgtreet ovenfor, og som viser de ulike utfallene i dette forsøket.

Oppgave 6

Vi skal tippe utfallet av to fotballkamper. Hver kamp kan gi hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

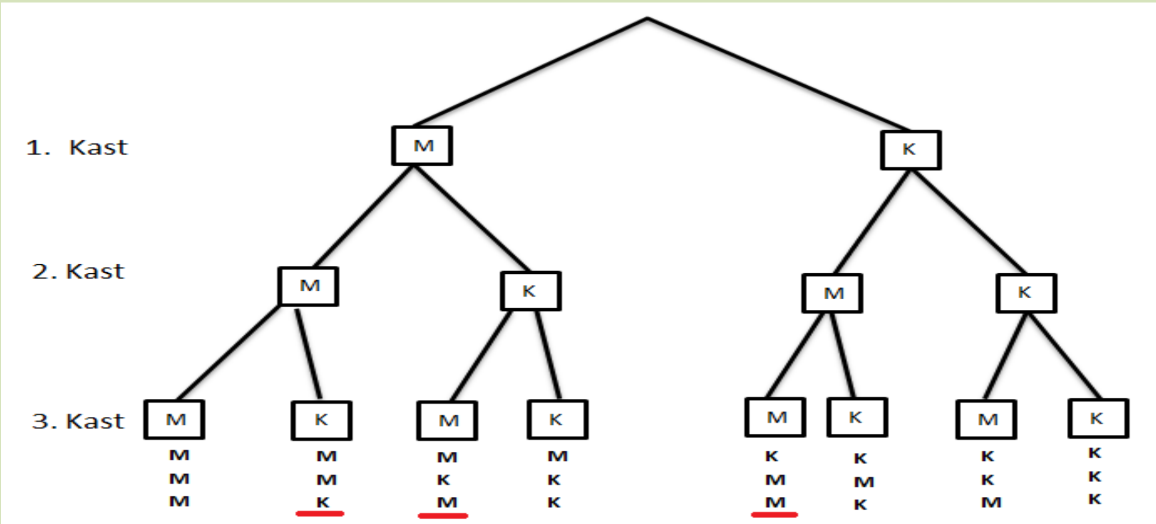
a) Hvor mange mulige utfall er det i denne tippekonkurransen?

b) Lag et valgtre som viser de mulige utfallene.

c) Hvor mange mulige utfall er det hvis man tipper resultatet av 12 kamper?

Eksempel 3
Vi kaster tre pengestykker etter hverandre.
a) Finn sannsynligheten for 2 mynt og en kron.
b) Finn sannsynligheten for 1 mynt og to kron

Tegner et valgtre som gir oss oversikt over de forskjellige utfallene.



a) Vi ser at vi har 8 forskjellige utfall. Av disse gir tre forskjellige to mynt og 1 kron. Detter er MMK, MKM og KMM som er markert i rødt. Sannsynligheter for to mynt og en kron er dermed $\frac{3}{8}$.

b) Av valgtreet ser vi at det er tre muligheter for å få 1 mynt og to kron. MKK, KMK og KKM.

Sannsynligheter for 1 mynt og to kron er dermed $\frac{3}{8}$.

Oppgave 7

Vi kaster to pengestykker etter hverandre.
a) Tegn et valgtre som viser de mulige utfallene vi kan få.
b) Finn sannsynligheten for 2 kron.
c) Finn sannsynligheten for 2 mynt.
d) Finn sannsynligheten for 1 mynt og 1 kron.

Oppgave 8

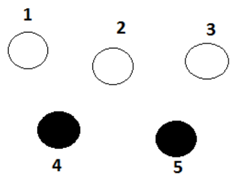
CMT er en arvelig nervesykdom. I gjennomsnitt vil halvparten av barna hvor en av foreldrene har CMT, arve sykdommen.
I en familie har mor CMT. Familien har tre barn.
a) Finn sannsynligheten for at alle tre barna har CMT.
b) Finn sannsynligheten for at to av barna har CMT.
c) Finn sannsynligheten for at ett av barna har CMT.
d) Finn sannsynligheten for at ingen av barna har CMT.

Oppgave 9

a) Finn sannsynligheten for at det er tre gutter og ei jente i en firebarnsfamilie. Vi regner alle de mulige utfallene som like sannsynlige (ikke helt riktig).
b) Vi undersøker 1000 firebarnsfamilier. I omtrent hvor mange av disse vil vi finne tre gutter?

3.4. Sammensatte forsøk. Produktsetningen.

Vi har fem nummererte kuler, tre hvite og to svarte.
Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at både den første og den andre er hvite *når vi legger den første tilbake før vi trekker den andre*?



I følge multiplikasjonsprinsippet har vi $5 \cdot 5 = 25$ mulige utfall. 9 av disse, nemlig (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) gir oss hendelsen "første er hvit og andre er hvit". Da får vi :

$$P(\text{første er hvit og andre er hvit}) = \frac{9}{25}.$$

Trekningen av de to kulene er et eksempel på et *sammensatt forsøk*. Forsøket består av to *delforsøk*.

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen A i første delforsøk og hendelsen B i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for B påvirkes av at A har skjedd.

I trekningsforsøket vårt er hendelsen A "første er hvit" og hendelsen B er "andre er hvit". Det er for begge hendelsene 3 gunstige utfall av 5 mulige. Derfor har vi:

$$P(\text{første hvit og andre hvit}) = P(\text{første hvit}) \cdot P(\text{andre hvit}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

som er samme svar som vi fant på en annen måte ovenfor.

Oppgave 10

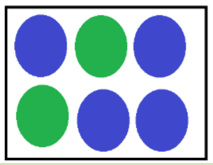
Finn sannsynligheten for å trekke to *svarte* kuler i eksemplet ovenfor (hvor vi legger den første kula tilbake før vi trekker den andre). Løs oppgaven både ved å se på antall gunstige og mulige utfall i det sammensatte forsøket, og ved å bruke produktsetningen.

Oppgave 11

Finn sannsynligheten for å trekke to svarte kuler i eksemplet ovenfor når vi *ikke* legger den første kulen tilbake før vi trekker den andre.

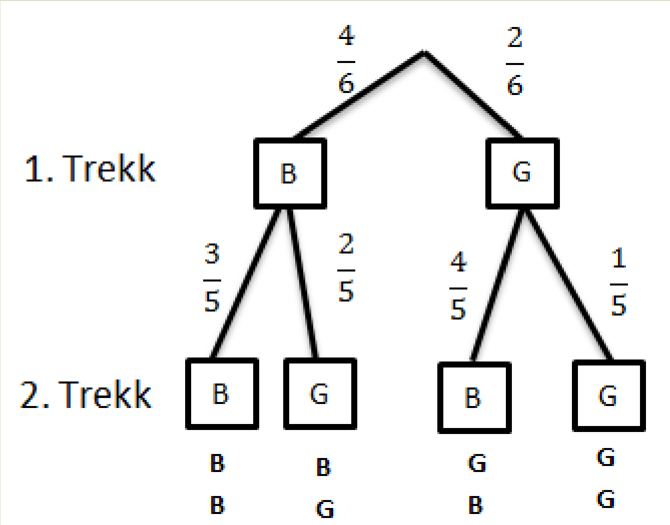
Eksempel 4

I en eske er det fire blå og to grønne kuler. Kenneth trekker tilfeldig to av kulene.



a) Bestem sannsynligheten for at han trekker to blå kuler.
b) Bestem sannsynligheten for at han trekker to grønne kuler.

Velger å tegne et valgtre først. Brøken angir sannsynligheten for hver mulighet. F.eks er det $\frac{4}{6}$ sjanse for å få blå på det første trekket. Hvis vi fikk blå på det første trekket er det kun 3 blå kuler igjen. Sannsynligheten blir da $\frac{3}{5}$ for å få blå på det andre trekket.



a) Vi bruker produksetningen:

$$P(første\ blå\ og\ andre\ blå) = P(første\ blå) * P(andre\ blå) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

Sannsynligheten for to blå er $\frac{6}{15}$

b) $(begge\ grønn) = P(første\ grønn) * P(andre\ grønn) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

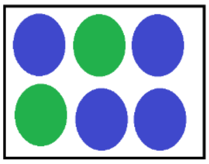
Sannsynligheten for to grønn er $\frac{1}{15}$

Oppgave 12

I en klasse arrangeres et lotteri med 40 lodd. Hver elev skal trekke to lodd, og det er gevinst på tre av de 40 loddene. Ida er den første til å trekke og hun tar to lodd.
Hva er sannsynligheten for at hun har vunnet på begge loddene?

3.5. Addisjonssetningen: En annen måte å beregne sannsynlighet for hendelser

Vi ser tilbake på eksempel 4 med kuletrekning.



Hva er sannsynligheten for å trekke én blå og grønn kule?

Produktsetningen alene kan bare gi oss sannsynlighetene for at den første er blå og den andre grønn, eller omvendt. Slik:

$$P(BG)=\text{P(første blå og andre grønn)}=\text{P(første blå)}\cdot\text{P(andre grønn)} = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

$$P(GB)=\text{P(første grønn og andre blå)}=\text{P(første grønn)}\cdot\text{P(andre blå)} = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for en blå og en grønn kule ved å *addere* (legge sammen) disse to sannsynlighetene:

$$\text{P(en grønn og en blå)} = P(BG)+P(GB)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$$

Dette er et eksempel på bruk av *addisjonssetningen* for sannsynligheter.

Addisjonssetningen. Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A* *eller* hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

$P($ A eller B $) = P(A) + P(B)$.

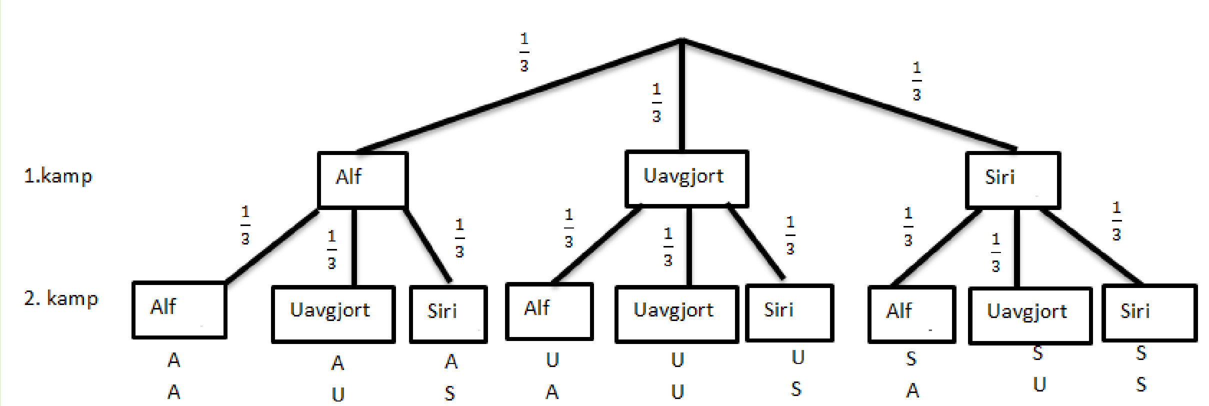
Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig.

Eksempel 5

Alf og Siri spiller “stein –papir –saks” to ganger på rad.

a) Hva er sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre?
b) Hva er sannsynligheten for at minst en av kampene blir uavgjort

Velger å tegne et valgtre først. Alf betyr at Alf vinner, Siri betyr at Siri vinner.



a) At Siri vinner første, og får uavgjort på andre tilsvarer utfallet SU, i valgtreet.

$$P(SU) = \text{P(Siri vinner første)} \cdot \text{P(Uavgjort på andre)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre er $\frac{1}{9}$.

b) Her kan vi bruke addisjonssetningen. Vi ser at minst en av kampene blir uavgjort betyr at vi kan få: AU, UA, UU, US eller SU. Alle disse resultatene er like sannsynlig.

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = P(AU) + P(UA) + P(UU) + P(US) + P(SU)$$

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

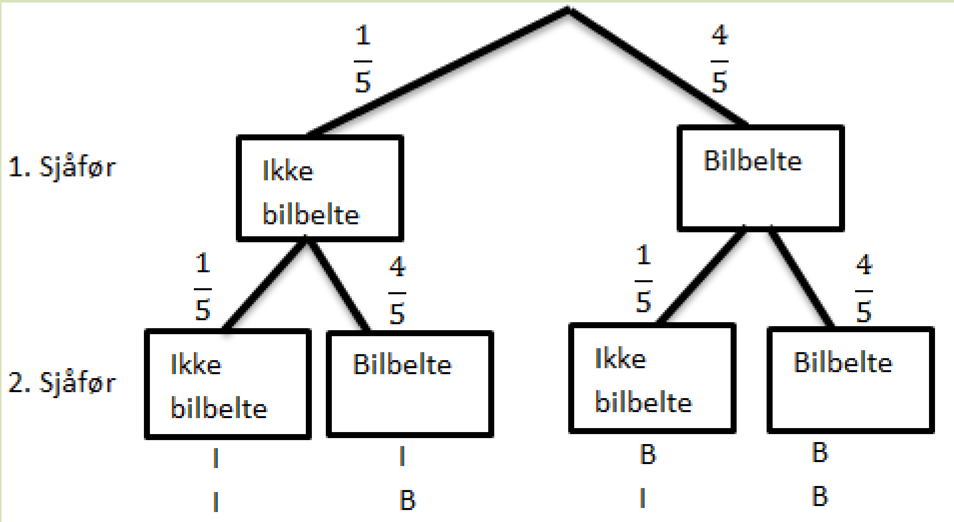
Sannsynligheten for at minst en kamp blir uavgjort er $\frac{5}{9}$.

Eksempel 6

Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere.

a) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte?
b) Hva er sannsynligheten for at *en* bruker bilbelte?

Sannsynligheten for at han ikke bruker bilbelte må være 20 %.
$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ og $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Lager et valgtre for å få oversikt.



a) At begge bruker bilbelte tilsvarer alternativet merket BB. $P(BB) =$
P(første bruker bilbelte)\cdot P(andre bruker bilbelte) $= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$

Sannsynligheten for at begge bruker bilbelte er 64 %.

b) At kun *en* bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.

$$P(IB) = \text{P(første bruker ikke bilbelte)} \cdot \text{P(andre bruker bilbelte)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(BI) = \text{P(første bruker bilbelte)} \cdot \text{P(andre bruker ikke bilbelte)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$\text{P(en bruker bilbelte)} = P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 32\%$$

Sannsynligheten for at kun en bruker bilbelte er 32%.

Oppgave 13

Vi går tilbake til oppgave 12. Hva er sannsynligheten for at Ida vinner på det ene loddet, men ikke på det andre?

Oppgave 14

I en klasse er det 18 jenter og 12 gutter. Læreren trekker tilfeldig to elever til framføring.
a) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to jenter?
b) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to gutter?
c) Hva er sannsynligheten for at det trekkes ei jente og en gutt?

<u>Eksempel 7</u>

Vi trekker to kort fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Hva er sannsynligheten for å trekke to ess?
Det er 4 ess i stokken. Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{første er ess og andre er ess}) = P(\text{første er ess}) \cdot P(\text{andre er ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

Hva er sannsynligheten for å trekke to kort med samme verdi? Det vil si to ess, ..., to seksere, ..., to konger (13 ulike verdier).

Fordi det er fire kort av hver verdi, må sannsynlighetene for å trekke to toere, to treere osv. alle være lik 1/221. Addisjonssetningen sier at vi må legge sammen 13 sannsynligheter, hver med verdi 1/221. Vi får da

$$P(\text{to like}) = 13 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{13}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

Oppgave 15

Vi trekker tre kort fra en kortstokk.
a) Hva er sannsynligheten for at vi trekker tre spar?
De fire fargene i kortstokken er spar (♠), hjerter (♥), ruter (♦) og kløver (♣).
b) Hva er sannsynligheten for at alle tre kortene har samme farge?

3.6. Krysstabeller

Oppgave 16

Finne et mønster i en tabell

- Tenk to minutter individuelt
- Gå sammen med læringspartner og diskuter forslag fem minutter
- Fyll ut tabell 1 og 2
- Et felles metodeforslag i klassen. Fint om alle kan bidra muntlig

7	4	11
3		9
10		20

8		
	2	8
14	7	

Oppgave 17

Finn og fyll ut mønsteret i tabell 3 og 4 individuelt.

6	8	
7		
		34

	9	12
9		
		27

Oppgave 18

Forklar mønsteret med egne ord:

Praktisk bruk av krysstabeller:

- Systematisere informasjonen
- Finne sannsynligheten - gunstige over mulige

<u>Eksempel 8</u>

Klasse:	Tok t-bane i dag	Tok ikke t-bane i dag	Sum
Tok buss i dag	T-bane og buss	Buss, men ikke t-bane	Alle som tok buss
Tok ikke buss i dag	T-bane men ikke buss	Ingen	Alle som ikke tok buss
Sum	Alle som tok t-bane	Alle som ikke tok t-bane	Hele klassen

Oppgave 19

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. En av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer	1	3	
Sum	4	6	

Siv skal trekke en bukse fra skapet.

a) Bestem sannsynligheten for at buksen hun trekker, er svart.

b) Gitt at buksen er blå, bestem sannsynligheten for at buksen ikke passer.

Oppgave 20

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

Fyll inn krysstabellen nedenfor slik at den passer med oppgaven.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

a) Hvis vi trekker en elev, hva er sannsynligheten for at eleven ikke drikker kaffe?

b) Gitt at eleven drikker kaffe, hva er sannsynligheten for at eleven er en jente?

Oppgave 21

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller Spania.

Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell

	Har vært i USA	Har ikke vært i USA	SUM
Har vært i Spania			
Har ikke vært i Spania			
SUM			

a) Hvis vi trekker en tilfeldig elev, hva er sannsynligheten for at denne har vært i USA men ikke i Spania?

b) Vi velger oss to elever. Hva er sannsynligheten for at begge elevene har vært i USA, men ikke i Spania?

Oppgave 22

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50 % leser papiraviser, og 2 % leser ikke aviser

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i krysstabellen nedenfor.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne personen ikke leser papiraviser

Oppgave 23

En klasse på 20 elever planlegger sommerferien.

- 16 har fått sommerjobb
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.

Vi velger oss to elever som skal på ferie. Bestem sannsynligheten for at begge også har sommerjobb.

Oppgave 24

Velg en eksamensoppgave hvor du skal løse oppgaven ved hjelp av en krysstabell.

Lekse:
Løsning:
Kommentar lærer:

Oppgave 17

En klasse har 28 elever. Av dem har 12 elever biologi og 8 har kjemi. 4 elever har både biologi og kjemi.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.
b) Systematiser opplysningene ovenfor i et Venn-diagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra denne klassen.

c) Finn sannsynligheten for at denne eleven har biologi.
d) Finn sannsynligheten for at eleven har biologi eller kjemi. (Se siste linje i eksempel 4.)
e) Det viser seg at den valgte eleven har biologi. Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har kjemi?

4. Sannsynlighetsregning når utfallene ikke er like sannsynlige

4.1. Innledning

Svært ofte i praktisk sannsynlighetsregning er alle utfallene ikke like sannsynlige. I noen tilfeller må vi da selv finne sannsynligheter for utfall ved å regne ut relative frekvenser. I andre tilfeller får vi *oppgitt* slike sannsynligheter som er funnet ved forsøk. Disse sannsynlighetene skal så gjerne brukes til å regne ut sannsynligheter for ulike hendelser.

4.2. Bruk av produktsetningen og addisjonssetningen

Eksempel 9

Hvis mor og far begge har brune øyne, er sannsynligheten for at et barn har brune øyne lik 0,75. Sannsynligheten for at øynene er blå, er 0,25. Paret får fire barn.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fire barna får brune øyne?

Ifølge produktsetningen har vi:

$P(\text{alle fire har brune øyne}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}75^4 = 0{,}316$.

Dette betyr at hvis vi undersøker mange firebarnsfamilier med brunøyde foreldre, vil alle fire barna ha brune øyne i omtrent 31,6 % av familiene.

b) Hva er sannsynligheten for at de to første er brunøyde og de to siste er blåøyde?

Sannsynligheten for at de to første barna er brunøyde og de to siste er blåøyde, er

$$P(\text{brun, brun, blå, blå}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}035$$

De to utfallene (brun, brun, brun, brun) og (brun, brun, blå, blå) av det sammensatte forsøket er altså ikke like sannsynlige.

Oppgave 18

Det har vist seg at sannsynligheten for at et nyfødt barn er en gutt ikke er helt den samme som sannsynligheten for at det er ei jente. Sannsynlighetene er $P(\text{gutt})=0{,}514$ og $P(\text{jente}) = 0{,}486$.

a) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er gutter.

b) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er jenter.

Oppgave 19

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,8. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fem frøene spirer?

b) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem spirer?

Eksempel 10

Jonas sykler til skolen. På veien passerer han to lyskryss. Etter mange passeringer har han funnet ut at sannsynligheten for at han får grønt lys i første krysset er 0,6, og sannsynligheten for at han får grønt lys i andre krysset er 0,3.

a) Hva er sannsynligheten for at han får *rødt* lys i første krysset?

Fordi det bare er to mulige utfall må vi ha at $P(\text{grønt}) + P(\text{rødt}) = 1$.
Da er $P(\text{rødt}) = 1 - P(\text{grønt}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b) Hva er sannsynligheten for å få rødt i begge kryssene?

Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{rødt i første og rødt i andre}) = P(\text{rødt i første}) \cdot P(\text{rødt i andre}) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$$

c) Hva er sannsynligheten for å få grønt i begge kryssene?

$$P(\text{grønt i første og grønt i andre}) = P(\text{grønt i første}) \cdot P(\text{grønt i andre}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$$

d) Hva er sannsynligheten for å få rødt i nøyaktig ett av kryssene?

Her må vi bruke både addisjonssetningen og produktsetningen.

$P(\text{ett grønt og ett rødt}) = P(\text{rødt i første og grønt i andre } \textit{eller} \text{ grønt i første og rødt i andre}) =$
$P(\text{rødt i første og grønt i andre}) + P(\text{grønt i første og rødt i andre}) =$
$0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$.

Legg merke til at summen av sannsynlighetene i b, c og d er lik 1. Hvorfor må det være slik?

Oppgave 20

Per og Kari kommer ofte for sent til første time. Etter at det har gått noen måneder av skoleåret, har klassens ekspert i sannsynlighetsregning funnet ut at sannsynligheten for at Per kommer for sent er 0,23, og sannsynligheten for at Kari kommer for sent er 0,18. Per og Kari kjenner ikke hverandre, og kommer ikke med samme buss, slik at det at Per kommer for sent ikke påvirker sannsynligheten for at Kari kommer for sent.

a) Hva er sannsynligheten for at Per kommer *tidsnok* en bestemt dag?

b) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en bestemt dag?

c) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem kommer tidsnok en bestemt dag?

d) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en hel skoleuke (fem dager)?

4.3. Oppgaver med sannsynlighet «minst én»

Eksempel 11

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,7. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av frøene spirer?

Sannsynligheten for at et bestemt frø ikke skal spire blir 1 – 0,7 = 0,3.
Produktsetningen gir da

$$P(\text{ingen spirer}) = 0{,}3^5 = 0{,}002 .$$

b) Hva er sannsynligheten for at minst ett av frøene spirer?

At “minst ett“ spirer betyr at ett eller flere frø spirer. Denne sannsynligheten kan vi regne ut ved å legge sammen de fem sannsynlighetene for at 1, 2, 3, 4 og 5 spirer, men dette er mye arbeid og vanskelig. Det er mye lettere hvis vi deler alle mulige utfall i *to* hendelser istedenfor i seks, nemlig “ingen frø spirer“ og “minst ett frø spirer“. Fordi disse to hendelsene dekker alle muligheter, må vi ha

$$P(\text{ ingen frø spirer}) + P(\text{minst ett frø spirer}) = 1$$

Derfor har vi

$$P(\text{minst ett frø spirer}) = 1 - P(\text{ ingen frø spirer}) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998 = 99{,}8\ \%.$$

Oppgave 21

Sannsynligheten for at Per kommer for sent til skolen en tilfeldig dag er 0,23.

a) Hva er sannsynligheten for at han kommer for sent både onsdag, torsdag og fredag?

b) Hva er sannsynligheten for at han kommer *tidsnok* minst én av disse tre dagene?

Oppgave 22

I en kommune stemte 48 % på et av de “rødgrønne“ partiene. Vi velger tilfeldig ut fem av de som stemte. Hva er sannsynligheten for at minst én av disse velgerne stemte “rødgrønt“?

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 4 (del 1)

Tenk deg at du har ti bananer i skapet. Fem av dem er gule, tre er grønne, og to er blitt brune. Du tar tilfeldig to bananer.

a) Bestem sannsynligheten for at du ikke tar en brun banan.

b) Bestem sannsynligheten for at du tar én gul og én grønn banan.

c) Bestem sannsynligheten for at du tar to bananer med samme farge.

V15 - Oppgave 4 (del 2)

Tenk deg at du har fått i oppgave å teste et nytt vitamintilskudd. Du velger tilfeldig ut 80 personer. Alle 80 tror de får vitamintabletter, men i virkeligheten får bare 60 av personene vitamintabletter, mens resten får tabletter uten vitaminer.

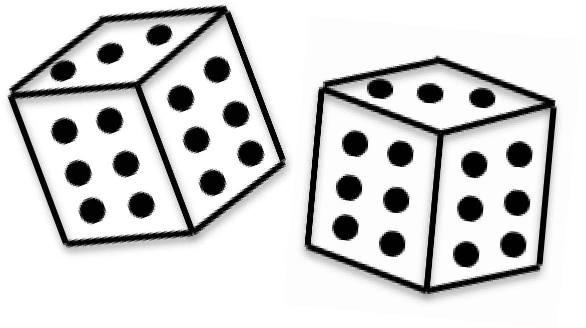
Etterpå svarer 50 personer at de føler seg mer opplagte. Av disse 50 er det 4 som ikke har fått vitamintabletter.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i et venndiagram eller i en krysstabell.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person som har fått vitamintabletter, føler seg mer opplagt etterpå.

c) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person som føler seg mer opplagt etterpå, har fått vitamintabletter.

H15 - Oppgave 7 (del 1)



Sebastian har to jukseterninger. To sider på hver av terningene har seks øyne, én side har fire øyne, én side har tre øyne, én side har to øyne, og én side har ett øye.

Sebastian kaster begge terningene.

c) Bestem sannsynligheten for at han får to seksere.

d) Bestem sannsynligheten for at summen av antall øyne blir sju.

H15 - Oppgave 6 (del 2)

En av fire mener kantinen er viktig ved valg av jobb

Det betyr mest for menn hva jobben kan tilby av mat-løsninger

I en rundspørring svarte 25 % at kantinetilbudet er viktig ved valg av arbeidsgiver. 32 % av mennene og 18 % av kvinnene som deltok i rundspørringen, svarte at god kantine er viktig. Anta at det var like mange menn som kvinner som deltok i rundspørringen.

a) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

b) Bestem sannsynligheten for at en person som deltar i rundspørringen, er en kvinne som synes kantine er viktig.

c) Bestem sannsynligheten for at en person som svarer at kantine er viktig, er en mann.

V16 - Oppgave 8 (del 1)

Det er 26 elever i en matematikkgruppe.

- 16 av elevene gjør leksene til hver time.
- 20 av elevene har karakteren 3 eller høyere i faget.
- 5 av elevene som ikke gjør leksene til hver time, har lavere karakter enn 3 i faget.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig én elev fra gruppen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven ikke gjør leksene til hver time og har karakteren 3 eller høyere i faget.

En dag er bare de elevene som gjør leksene til hver time, til stede. Vi velger tilfeldig én av disse elevene.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven har lavere karakter enn 3 i faget.

H16 - Oppgave 5 (del 1)

Pia skal kaste to vanlige terninger.
Bestem sannsynligheten for at produktet av antall øyne vil bli et oddetall.

V17 - Oppgave 8 (del 2)

I en klasse er det 12 jenter og 18 gutter. Neste skoleår ønsker 3 av jentene og 2 av guttene å studere i utlandet.

a) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller et venndiagram.

Tenk deg at du skal trekke to elever fra klassen tilfeldig.

b) Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke to elever som ikke ønsker å studere i utlandet.

c) Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke én gutt og én jente som ønsker å studere i utlandet.

H17 - Oppgave 5 (del 1)

I en gruppe er det ti elever. Etter videregående skole ønsker sju av elevene å studere ved et universitet.

Tenk deg at vi trekker to elever tilfeldig fra gruppen.

Bestem sannsynligheten for at begge elevene ønsker å studere ved et universitet.

V18 - Oppgave 6 (del 2)

Maria vil legge to røde og to blå kuler i en kopp.

- Hun vil trekke to kuler fra koppen tilfeldig.
- Hun vil ikke legge tilbake den første kula før hun trekker den neste.

a) Tegn et valgtre, gjør beregninger, og avgjør hvilken av påstandene nedenfor som er riktig.

Påstand 1: Det er mest sannsynlig at hun kommer til å trekke to kuler med samme farge.

Påstand 2: Det er mest sannsynlig at hun kommer til å trekke to kuler med ulik farge.

Påstand 3: Sannsynligheten for at hun kommer til å trekke to kuler med samme farge, er like stor som sannsynligheten for at hun kommer til å trekke to kuler med ulik farge.

b) Gjør beregninger, og avgjør hvilken av påstandene ovenfor som er riktig dersom Maria i stedet legger tre røde og én blå kule i koppen og trekker to kuler på samme måte som beskrevet ovenfor.

Forberedelse til prøven

F1

En butikk ønsket å telle hvor mange som kjøper peanøttsmør og syltetøy. De valgte tilfeldig ut 25 personer.

De fant ut følgende:

- ti personer kjøpte peanøttsmør
- 14 personer kjøpte syltetøy
- åtte personer kjøpte både syltetøy og peanøttsmør

	Peanøttsmør	Ikke peanøttsmør	Sum
Syltetøy	8		14
Ikke syltetøy			
Sum	10		25

a) Fyll inn krysstabellen ovenfor slik at den passer med oppgaven.

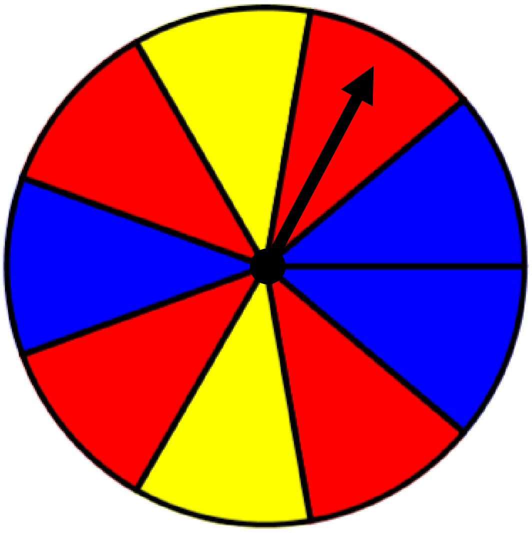
Vi trekker tilfeldig en person fra alle som var med på undersøkelsen.

b) Bestem sannsynligheten for at personen har kjøpt både peanøttsmør og syltetøy? Oppgi svaret som brøk og prosent.

Gitt at vi trekker en person som ikke kjøpte peanøttsmør.

c) Hva er sannsynligheten for at denne personen ikke har kjøpt syltetøy?

F2



På et tivoli ser du en konkurranse:

Snurr pila to ganger! Følgende kombinasjoner gir premie:

1. premie: rekkefølgen gul – blå

2. premie: nøyaktig 1 rød

3. premie: minst 1 blå

Tegn et valgtre (gjerne med brøker) som viser alle mulige kombinasjoner, og bestem sannsynligheten for å oppnå de ulike premiene.

F3

En studie av 1000 Oslo-elever hadde følgende resultater:

- 43 % tar t-banen til skolen
- 12 % tar både buss og t-bane til skolen
- $\frac{1}{4}$ tar buss, men ikke t-bane til skolen

a) Systematiser opplysningene i en krysstabell eller et venndiagram.

Vi trekker tilfeldig to personer fra undersøkelsen.

b) Hva er sannsynligheten for at vi trekker først en person som bare tar t-bane og deretter tar både buss og t-bane?

Det viser seg at den første personen vi trakk tar t-bane.

c) Hva er sannsynligheten for at denne personen ikke tar buss?

F4

Tenk deg at du har ti bananer i skapet. Fem av dem er gule, tre grønne og to er blitt brune.

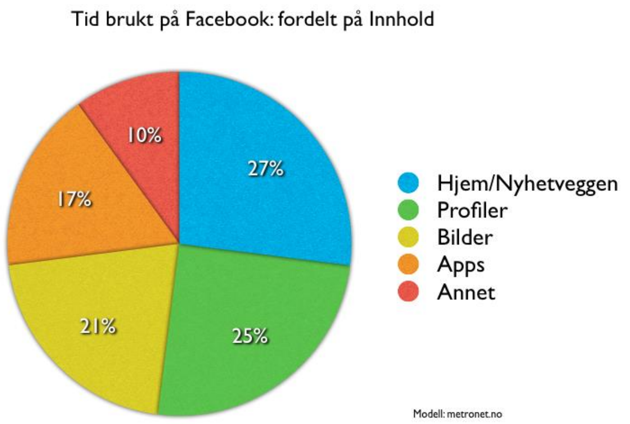
Du tar tilfeldig tre bananer.

a) Bestem sannsynligheten for at du tar tre gule bananer.

b) Bestem sannsynligheten for at du tar minst en grønn banan.

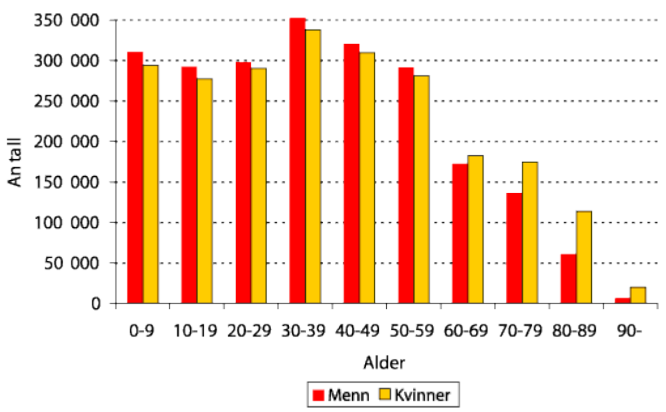
c) Bestem sannsynligheten for at du tar en brun og to gule bananer.

Kapittel 5. Statistikk



Dette kapitlet handler blant annet om:

- Beregne gjennomsnitt og andre sentralmål.
- Framstille data i frekvenstabeller.
- Beregne standardavvik og andre spredningsmål.
- Framstille data i søyle-, sektor- og andre typer diagrammer.
- Bruke Excel til å gjøre statistiske beregninger.



Mål for kapittel 5. Statistikk

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- planlegge, gjennomføre og vurdere statistiske undersøkelser
- beregne og drøfte sentralmål og spredningsmål
- beregne og gjøre rede for kumulativ og relativ frekvens, representere data i tabeller og diagrammer og drøfte ulike dataframstillinger og hvilket inntrykk de kan gi
- gruppere data og beregne sentralmål for et gruppert datamateriale
- bruke regneark i statistiske beregninger og presentasjoner

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg setter data inn i en tabell med frekvens, relativfrekvens, kumulativ frekvens og relativ kumulativ frekvens
- ☐ hvordan jeg tegner diagrammer for hånd
- ☐ hvordan jeg tegner diagrammer i Excel
- ☐ hvordan jeg finner sentralmål: gjennomsnitt, typetall og median
- ☐ hvordan jeg finner spredningsmål: variasjonsbredde og standardavvik
- ☐ hvordan jeg kan finne sentralmål og spredningsmål ved hjelp av Excel
- ☐ hvordan jeg finner gjennomsnitt i et klassedelt materiale
- ☐ hvordan jeg kan finne hvilken klasse medianen er i et klassedelt materiale

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvilken informasjon relativ frekvens og kumulativ frekvens gir
- ☐ hva ulike sentralmål forteller om et datamateriale
- ☐ hva ulike spredningsmål forteller om et datamateriale
- ☐ hva vi mener med et klassedelt materiale

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ argumentere rundt og sammenligne praktiske situasjoner ut i fra tallverdien til sentralmål og spredningsmål
- ☐ velge hensiktsmessige hjelpemidler når jeg jobber med statistiske beregninger

Utforskende oppgave – Statistisk undersøkelse

I denne oppgaven skal du gjøre en undersøkelse blant elevene på skolen.

Spør elever i klassen om hvor mange skjermer (telefon, pc, tv, nettbrett etc.) de har hjemme.

Registrer svarene i tabellen under

Elev nr	Antall skjermer	Elev nr	Antall skjermer
1		26	
2		27	
3		28	
4		29	
5		30	
6		31	
7		32	
8		33	
9		34	
10		35	
11		36	
12		37	
13		38	
14		39	
15		40	
16		41	
17		42	
18		43	
19		44	
20		45	
21		46	
22		47	
23		48	
24		49	
25		50	

Hvordan kan du fremstille dette resultatet på en oversiktlig måte? Vis på neste side.

Hvor mange elever har 5 skjermer eller mindre hjemme?

Hvor mange prosent av elevene har 6 skjermer hjemme?

x Antall skjermer	**f** Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kumulativ frekvens	**x · f** Sum skjermer
Sum					

1. Hva *er* statistikk?

Statistikk handler om å trekke informasjon ut av et *datamateriale* og å framstille materialet på oversiktlige måter. Et datamateriale består av mange tall, og hvert tall kaller vi gjerne en *observasjon.* Eksempler på datamateriale:

- Standpunktkarakterene til alle elevene i 2P som var oppe til eksamen
- Høydene til alle som er på militærsesjon et år
- Antall mål en bestemt fotballspiller har scoret i hver kamp han har spilt
- Maksimumstemperaturen på Blindern hver dag i 2013

Statistikk deles inn i to hovedområder: **presentasjon** og **analyse**.

Presentasjon handler om å presentere observasjonene på en oversiktlig måte, enten via **frekvenstabell** eller **diagram**. Det er fire diagram du skal kunne lage: **stolpe/søylediagram**, **linjediagram**, **sektordiagram** og **histogram**.

Analyse går ut på å fortelle noe om observasjonene. Dette deles i to: **sentralmål (typetall, median og gjennomsnitt)** og **spredningsmål (variasjonsbredde og standardavvik)**.

Vi bruker karakterene i to 2P-grupper med tilsammen 50 elever som eksempel:

2 3 1 3 3   5 1 2 2 4   6 2 2 1 2   3 1 2 4 4   5 2 2 3 3   1 2 4 2 5   4 4 1 2 3   2 2 3 1 5   4 2 1 5 2
3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut. Vi framstiller derfor tallene i en *frekvenstabell* og som et *diagram*.

2. Frekvenstabeller

2. 1 Frekvens

En *frekvenstabell* viser hvor mange ganger hver dataverdi forekommer. I datamaterialet ovenfor er det seks dataverdier (de seks mulige karakterene), og det er 10 elever som har fått karakteren 3. Vi sier at *frekvensen* til karakteren 3 er lik 10. Andre ord for frekvens er *hyppighet* og *antall*.

Frekvenstabellen blir slik:

Karakter	Frekvens
1	9
2	16
3	11
4	8
5	5
6	1
Sum	50

Vi bør regne ut summen av alle seks frekvensene og sjekke at den blir lik antall observasjoner (her 50).

2. 1 Relativ frekvens

Ofte er det mer opplysende å finne ut hvor stor *del* av datamaterialet hver frekvens utgjør. Det oppgir vi i prosent og kaller det *relativ frekvens.*. Her er et eksempel på utregning:

Relativ frekvens for karakteren 4: $\frac{8}{50} = 0,16 = 16\ \%$

Her er tabellen en gang til hvor vi har tatt med relative frekvenser:

Karakter	**Frekvens**	**Relativ frekvens**
1	9	18 %
2	16	32 %
3	11	22 %
4	8	16 %
5	5	10 %
6	1	2 %
Sum	50	100 %

Sjekk at summen av de relative frekvensene blir 100 %.

Oppgave 1

Fyll ut den relative frekvensen for antall skjermer elever har hjemme.

2. 2 Kumulativ frekvens

Det kan være interessant å slå sammen flere frekvenser. For eksempel kan det være nyttig for en lærer å vite hvor mange elever som har fått karakteren 1, 2 eller 3. Dersom vi legger sammen flere frekvenser kalles dette kumulativ frekvens.

Tabellen under er utvidet slik at den også viser kumulativ frekvens

Karakter	**Frekvens**	**Relativ frekvens**	**Kumulativ frekvens**
1	9	18 %	9
2	16	32 %	25
3	11	22 %	36
4	8	16 %	44
5	5	10 %	49
6	1	2 %	50
Sum	50	100 %	Skal ikke summeres

Dette betyr for eksempel at 36 av de 50 elevene fikk karakteren 3 eller lavere.

Oppgave 2

a) Hvorfor står det «skal ikke summeres» i den nederste ruta i kolonnen til kumulativ frekvens?

b) Fyll ut den kumulative frekvensen for antall skjermer elever har hjemme.

2. 3 Relativ kumulativ frekvens

Ønsker vi å vise den kumulative frekvensen i prosent kalles dette relativ kumulativ frekvens. Dette regnes ut på samme måte som relativ frekvens, bortsett fra at vi bruker den kumulative frekvensen.

Tabellen under er utvidet slik at den også viser relativ kumulativ frekvens.

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	18 %	9	18 %
2	16	32 %	25	50 %
3	11	22 %	36	72 %
4	8	16 %	44	88 %
5	5	10 %	49	98 %
6	1	2 %	50	100 %
Sum	50	100 %	Skal ikke summeres	

Dette betyr for eksempel at 72 % av de 50 elevene fikk karakteren 3 eller lavere.

Oppgave 3

Fyll ut den relative kumulative frekvensen for antall skjermer elever har hjemme.

2. 4 Typetall

Typetall er den observasjonen som forekommer flest ganger. I denne undersøkelsen vil det si hvilken karakter som forekommer oftest.

Dette finner vi ved å se på frekvenskolonnen. Det er flest som har fått karakteren 2. Det vil si at typetallet til denne undersøkelsen er 2.

Oppgave 4

Finn typetallet til antall skjermer elever har hjemme.

2. 5 Median

Medianen til et datamateriale er den observasjonen som står i midten når vi har sortert tallene i rekkefølge. Når antall observasjoner er et partall vil det være to observasjoner i midten. Dersom disse er ulike må du legge sammen observasjonene og dividere på 2.

Vi finner hvilken observasjon som er i midten ved å bruke formelen

$$\frac{Ant.observasjoner + 1}{2}$$

Dersom svaret blir et desimaltall er antall observasjoner et partall, og det vil derfor være to observasjoner i midten.

Vi kunne ha laget en liste med de 50 karakterene, og noen velger å gjøre dette på prøver. Det kan imidlertid ta ganske lang tid, så det finnes heldigvis en raskere metode.

Mediankarakteren er den karakteren som står i midten når karakterene er skrevet i rekkefølge. I dette tilfellet er det 50 observasjoner

Observasjonen i midten vil derfor være nummer $\frac{50+1}{2} = 25{,}5$. Vi er derfor ute etter observasjon nummer 25 og 26. I kolonnen kumulativ frekvens ser vi at observasjon nummer 25 er karakter 2. Dermed må observasjon nummer 26 være karakter 3. For å finne medianen må vi legge dem sammen og dividere på 2:

Median = $\frac{2+3}{2}$ = 2,5

Vi ville fått det samme svaret om vi hadde skrevet en liste med alle 50 karakterene, og det er bedre å gjøre det enn å ikke besvare oppgaven!

Oppgave 5

a) For hvilke typer undersøkelser vil det ikke være mulig å finne medianen?

b) Finn medianen til antall skjermer elever har hjemme.

2. 6 Variasjonsbredde

Variasjonsbredde viser forskjellen mellom den høyeste og den laveste observasjonen.

I denne undersøkelsen finner vi det ved å se på kolonnen for karakterer. Den høyeste karakteren er 6, og den laveste er 1.

Variasjonsbredde = 6 – 1 = 5.

Oppgave 6

a) Hva ville variasjonsbredden vært dersom ingen elever fikk karakteren 1?

b) For hvilke typer undersøkelser vil det ikke være mulig å regne ut variasjonsbredde?

c) Finn variasjonsbredden til antall skjermer elever har hjemme

2.7 Gjennomsnitt

Med gjennomsnitt tenker vi at vi fordeler verdien til alle observasjonene slik at alle observasjonene får den samme verdien. Som en formel skrives det slik:

$$\frac{sum\ verdier}{antall\ observasjoner}$$

I dette datamaterialet tenker vi at alle skulle fått den samme karakteren. Vi må derfor legge sammen alle karakterene og dele på antall observasjoner (50).

Vi kunne ha laget en liste med de 50 karakterene, og noen velger å gjøre dette på prøver. Det kan imidlertid ta ganske lang tid, så det finnes heldigvis en raskere metode.

For å løse oppgaven raskere trenger vi en kolonne til, hvor vi multipliserer verdien karakterene med frekvensen. Da blir tabellen slik:

x **Karakter**	**f** **Frekvens**	**Relativ frekvens**	**Kumulativ frekvens**	**Relativ kum. fr.**	**x · f** **Verdier**
1	9	18 %	9	18 %	9
2	16	32 %	25	50 %	32
3	11	22 %	36	72 %	33
4	8	16 %	44	88 %	32
5	5	10 %	49	98 %	25
6	1	2 %	50	100 %	6
Sum	50	100 %			137

Vi har nå regnet ut at verdien til alle observasjonene er 137. For å finne gjennomsnittskarakteren må vi dividere dette på antall observasjoner (50).

Gjennomsnitt = $\frac{137}{50}$ = 2,74 ≈ 2,7

Oppgave 7

a) For hvilke typer undersøkelser vil det ikke være mulig å finne gjennomsnittet?

b) Hvor mange skjermer har hver elev i gjennomsnitt hjemme?

Oppgave 8

En klasse gjorde en undersøkelse på hvor mange søsken hver enkelt elev hadde. De samlet resultatet til følgende frekvenstabell:

x **Ant. søsken**	f **Ant. elever**				
0	2				
1	3				
2	5				
3	4				
4	4				
5	2				
Sum					

a) Gjør nødvendige beregninger for å finne ut antall elever i denne klassen. Hvor mange søsken har flest av elevene? Med hvor mye varierte antall søsken i denne klassen?

b) Utvid tabellen slik at du finner ut hvor mange prosent av elevene som hadde 3 søsken.

c) Utvid tabellen slik at du finner ut medianen til dette datamaterialet.

d) Utvid tabellen slik at du finner ut hvor mange prosent av elevene som hadde 3 søsken eller færre.

e) Utvid tabellen slik at du finner ut hvor mange søsken hver elev hadde i gjennomsnitt.

Oppgave 9

En lærer målte temperaturen ved skolestart hver dag i mars, og presenterte resultatet gjennom tabellen nedenfor:

x **Temperatur**	f **Ant. dager**				
-1	3				
0	3				
1	4				
2	10				
Sum					

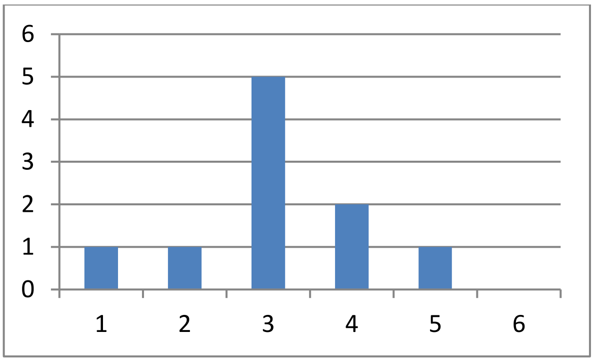
Gjør nødvendige beregninger og finn median, typetall, gjennomsnitt og variasjonsbredde til tallmaterialet ovenfor.

2.8 Standardavvik

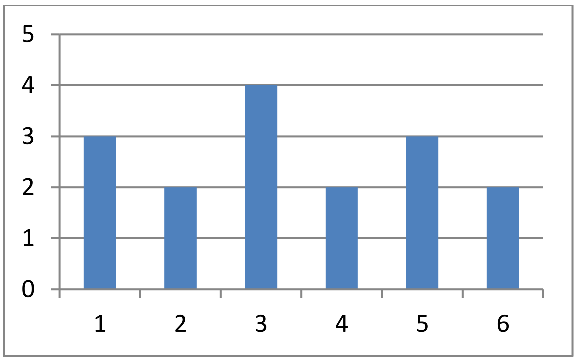
Ofte gir ikke variasjonsbredden et godt bilde av spredningen. For eksempel kan vi tenke oss en 2P-gruppe hvor nesten alle elevene fikk karakter 3, mens en elev fikk 1 og en fikk 6. I en annen gruppe fikk to elever 1, fire fikk 2, fem fikk 3, fire fikk 4, tre fikk 5 og to fikk 6. Variasjonsbredden er 5 i begge gruppene, men det er likevel naturlig å si at det er mer spredning i karakterene i den andre gruppen.

Standardavvik er et spredningsmål som sier noe om hvor "bred" en fordeling er. Det venstre diagrammet nedenfor viser et datamateriale med lite standardavvik og det høyre et med stort standardavvik.

Den nøyaktige definisjonen av standardavvik er litt vanskelig, så vi tar den ikke med her. Heldigvis er det bare aktuelt å beregne standardavvik i del 2-oppgaver, og da kan vi gjøre det ved å bruke regnearket Excel slik det er forklart i neste delkapittel.



Lite standardavvik.



Stort standardavvik.

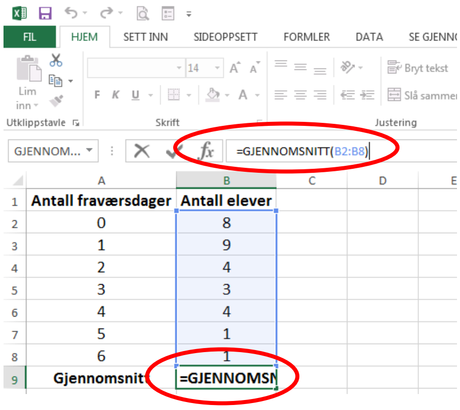
3. Beregning av sentralmål og spredningsmål i Excel

3.1 Når tallmaterialet er presentert i en liste

De sentral- og spredningsmål i 2P som kan være aktuelle å beregne i Excel er gjennomsnitt, median, typetall og standardavvik.

Viktig: alle formler og kommandoer må begynne med likhetstegn (=).

I. Klikk på cellen som skal inneholde sentralmålet og sett inn et likhetstegn (=).
II. Skriv inn ønsket kommando med parentestegn: Gjennomsnitt(dataområde) eller Median(dataområde) eller Modus(dataområde), modus er det samme som typetall eller STDAV.P.(dataområde), standardavvik.
III. Bruk musepekeren og marker dataområdet til kommandoen og trykk *Enter*.



- Ikonet f_x på verktøylinjen er en hurtigfunksjon. Da får du likhetstegn inn i cellen. Og tilgang på alle Excel kommandoer i et nytt vindu.
- Vi kan bytte mellom å se formler og beregninger i Excel ved å taste ***(Ctrl* + `).** Apostrofe = (Shift + tasten bak pluss) **eller** Velg *fane-formler* deretter *verktøyikon-Vise formel*.
- På en prøve må du legge ved utskrift av både resultater og formler med navn på rader og på kolonner.

Eksempel 8

Vi har målt høyden til 7 jenter. Høydene i cm er: 177,164, 170, 168, 172, 161, 169.

Bildet under viser hvordan vi finner medianen, gjennomsnittet og standardavviket til disse høydene i Excel. Til venstre ser vi formlene som må skrives inn og til høyre hvordan resultatene blir.

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	= ANTALL(B3:B9)
12	Gjennomsnitt:	=GJENNOMSNITT(B3:B9)
13	Standardavvik:	=STDAV.P(B3:B9)
14	Median:	=MEDIAN(B3:B9)

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	7
12	Gjennomsnitt:	168,7
13	Standardavvik:	4,8
14	Median:	169

Formelen for antall i B11 trenger vi egentlig ikke her. Den er bare tatt med for å vise at Excel lett kan telle opp antall celler i et område; her antall høyder.

Oppgave 10

Vi spurte 8 elever i kantina om hvor mye de hadde handlet for. De svarte at de hadde brukt følgende beløp (i kroner): 55, 70, 45, 60, 80, 50, 65 og 70.

Bruk Excel til å finne medianen, gjennomsnittet, typetallet og standardavviket til tallmaterialet.

3.2 Når tallmaterialet er presentert i en tabell

x **Karakter**	**f** **Frekvens**
1	9
2	16
3	11
4	8
5	5
6	1

Dersom du blir bedt om å finne gjennomsnittskarakteren og standardavviket til talmaterialet presentert i tabellen til venstre fungerer ikke formlene vist ovenfor. På de neste sidene vises hvordan det må gjøres.

Gjennomsnitt:

	A	B	C	D
1		**x** karakter	**f** frekvens	**x · f**
2		1	9	9
3		2	16	32
4		3	11	33
5		4	8	32
6		5	5	25
7		6	1	6
8		Sum	50	137
9				
10	Gjennomsnitt ($\bar{x}$)	2,7		

	A	B	C	D
1		**x** karakter	**f** frekvens	**x · f**
2		1	9	=B2*C2
3		2	16	=B3*C3
4		3	11	=B4*C4
5		4	8	=B5*C5
6		5	5	=B6*C6
7		6	1	=B7*C7
8		Sum	=SUMMER(C2:C7)	=SUMMER(D2:D7)
9				
10	Gjennomsnitt ($\bar{x}$)	=D8/C8		

Vi må gjøre de samme beregningene som når vi regner gjennomsnitt for hånd. Se på formelutskriften til høyre, og se om du forstår hvilke regneoperasjoner som er utført.

Standardavvik:

	A	B	C	D	E
1		**x** karakter	**f** frekvens	**x · f**	$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 \cdot \mathbf{f}$
2		1	9	9	27,2484
3		2	16	32	8,7616
4		3	11	33	0,7436
5		4	8	32	12,7008
6		5	5	25	25,538
7		6	1	6	10,6276
8		Sum	50	137	85,62
9					
10	Gjennomsnitt ($\bar{x}$)	2,7			
11					
12	Standardavvik	1,3			

3. Vi regner $\sqrt{\dfrac{sum\ avvik}{sum\ frekvens}}$

1. Vi regner ut avviket for hver enkelt karakter ved å regne: (karakter – gjennomsnitt)^2 · frekv.

2. Vi legger sammen alle avvikene.

(formler neste side)

	A	B	C	D	E
1		karakter	frekvens	$\mathbf{x \cdot f}$	$\mathbf{(x - \bar{x})^2 \cdot f}$.
2		1	9	=B2*C2	=(B2-B10)^2*C2
3		2	16	=B3*C3	=(B3-B10)^2*C3
4		3	11	=B4*C4	=(B4-B10)^2*C4
5		4	8	=B5*C5	=(B5-B10)^2*C5
6		5	5	=B6*C6	=(B6-B10)^2*C6
7		6	1	=B7*C7	=(B7-B10)^2*C7
8		Sum	=SUMMER(C2:C7)	=SUMMER(D2:D7)	=SUMMER(E2:E7)
9					
10	Gjennomsnitt ($\bar{x}$)	=D8/C8			
11					
12	Standardavvik	=ROT(E8/C8)			

Oppgave 11

Bruk Excel til å finne gjennomsnitt og standardavvik for tallmaterialet i oppgave 8 og 9.

4. Klassedelt (gruppedelt materiale)

Når det er mange ulike dataverdier er det upraktisk å ta med alle i en frekvenstabell. Et eksempel er inntektsstatistikk hvor inntekten kan ha tusenvis av forskjellige verdier. Da grupperer vi verdiene i *klasser* (*grupper*) og finner frekvensen for hver klasse.

Her er et eksempel på en klassedelt frekvenstabell som viser inntekten til lønnsmottakerne i en tenkt kommune. Inntektene er oppgitt i tusener av kroner.

Inntekt	Frekvens
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45
	N = 14211

Dette betyr for eksempel at det var 678 lønnsmottakere som hadde en inntekt *fra og med* 100 000 kr og *inntil* 200 000. En inntekt på nøyaktig 200 000 kr faller i neste klasse, nemlig [200, 300>. Nederst i frekvenstabellen har vi regnet ut det totale antall lønnsmottagere (N).

Legg merke til alle klassene ikke behøver å ha samme bredde. Bredden til klassen [300, 400> er 100, mens klassebredden til [1000, 5000> er 4000.

4.1 Gjennomsnitt i klassedelt materiale

Fordi vi ikke kjenner alle verdiene i et klassedelt materiale, går det ikke an å finne en *nøyaktig* verdi for gjennomsnittet. Det beste vi kan gjøre er å anta at *alle* verdiene i en klasse er lik verdien *midt i klassen*. Da utvider vi tabellen og regner slik:

Inntekt	**Frekvens f**	**Midtpunkt x_m**	$x_m \cdot f$
[0, 100>	467	50	23350
[100, 200>	678	150	101700
[200, 300>	1490	250	372500
[300, 400>	2653	350	928550
[400, 500>	3785	450	1703250
[500, 750>	4106	625	2566250
[750, 1000>	987	875	863625
[1000, 5000>	45	3000	135000
	N = 14211		Sum = 6694225

Gjennomsnittet blir da 6694225 : 14211 = 471, som tilsvarer 471 000 kr.

4.2 Median i klassedelt materiale

Heller ikke medianen er det mulig å finne nøyaktig i et klassedelt materiale. For å finne en tilnærmet verdi lager vi først en tabell som viser kumulativ frekvens:

Inntekt	**Frekvens**	**Kumulativ frekvens**
[0, 100>	467	467
[100, 200>	678	1145
[200, 300>	1490	2635
[300, 400>	2653	5288
[400, 500>	3785	9073
[500, 750>	4106	13179
[750, 1000>	987	14166
[1000, 5000>	45	14211
	N = 14211	

Hvis alle inntektene var ordnet i stigende rekkefølge, ville medianen være inntekten på plass nr. 14212 : 2 = 7106 . Vi ser av kolonnen med kumulativ frekvens at denne inntekten ligger i klassen [400,500>. For å beregne en best mulig verdi for medianen må vi anta at alle de 3785 inntektene i denne klassen ligger *jevnt fordelt* innenfor klassen.

Oppgave 12

Vi målte høyden til elevene på VG2. Resultatet finner du i tabellen nedenfor.

Høyde cm	Frekvens
[150 – 170>	38
[170 – 180>	34
[180 – 200>	18

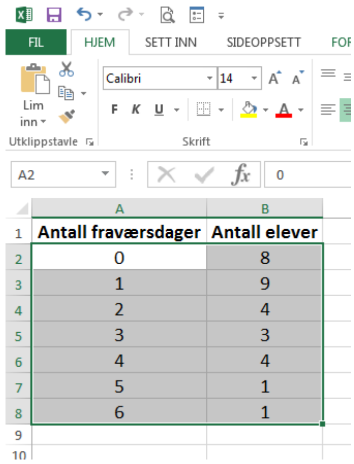
Finn medianhøyden og gjennomsnittshøyden til elevene

5. Diagrammer

5.1 Søylediagram

Tallene i en frekvenstabell kan vi også framstille i et *diagram*. Det er mest aktuelt å gjøre dette i del 2 - oppgaver, og da kan vi bruke regnearket Excel. Men du bør også kunne tegne et diagram på papir i del 1.

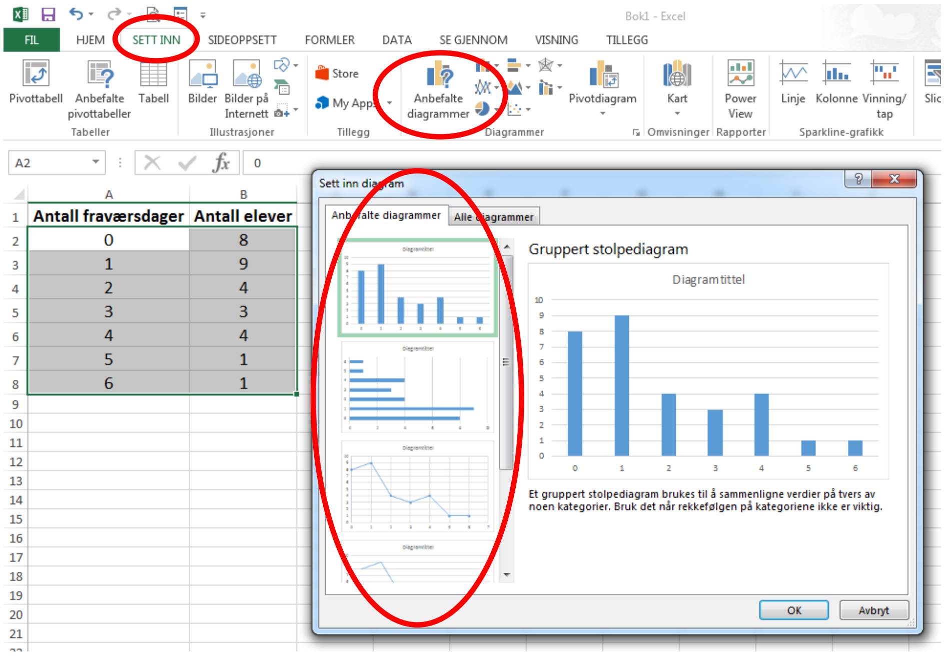
Det er noen små forskjeller på menyer og kommandoer mellom Excel på Windows og Excel på Mac. Teksten beskriver Windows-versjonen. Hvis du bruker Mac får du et ark av læreren som beskriver forskjellene på de to versjonene.



Vi bruker en tabell over elevfravær som eksempel:

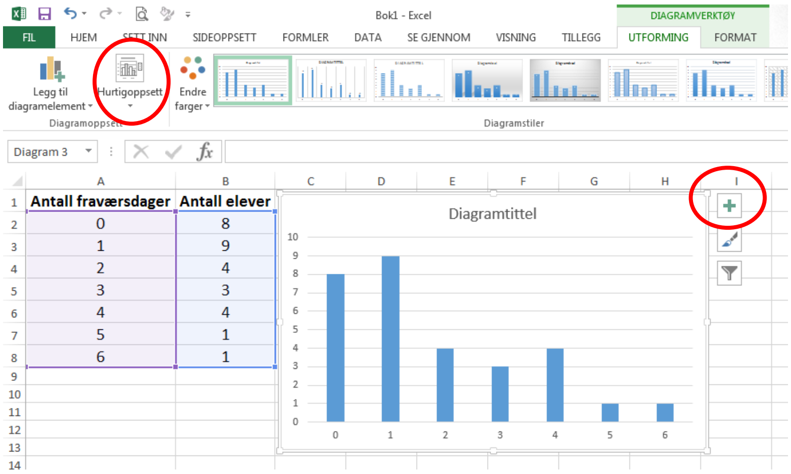
Legg inn dataene som du vil lage søylediagram av i Excel. Merk ut med pekeplate eller mus dataområdet. Ikke ta med eventuell overskrift.

Velg fanen Sett inn og Anbefalte diagrammer. I nytt vindu velg ønsket diagram og klikk ok:

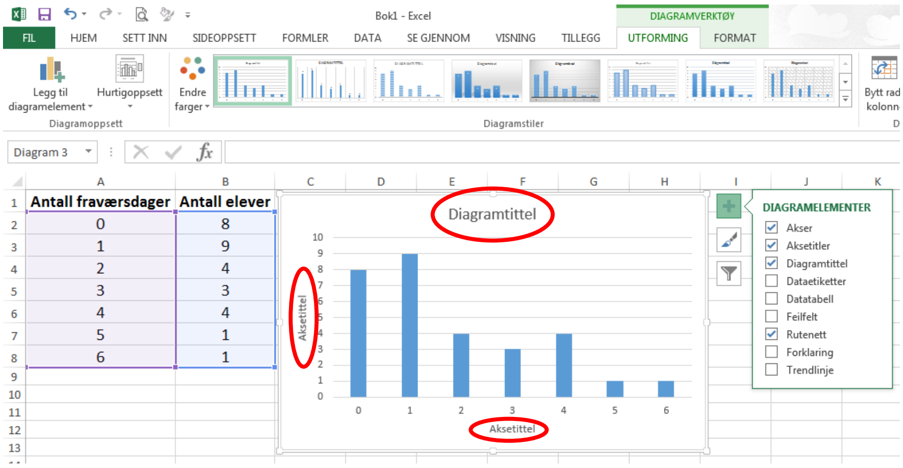


Formatering av diagrammet, diagramtittel og aksetitler:

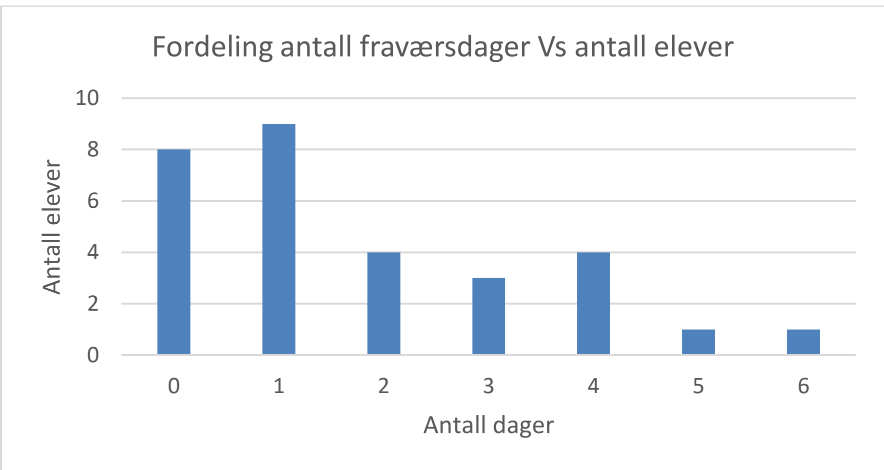
Velg enten fanen *hurtigoppsett* eller + tegnet til høyre på diagram vinduet.



Skriv inn ønsket tekst inn i feltene diagramtittel og aksetittel:



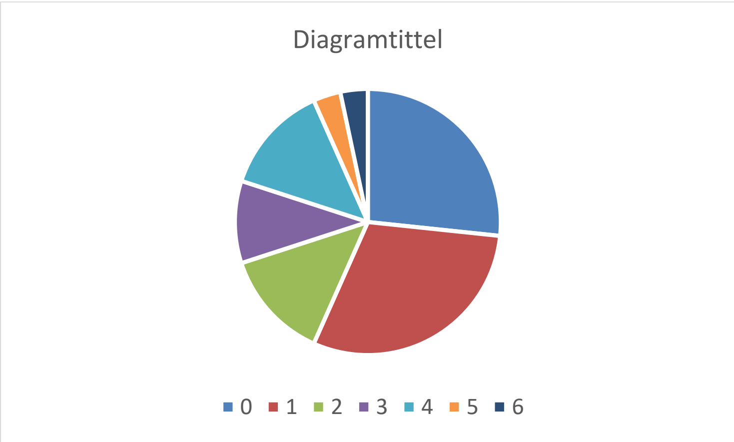
Diagrammet ferdig:



Av og til vil du lage diagrammer hvor det er mer enn en kolonne for hver dataverdi. Et eksempel kan være fraværet i flere klasser som skal sammenlignes. Da merker du bare ut alle kolonnene det skal lages søyler av. Resten blir som før.

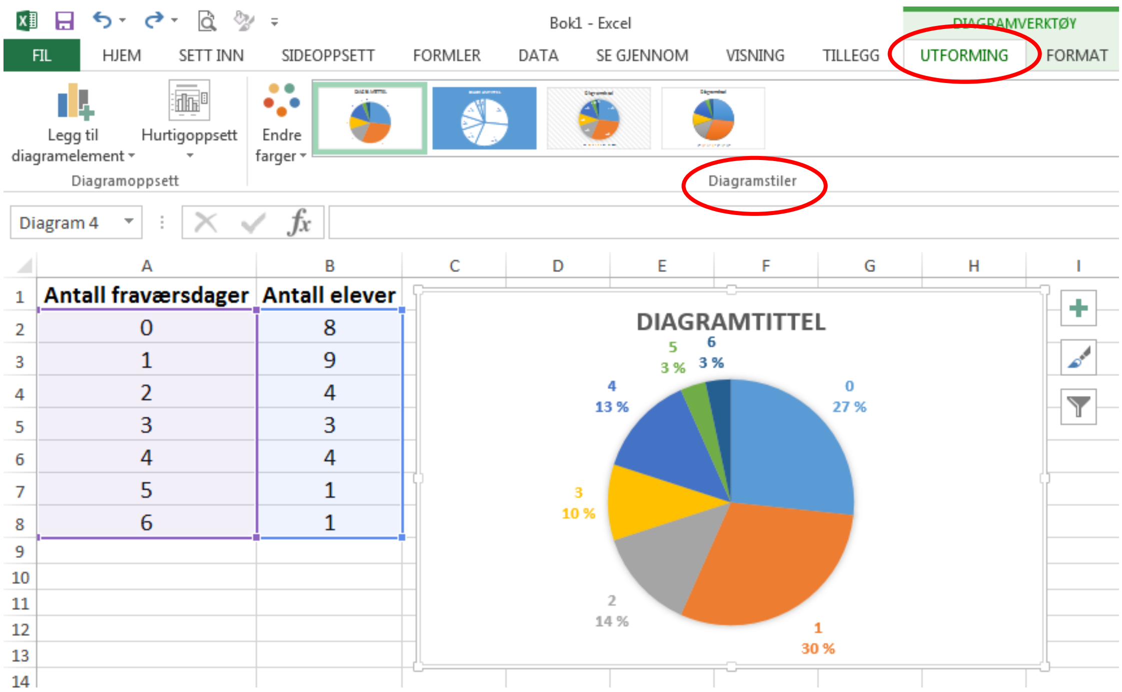
5.2 Sektordiagram

I mange tilfeller hvor man ikke har for mange dataverdier, er det vanlig å lage et *sektor-diagram* (populært kalt "kakediagram"). Vi går fram på samme måte som for et stolpediagram, men velger *Sektor* istedenfor Stolpe. Med tallene fra forrige eksempel får vi da dette diagrammet:



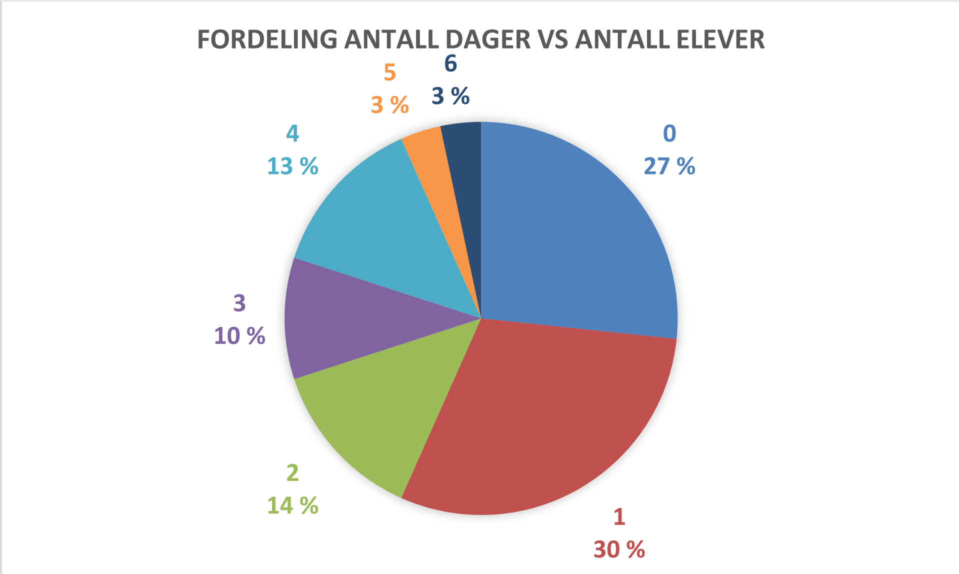
Det er en sektor for hver av de sju verdiene til antall fraværsdager. Disse verdiene er fargekodet, og koden står til høyre. I svart-hvitt er det vanskelig å se hva som er hva.

Vise den relative frekvensen i prosent for hver av sektorene. Velg fanen *utforming* og velg et av *diagramstilene*:



Antall fraværsdager	Antall elever
0	8
1	9
2	4
3	3
4	4
5	1
6	1

Til slutt skriver du inn en passende diagramtittel.



Det er mulig å lage mye "pynt" på diagrammene. Ikke bruk tid på det, i hvert fall ikke på prøver!

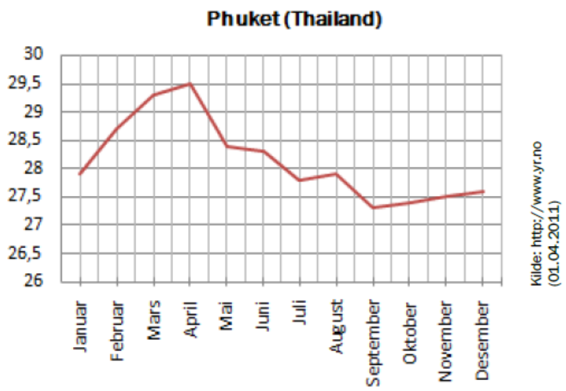
Et diagram skriver du ut på vanlig måte etter å ha klikket på det. Da får du bare med diagrammet, ikke hele regnearket.

Oppgave 13

Framstill frekvenstabellen på side 156 som et søylediagram og som et sektordiagram i Excel.

5.3 Linjediagram

Linjediagrammer brukes nesten bare for å vise hvordan noe utvikler seg over tid. Det betyr at på vannrett akse har vi som regel timer, dager, uker, måneder eller år.
I Excel lager du et linjediagram på samme måte som et stolpediagram

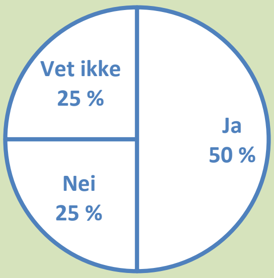


5.4 Tegne sektordiagram for hånd

I del 1 kan du hende at du blir bedt om å tegne et sektordiagram på papir. Da vil det bare være noen få sektorer, og det vil være tall som skal være mulig å håndtere uten å være veldig god i hoderegning (f*or å tegne et bra sektordiagram trenger du passer, gradskive og linjal).*

<u>Eksempel</u>

En del mennesker ble spurt om de var fornøyd med regjeringen. 50 % svarte "ja", 25 % svarte "nei" og 25 % svarte "vet ikke". (Dette er altså de relative frekvensene for dataverdiene.)
Vi vil lage et sektordiagram som illustrerer svarene. Vi regner da ut hvor mange grader hver av de tre sektorene må fylle. Hele sirkelen utgjør 360°.
Ja-sektoren må fylle $360° \cdot 0{,}5 = 180°$
Nei-sektoren må fylle $360° \cdot 0{,}25 = 90°$.
Vet ikke-sektoren må fylle $360° \cdot 0{,}25 = 90°$.
Vi lager en litt stor sirkel med passer og bruker gradskive til å lage de tre sektorene med riktig gradtall. Til slutt skriver vi passende tekst i hver sektor. Resultatet skal være omtrent slik:

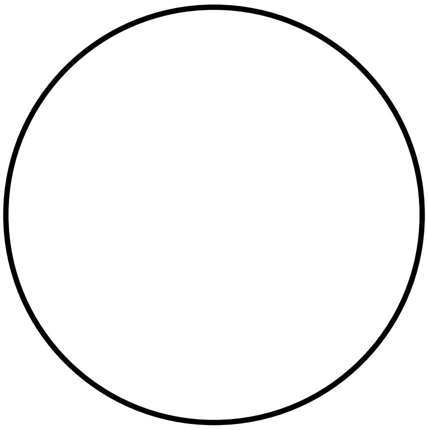


Tallene på del 1 er som regel gitt slik at sirkelen kan deles i relativt enkle brøker.

Oppgave 14

To klasser på til sammen 60 elever skal ha aktivitetsdag. 20 elever ønsker langrenn, 15 slalåm, 15 aking og 10 fottur. Lag et sektordiagram nedenfor (og uten kalkulator) som illustrere denne svarfordelingen.

Aktivitet	Grader
Langrenn	
Slalåm	
Aking	
Fottur	



5.5 Histogram

Når vi skal presentere resultatene fra et klassedelt materiale i et diagram, bruker vi histogram. Histogram ser ut som et søylediagram hvor søylen er tegnet inntil hverandre. Imidlertid er det størrelsen (arealet) på søylen som viser antall observasjoner (og ikke høyden, som ved et søylediagram). Vi må derfor regne ut både **klassebredden** og **søylehøyden**.

Klassebredden er forskjellen mellom nedre og øvre grense i klassen.

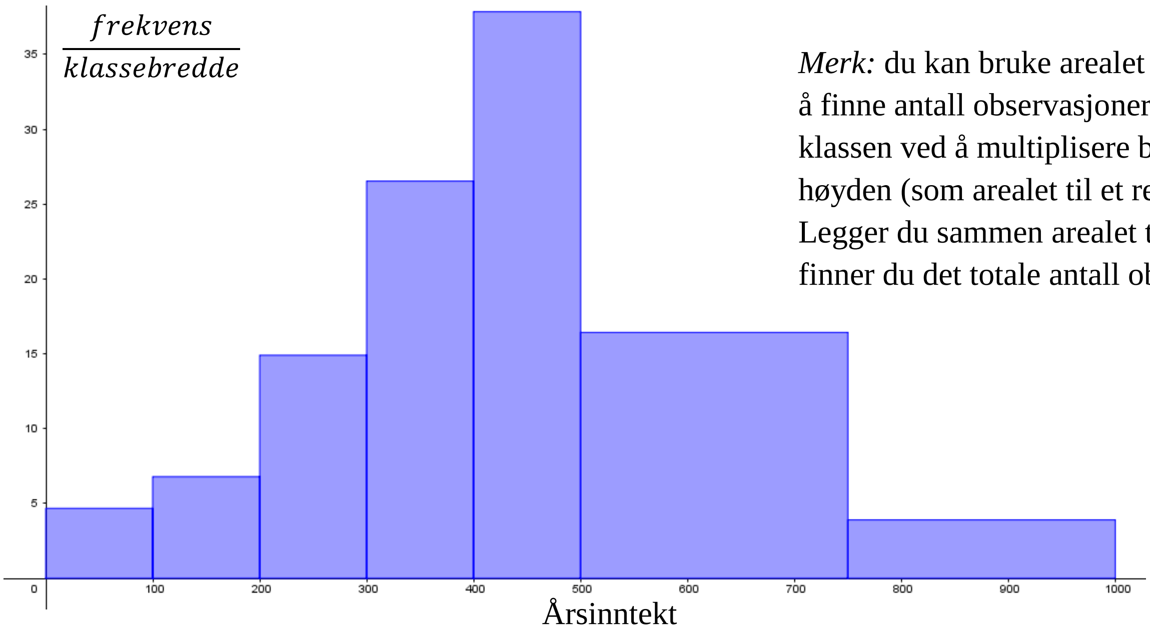
Søylehøyden er $\frac{frekvens}{klassebredde}$

Eksempel:

Fremstill resultatene fra undersøkelsen om årsinntekt i et histogram.

Inntekt	Frekvens	Klassebredde	Søylehøyde
[0, 100>	467	100	4,67
[100, 200>	678	100	6,78
[200, 300>	1490	100	14,9
[300, 400>	2653	100	26,53
[400, 500>	3785	100	37,85
[500, 750>	4106	250	16,43
[750, 1000>	987	250	3,9

Resultatet blir da slik:



Merk: du kan bruke arealet til en søyle for å finne antall observasjoner innenfor den klassen ved å multiplisere bredden og høyden (som arealet til et rektangel). Legger du sammen arealet til alle søylene finner du det totale antall observasjoner.

Oppgave 15

Tegn et histogram til datamaterialet i oppgave 12

Utfyllingsoppgave – Diagrammer

I denne oppgaven skal vi utforske bruk av ulike diagrammer og se hvordan vi kan tegne dem for hånd og i Excel

Del 1

På eksamen kommer det ofte oppgaver hvor du skal tegne et «hensiktsmessig» diagram.

Fyll inn tabellen under slik at du får en oversikt over de ulike diagramtypene og når det er hensiktsmessig å bruke dem

Diagramtype	Skisse av diagramtypen	Når bruker vi denne diagramtypen?
Stolpediagram (søylediagram)		
Sektordiagram (kakediagram)		
Linjediagram (kurvediagram)		

Del 2

Karakter	Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1

Tabellen viser karakterfordelingen på en matematikkeksamen på en skole.

a) Hvorfor vil sektordiagram kunne være hensiktsmessig å bruke her?

b) Kunne man brukt et stolpediagram istedenfor? Begrunn svaret

c) Hvorfor vil ikke et linjediagram være hensiktsmessig i denne situasjonen?

d) Tegn et sektordiagram i Excel

(Lim inn Excelbildet her)

e) Fyll ut tabellen og tegn sektordiagrammet for hånd

Karakter	Frekvens	Gradtall
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Del 3

Antall fraværsdager	Antall elever
0	8
1	9
2	4
3	3
4	4
7	1
9	1
10	1
11	1
12	1
15	1

Tabellen viser fraværsdager for en klasse på Vg2.

a) Hvorfor er det ikke hensiktsmessig å bruke et sektordiagram her?

b) Hvorfor er stolpediagram det mest hensiktsmessige?

c) Hva må du være oppmerksom på her når du skal tegne stolpediagrammet?

d) Tegn diagrammet for hånd.

e) Tegn diagrammet i Excel.

(Lim inn Excelbildet her)

Del 4

År	Antall kamper
1986	1
1987	2
1988	4
1989	10
1990	9
1991	6
1992	4
1993	9
1994	11
1995	11
1996	4

Tabellen viser antall spilte landskamper for en fotballspiller i perioden 1986-1996.

a) Hvorfor er et linjediagram mest hensiktsmessig å bruke her?

b) Tegn et linjediagram for hånd

c) Tegn et linjediagram i Excel.

(Lim inn Excelbildet her)

Del 5

I media kan vi av og til finne diagrammer som er ikke sier noe feil, men som fremstiller data på en måte som kan misforstås eller gi feil inntrykk. Kan du finne et slikt eksempel og lime inn her?

Hvorfor tror du diagrammet er laget på denne måten?

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 Oppgave 1 (del 1)

Dag	Temperatur
Mandag	4 °C
Tirsdag	10 °C
Onsdag	12 °C
Torsdag	5 °C
Fredag	6 °C
Lørdag	

Tabellen ovenfor viser hvordan temperaturen har variert i løpet av noen dager.

Hva må temperaturen være på lørdag dersom medianen av målingene skal bli 7 °C?

V15 - Oppgave 6 (del 1)

Alder	Frekvens
$[20, 30\rangle$	10
$[30, 40\rangle$	20
$[40, 50\rangle$	30
$[50, 70\rangle$	40

Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for lærerne ved en skole.

a) Bestem gjennomsnittsalderen for lærerne ved skolen.

b) Lag et histogram som viser aldersfordelingen for lærerne.

c) Utvid tabellen med en kolonne som viser relativ frekvens, og en kolonne som viser kumulativ frekvens.

V15 - Oppgave 3 (del 2)

Tallene nedenfor viser temperaturen målt i grader celsius klokka 16 den 30. juni de siste 20 årene i by A.

20 18 20 19 19 21 20 22 22 18 17 18 22 19 21 20 22 22 21 17

a) Bruk regneark til å bestemme gjennomsnitt og standardavvik for datamaterialet.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Tilsvarende data er samlet inn i by B. Gjennomsnittet her er 20,8 °C, og standardavviket er 3,4 °C.

Noen planlegger et større utearrangement 30. juni neste år og er avhengige av varmt vær. Arrangementet skal finne sted enten i by A eller i by B.

b) Hvilket råd vil du gi arrangørene ut fra de oppgitte dataene?

H15 - Oppgave 6 (del 1)

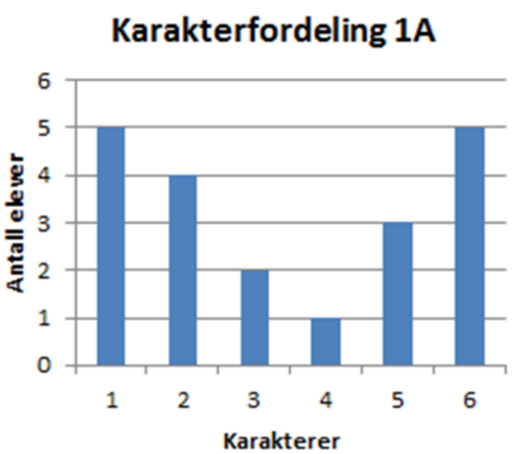
Alder	Bedrift A Frekvens	Bedrift B Frekvens
$[20,40\rangle$	52	35
$[40,60\rangle$	36	45
$[60,70\rangle$	12	20
Sum	100	100

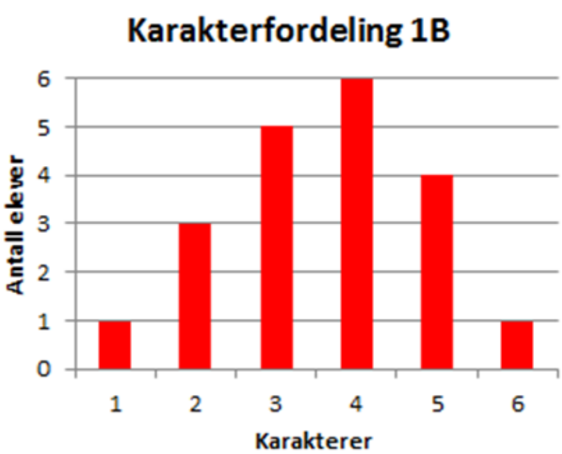
Hver av de to bedriftene A og B har 100 ansatte. Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for de ansatte i bedriftene.

a) I hvilken bedrift er medianalderen lavest? Grunngi svaret.

b) Bestem gjennomsnittsalderen for de ansatte i bedrift B.

H15 - Oppgave 9 (del 1)





(Oppgaven fortsetter på neste side)

Diagrammene på forrige side viser hvordan karakterene i klasse 1A og 1B fordelte seg ved forrige matematikkprøve.

a) Bestem gjennomsnittskarakteren i hver av de to klassene.
b) I hvilken klasse er standardavviket for karakterfordelingen størst? Grunngi svaret.
c) Bestem den kumulative frekvensen for karakteren 3 i hver av de to klassene.
d) Bestem den relative frekvensen for karakteren 6 i hver av de to klassene.

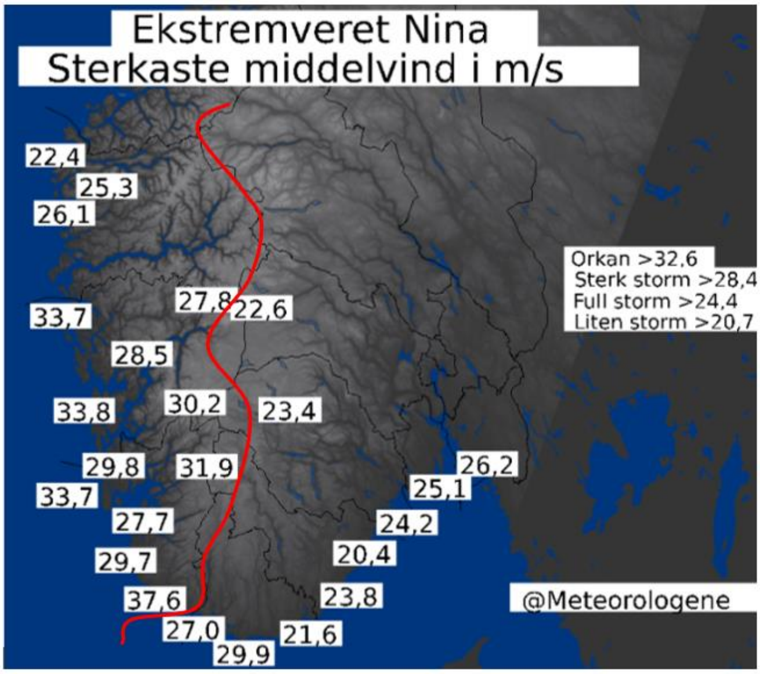
H15 - Oppgave 1 (del 2)

	Oslo	Østlandet for øvrig	Sør-Norge	Vestlandet	Midt-Norge	Nord-Norge
Elektriske ovner	59.7%	36.6%	30.4%	32.4%	34.2%	36.5%
Varmepumpe	8.3%	18.0%	25.5%	33.2%	33.8%	27.7%
Vannbåren varme	7.3%	9.3%	8.1%	6.4%	4.0%	5.0%
Sentralvarme	12.6%	4.8%	3.1%	2.8%	0.4%	7.5%
Vedfyring	5.3%	26.8%	28.3%	19.9%	19.6%	22.0%
Annet eller vet ikke	6.8%	4.5%	4.6%	5.3%	8.0%	1.3%

Tabellen ovenfor gir en oversikt over de viktigste varmekildene for husstander i ulike deler av Norge.

Bruk regneark til å lage **ett** diagram der du presenterer opplysningene i tabellen på en oversiktlig måte.

H15 - Oppgave 4 (del 2)



Figuren til venstre viser sterkeste middelvind ulike steder i Sør-Norge under ekstremværet «Nina» i januar 2015.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Vi lar den røde streken være skillet mellom Vestlandet og Sør-Østlandet.

a) Bruk regneark til å bestemme gjennomsnitt og standardavvik for sterkeste middelvind på Vestlandet og sterkeste middelvind på Sør-Østlandet.

b) Hva forteller svarene i oppgave a) om sterkeste middelvind på Vestlandet sammenliknet med sterkeste middelvind på Sør-Østlandet?

V16 - Oppgave 1 (del 1)

Dato	Temperatur
01.03	2°C
02.03	0°C
03.03	--4°C
04.03	--6°C
05.03	2°C
06.03	6°C

Guro målte temperaturen utenfor hytta de seks første dagene i mars. Se tabellen ovenfor.

Bestem variasjonsbredden, gjennomsnittet og medianen for temperaturmålingene.

V16 - Oppgave 5 (del 1)

Alder	Frekvens
$[0,10\rangle$	40
$[10,20\rangle$	20
$[20,30\rangle$	60
$[30,50\rangle$	20
$[50,60\rangle$	20
$[60,80\rangle$	40
Sum	200

Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for de 200 personene som bor i blokk Z på Tirilltoppen.

a) Lag et histogram som viser aldersfordelingen for personene som bor i blokk Z.

b) Bestem gjennomsnittsalderen for personene som bor i blokka.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Aurora bor i blokk Z. Hun er 32 år. Hun vet at de yngste i blokka er nyfødte, og at den eldste er 79 år. Hun påstår derfor at hennes alder er lavere enn medianverdien.

c) Vurder om Auroras påstand er riktig.

V16 - Oppgave 9 (del 1)

Antall land	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[1,6\rangle$	5		
$[6,11\rangle$			15
$[11,16\rangle$	2	0,1	
$[16,21\rangle$			19
$[21,26\rangle$			20

Ole har undersøkt hvor mange land hver elev i en 2P-gruppe har besøkt.
Han har satt opp en tabell. Ovenfor ser du noen av tallene i tabellen.

Tegn av tabellen, gjør beregninger, og fyll inn tallene som mangler.

V16 - Oppgave 1 (del 2)

Ved en skole er det 440 elever. Elevene blir spurt om hvor ofte de bruker sykkelhjelm.
Tabellen nedenfor viser resultatene.

Alltid	88
Nesten alltid	176
Noen ganger	110
Aldri	22
Sykler ikke	44

Bruk regneark til å lage et sektordiagram som illustrerer opplysningene i tabellen ovenfor.
Det skal gå klart fram av diagrammet hvor mange prosent hver sektor utgjør.

V16 - Oppgave 2 (del 2)

Hans og Grete går til Høgfjell hver dag. Nedenfor ser du hvor mange minutter Hans har brukt på hver tur de to siste ukene.

25 30 26 24 32 25 27 30 28 31 24 35 32 33

a) Bestem gjennomsnitt og standardavvik for datamaterialet.

Grete har i gjennomsnitt brukt like lang tid som Hans per tur de siste 14 dagene, men standardavviket hennes er 1,2.

b) Hva kan du ut fra dette si om tidene Grete har brukt på turene, sammenlignet med tidene Hans har brukt?

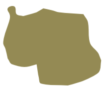
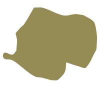
H16 - Oppgave 7 (del 1)

Sondre solgte frukt og grønnsaker på torget 20 lørdager i løpet av 2016. Hver av de 20 lørdagene skrev han opp hvor mange kunder han hadde. Han laget også en tabell. Tabellen ser du nedenfor, men her mangler noen av tallene Sondre satte inn.

Antall kunder	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[0, 50\rangle$		0,05	
$[50, 100\rangle$			6
$[100, 150\rangle$	8		
$[150, 200\rangle$			20

a) Tegn av tabellen ovenfor, og fyll inn tallene som mangler.
Gjør beregninger eller forklar hvordan du tenker.

Nedenfor ser du listen der Sondre har skrevet opp hvor mange kunder han hadde hver av de 20 lørdagene. Tre av tallene er skjult under flekker.

116	100		125	185	125	150		60	75
120	50	140	175		88	133	96	105	169

b) Foreslå tre *mulige* tall som kan stå under de tre flekkene slik at de 20 verdiene ovenfor gir resultatene i tabellen.

H16 - Oppgave 9 (del 1)

Tabellen nedenfor viser hvor mange poeng hver av de 30 elevene i en 2P-gruppe fikk på en matematikkprøve.

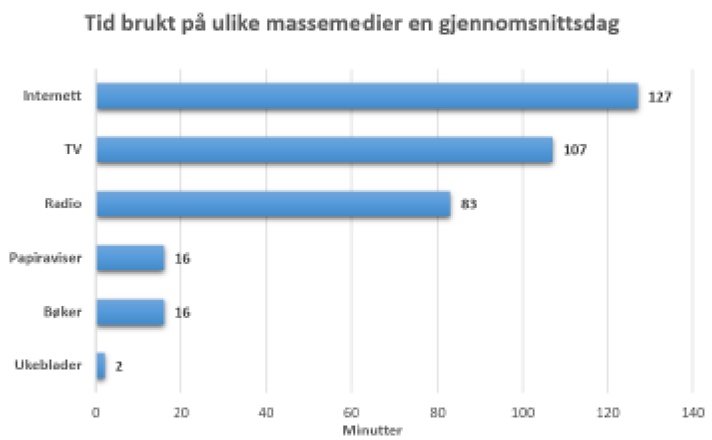
Poeng	Antall elever (frekvens)
$[0, 5\rangle$	4
$[5, 10\rangle$	12
$[10, 15\rangle$	10
$[15, 20\rangle$	0
$[20, 25\rangle$	4

a) Bestem gjennomsnittet for det klassedelte datamaterialet.

Per var en av elevene som hadde prøven. Han fikk 10 poeng og påstår at han var blant den beste halvdelen av elevene.

b) Kan Per bruke medianen for datamaterialet til å begrunne påstanden sin?

H16 - Oppgave 1 (del 2)



Diagrammet ovenfor viser hvor mange minutter personer i Norge brukte på ulike massemedier en gjennomsnittsdag i 2015.
Lag et sektordiagram som viser hvor stor andel av tiden som ble brukt på hvert av de ulike massemediene.

H16 - Oppgave 4 (del 2)

Klasse 2A har hatt matematikkprøve. De 15 elevene i klassen fikk disse poengsummene:

31	8	24	9	24	14	26	13
26	4	13	27	12	20	28	

a) Bestem gjennomsnittet og medianen for poengsummene.

> Påstand 1: Gjennomsnittet er 7,0 % lavere enn medianen.
> Påstand 2: Medianen er 7,5 % høyere enn gjennomsnittet.

b) Avgjør om hver av påstandene ovenfor er riktige.

c) Bestem standardavviket for poengsummene.

15 elever fra klasse 2B har hatt samme prøve. I denne klassen ble gjennomsnittet for poengsummene 18,6 og standardavviket 5,9.

d) Hva kan du si om poengsummene i 2B sammenliknet med poengsummene i 2A?

V17 - Oppgave 1 (del 1)

I en klasse er det 16 elever. Tabellen nedenfor viser hvor mange søsken de 16 elevene har.

Antall søsken	Frekvens
0	5
1	6
2	2
3	2
4	1

Bestem gjennomsnittet, medianen, typetallet og variasjonsbredden.

V17 - Oppgave 6 (del 1)

Et år deltok 1 000 elever i en konkurranse. Besvarelsene ble vurdert, og lærerne laget en tabell. Tabellen ser du nedenfor, men her mangler noen av tallene lærerne satte inn

Poengsum	Frekvens	Relativ frekvens	Klassemidtpunkt
$[0,\ 30\rangle$	100		
$[30,\ 50\rangle$			
$[50,\ 70\rangle$		0,6	
$[70,\ 100\rangle$	200		

a) Tegn av tabellen ovenfor, og fyll inn tallene som mangler.

b) Bestem gjennomsnittlig poengsum for elevene som deltok i konkurransen.

Et annet år deltok 3 525 elever i konkurransen. Tabellen nedenfor viser poengfordelingen

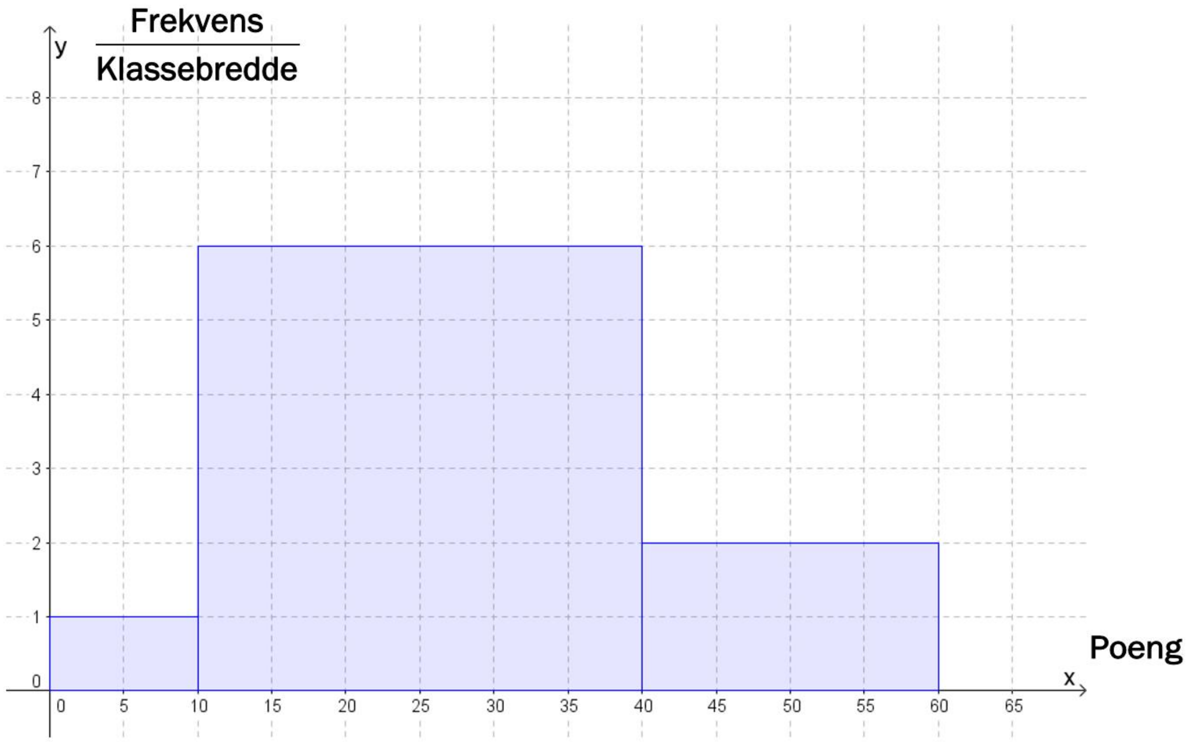
Poengsum	Frekvens
$[0,\ 30\rangle$	563
$[30,\ 50\rangle$	700
$[50,\ 70\rangle$	2000
$[70,\ 100\rangle$	262

c) Bestem medianen for poengsummene til elevene som deltok i konkurransen dette året.

V17 - Oppgave 5 (del 2)

Ved en skole kom alle elevene som hadde valgt 2P, opp til skriftlig eksamen. Histogrammet på neste side viser poengfordelingen

(Oppgaven fortsetter på neste side)



a) Vis at det til sammen var 230 elever i 2P-gruppene.

b) Bestem gjennomsnittlig poengsum for elevene.

V17 - Oppgave 8 (del 2)

Liverpool FC	
Antall mål per kamp	Frekvens
0	8
1	14
2	7
3	4
4	3
5	1
6	1

Newcastle United FC	
Antall mål per kamp	Frekvens
0	14
1	13
2	7
3	2
4	0
5	1
6	1

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Tabellene ovenfor viser hvor mange mål Liverpool FC og Newcastle United FC skåret per kamp i sesongen 2015–2016

a) Bestem gjennomsnittet og medianen for antall skårede mål per kamp for begge klubbene.

b) Bestem standardavviket for antall skårede mål per kamp for begge klubbene.

Hva forteller dette oss?

H17 - Oppgave 1 (del 1)

Tabellen nedenfor viser karakterfordelingen ved en skole ved norskeksamen våren 2017.

Karakter	Antall elever
1	3
2	12
3	25
4	12
5	6
6	2

d) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 1 eller 2?

e) Bestem mediankarakteren.

f) Bestem gjennomsnittskarakteren.

H17 - Oppgave 4 (del 1)

Et idrettslag har 240 medlemmer. Idrettslaget har fire forskjellige aktivitetsgrupper.

Medlemmene fordeler seg slik:

Aktivitetsgruppe	Antall medlemmer
Langrenn	60
Hopp	40
Freestyle	80
Alpint	60

Gjør beregninger og lag et sektordiagram som viser fordelingen av medlemmene på de ulike gruppene.

Det skal gå klart fram hvor mange grader hver av sektorene i diagrammet er på.

H17 - Oppgave 3 (del 2)

Maskin A og maskin B fyller vann på flasker. I hver flaske skal det være 500 mL vann.

Anders måler hvor mye vann det er i 20 av flaskene fra maskin A. Nedenfor ser du resultatene.

510 mL	490 mL	495 mL	480 mL	520 mL
500 mL	504 mL	508 mL	501 mL	516 mL
498 mL	485 mL	499 mL	502 mL	515 mL
505 mL	497 mL	500 mL	493 mL	516 mL

a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for antall mL vann i disse 20 flaskene.

Anders måler også hvor mye vann det er i 20 flasker fra maskin B. Han regner ut at gjennomsnittet er det samme som for maskin A men at standardavviket er 2,5 mL.

b) Hva kan vi si om de 20 flaskene fra maskin B sammenliknet med de 20 flaskene fra maskin A ut fra disse beregningene?

H17 - Oppgave 5 (del 2)

I en klasse på Vg2 idrettsfag er det 30 elever. Tabellen nedenfor viser hvor mye elevene trener utenom skoletiden i løpet av en uke.

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0, 60\rangle$	3			
$[60, 180\rangle$	6			
$[180, 300\rangle$	12			
$[300, 420\rangle$	6			
$[420, 540\rangle$	3			

c) Tegn av tabellen i besvarelsen din, og fyll inn verdier for kumulativ frekvens, relativ frekvens og kumulativ relativ frekvens.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

d) Lag et histogram som viser hvor mye elevene trener utenom skoletiden.

e) Bestem gjennomsnittet for det klassedelte datamaterialet.

f) Bestem medianen for det klassedelte datamaterialet.

V18 - Oppgave 1 (del 1)

Markus og vennene hans spiller kort. Nedenfor ser du hvor mange poeng Markus fikk i hver av de siste åtte rundene.

Runde	Poengsum Markus
1	20
2	−15
3	5
4	15
5	−8
6	−3
7	−24
8	30

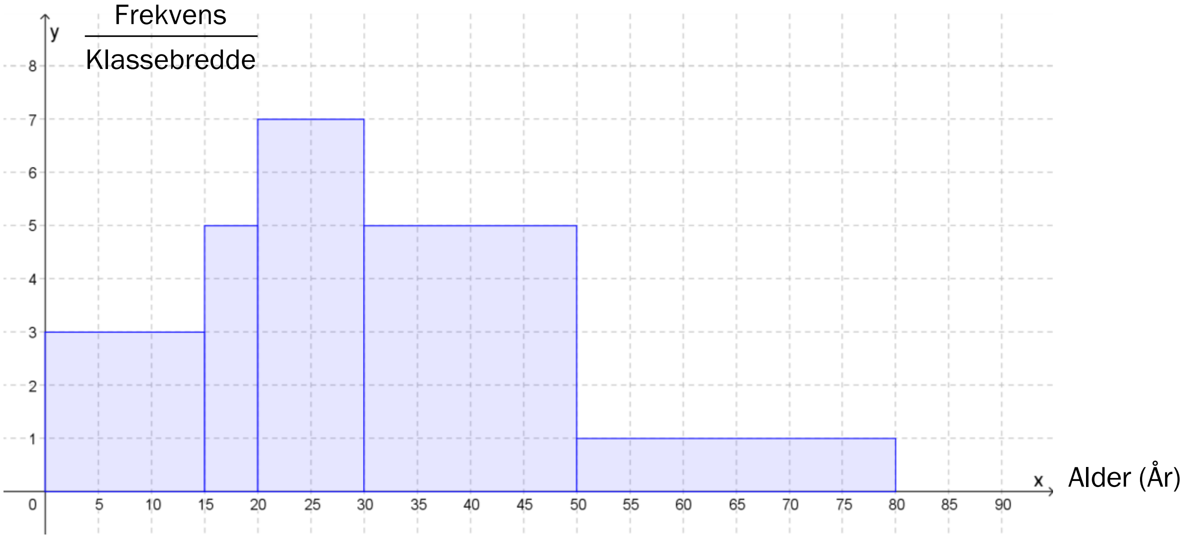
Bestem variasjonsbredden og gjennomsnittet for poengsummene.

V18 - Oppgave 5 (del 1)

Per og Kari vil lage et diagram som viser aldersfordelingen til innbyggerne i et boligområde. De diskuterer om de skal bruke et histogram eller et søylediagram.

Ut fra opplysningene de har fått, lager Per histogrammet nedenfor. Innbyggerne er delt inn i fem aldersgrupper.

(Oppgaven fortsetter på neste side)



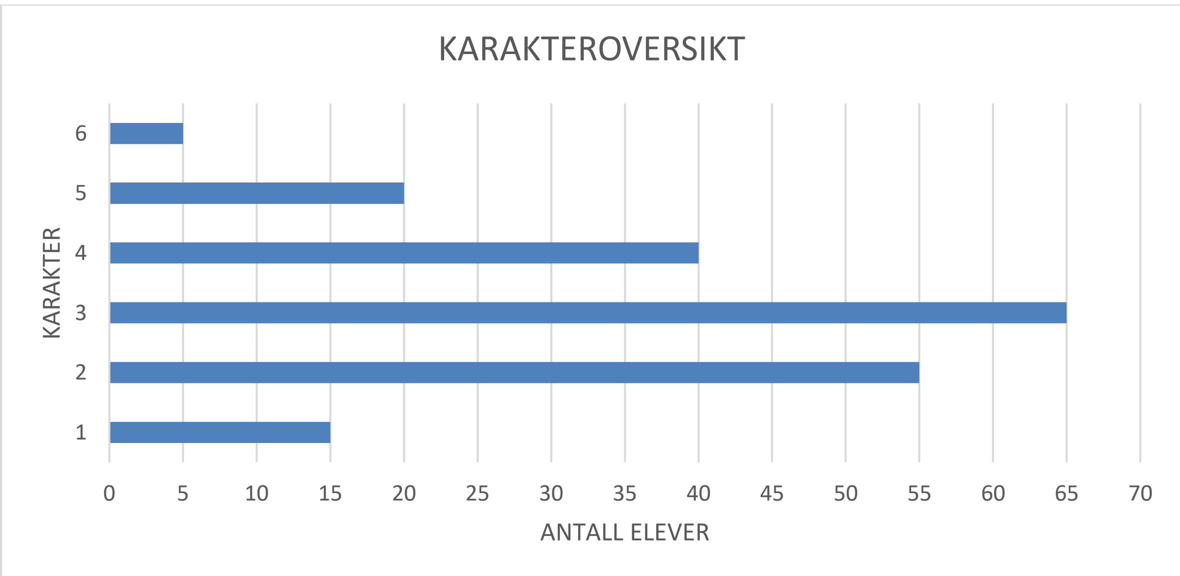
a) Hvor mange personer bor i boligområdet?

Kari lurer på om et søylediagram vil være bedre egnet.

b) Lag et søylediagram som viser hvor mange personer det er i hver aldersgruppe.

Mener du et søylediagram eller et histogram er best egnet til å illustrere dette datamaterialet?

V18 - Oppgave 7 (del 2)



Diagrammet ovenfor viser karakterfordelingen ved en matematikkeksamen et år.
(Oppgaven fortsetter på neste side)

a) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 4 eller bedre?

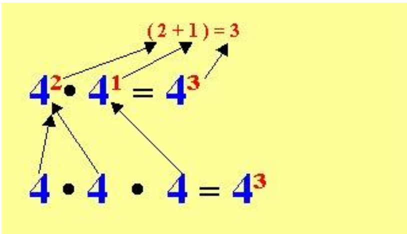
b) Lag et regneark som vist nedenfor. Legg inn verdier i de hvite cellene og formler i de blå cellene. Bruk regnearket til å bestemme gjennomsnittskarakteren og standardavviket til karakterfordelingen.

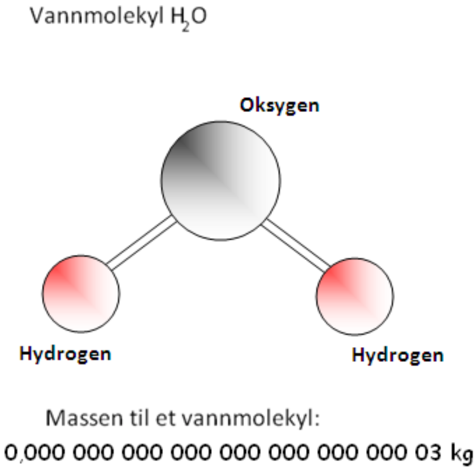
	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	Sum			
10				
11	Gjennomsnitt $(\bar{x})$			
12				
13	Standardavvik			

Året etter var det 180 elever som hadde eksamen. Gjennomsnittskarakteren dette året var 3,25.

c) Hva var gjennomsnittskarakteren dersom vi ser disse to årene under ett?

Kapittel 6. Potensregning og tall på standardform



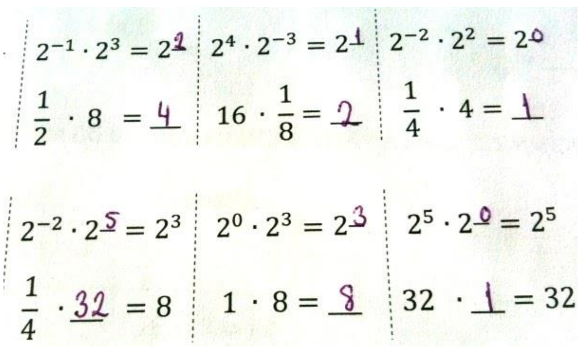


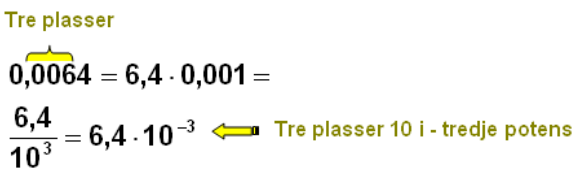
I potensregning skriver vi tall som potenser og forenkler uttrykk som inneholder potenser.

Standardform er en metode som er nyttig for raskt å kunne skrive tall som er mye større enn 1 eller mye mindre enn 1. Du må kunne potensregning for å forstå regning med standardform.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Betydningen av potenser som har negativ eksponent eller eksponent lik null.
- Hvordan vi raskt kan multiplisere og dividere potenser med samme grunntall.
- Hvordan vi beregner en potens med en annen potens som grunntall.
- Hva er standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra vanlig form til standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra standardform til vanlig form.
- Eksempler på praktisk regning med tall på standardform.





Mål for kapittel 6. Potenser og tall på standardform

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- regne med potenser og tall på standardform med positive og negative eksponenter, og bruke dette i praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hva grunntall og eksponent er
- ☐ hva eksponenten forteller meg om grunntallet
- ☐ hvordan jeg multipliserer og dividerer potenser med samme grunntall
- ☐ hvordan jeg kan bruke regnereglene for potenser
- ☐ hvordan jeg skriver hele tall og desimaltall på standardform
- ☐ hvordan jeg skriver tall på standardform som heltall og desimaltall
- ☐ hvordan jeg multipliserer og dividerer tall på standardform i ferdig oppsatte regnestykker

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hva som er hensikten med å bruke potenser i utregninger
- ☐ hva som er forskjellen på en positiv og en negativ eksponent
- ☐ hvorfor potenser må ha samme grunntall når vi bruker potensregnereglene
- ☐ hvorfor det er hensiktsmessig å skrive tall på standardform
- ☐ hva som kjennetegner et tall på standardform
- ☐ sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon med 10-ere og tall på standardform

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ bruke potenser i utregninger knyttet til praktiske situasjoner
- ☐ bruke tall på standardform i utregninger knyttet til praktiske situasjoner
- ☐ sette opp et regnestykke med tall på standardform ut i fra en tekst

1. Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

Eksempel 1

$3 \cdot 3 = 3^2$

$x \cdot x = x^2$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*.
I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.
Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på 3^2 og 32!

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2, som betyr $3 \cdot 3$ og er lik 9, med $3 \cdot 2$, som er lik 6!

Oppgave 1

Regn ut potensene uten kalkulator:

4^2, 2^3, 5^2, $(-3)^2$, 5^1

Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$2{,}5^2$, 12^3

2. Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks. $3^2 \cdot 3^4$?
Det er ikke meningen at du skal regne ut hvilket tall dette blir, men skrive svaret som en ny potens.

Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli 2 + 4 = 6 tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.

Eksempel 2

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$
$$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$$
$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$
$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

Oppgave 3

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $6^2 \cdot 6^3$ b) $2^6 \cdot 2^4$ c) $10 \cdot 10^3$ d) $a^4 \cdot a^2$

3. Dividere potenser med samme grunntall

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4 \cdot 4}}{\cancel{4 \cdot 4}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen 5 – 2 = 3 firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$
$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$
$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Oppgave 4

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $\frac{8^5}{8^3}$ b) $\frac{6^5}{6}$ c) $\frac{5^4}{5^3}$ d) $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

Eksempel 5

$$\frac{4^2 \cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

Oppgave 5

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^4}$ b) $\frac{3^6}{3^4 \cdot 3}$ c) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^2}$

4. Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$\left(10^2\right)^3$ er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva $\left(10^2\right)^3$ egentlig betyr, ser vi at

$$\left(10^2\right)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3\cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ og $\left(10^2\right)^3 = 10^6$!

Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a) $\left(6^3\right)^4$ b) $\left(8^5\right)^2$ c) $\left(x^3\right)^2$ d) $\left(a^2\right)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

<u>Eksempel 6</u>

$$\left(3^4\right)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{\left(2^3\right)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a) $\left(4^2\right)^3 \cdot 4$ b) $\dfrac{\left(5^2\right)^3}{5^2}$ c) $\dfrac{\left(a^2\right)^3 \cdot a^2}{a^5}$

5. Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken $\frac{5^4}{5^4}$ er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar 5^0 *bety* 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

$a^0 = 1$ for alle tall a.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 2^0 er lik 0!! $2^0 = 1$! Derimot er $2 \cdot 0$ lik 0.

Oppgave 8

Hvor mye er a) 10^0 b) 6^0 c) $(-1)^0$?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken $\frac{5^4}{5^6}$? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$$ (du er vel klar over at 4 - 6 = -2 og ikke 2?)

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken $\frac{5^4}{5^6}$ kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at 5^{-2} skal *bety* $\frac{1}{5^2}$. På samme måte har vi også:

Eksempel 7

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$
$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-n} betyr $\frac{1}{a^n}$ for alle verdier av a (unntatt 0) og n.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at $10^{-2} = -20$ eller at $2^{-3} = -6$ eller -8!!

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.

Eksempel 8

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$$
$$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$$
$$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$$
$$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.

a) $\frac{1}{10^{-2}}$ b) $\frac{2^6}{5^{-3}}$ c) $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$ d) $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$
$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$
$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$
$$\left(10^{-2}\right)^3 = 10^{-2\cdot 3} = 10^{-6}$$
$$\left(x^3\right)^{-4} = x^{3\cdot(-4)} = x^{-12}$$

Oppgave 10

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{3^6}{3^0}$ b) $5^{-1} \cdot 5^4$ c) $\frac{10^{-4}}{10^3}$ d) $\frac{10^4}{10^{-3}}$ e) $(2^{-4})^3$

6. Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$
$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$ b) $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

<u>Eksempel 11</u>
Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket $4 \cdot 2^3$ kan skrives som én potens.
Men fordi $4 = 2^2$ går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $9 = 3^2$ og $27 = 3^3$.

Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.
a) $2^4 \cdot 4$ b) $8 \cdot 2^{-2}$ c) $\frac{4}{2^{-3}}$ d) $9 \cdot 3^2$ e) $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivinger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

7. Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

<u>Eksempel 12</u>
I potensen $(2x)^3$ er grunntallet et produkt av faktorene 2 og x. Dette kan vi skrive uten parenteser slik:

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a) $(3a)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\left(a^2b^{-1}\right)^3$ d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Utforskende oppgave – Veldig store og veldig små tall

I denne oppgaven skal du utforske ulike måter å skrive veldig store og veldig små tall på.

1. Finn et stort tall f.eks. massen av jorden i kg, antall atomer i en vanndråpe, avstanden til Jupiter i km…

a) Hvordan vil du beskrive dette tallet på en forståelig måte for klassen?

b) Er det flere måter å beskrive tallet på? Sjekk med din læringspartner.

c) Diskuter i klassen hvilken beskrivelse som er enklest hvis man skal be en hel klasse skrive tallet.

2. Finn et veldig lite tall f.eks. vekten av et elektron i kg, størrelsen til et virus i meter…

a) Hvordan vil du beskrive dette tallet på en forståelig måte for klassen?

b) Er det flere måter å beskrive tallet på? Sjekk med din læringspartner.

c) Diskuter i klassen hvilken beskrivelse som er enklest hvis man skal be en hel klasse skrive tallet.

8. En smart måte å skrive store og små tall på

I blant annet naturvitenskap og økonomi dukker det ofte opp svært store eller svært små tall. For eksempel er avstanden fra jorda til sola 150 000 000 000 meter og massen til et elektron er 0,00000000000000000000000000000091 kg. Ved å bruke potenser av 10 kan vi skrive slike tall mye raskere og mer oversiktlig.

8.1 Tall som er større enn 1

Eksempel 1

$100\ 000 = 1 \cdot 10^5$

$300\ 000 = 3 \cdot 10^5$

$340\,000 = 3,4 \cdot 10^5$

$368\ 200 = 3,682 \cdot 10^5$

Hvis du ikke med en gang ser at det blir slik, kan du tenke deg et komma bak første siffer i tallet du skal skrive om, og så telle antall siffer bak dette kommaet for å finne eksponenten i tierpotensen. Prøv!

Vi har her skrevet tallene på *standardform*. I praksis skriver vi sjelden tall som er mindre enn 1 million på standardform.

Et tall på standardform er et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en potens av 10.

Oppgave 14

Skriv tallene på standardform.

a) 100 b) 10 000 c) 20 000 d) 21 000 e) 21 640 f) 820 000 000 g) fire millioner h) 75 milliarder i) 12 j) 1 k) 6,4

Tallet $24 \cdot 10^4$ er ikke skrevet på standardform fordi 24 er større enn 10 (se definisjonen av standardform ovenfor). Skal det være på standardform, må det stå *2,4* foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$24 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10^5$$

Her er et annet eksempel på omskriving til standardform hvor vi bruker at $0,45 = 4,5 \cdot \frac{1}{10} = 4,5 \cdot 10^{-1}$:

$$0,45 \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^5$$

Oppgave 15

Skriv om tallene slik at de er på standardform.

a) $60 \cdot 10^5$ b) $46 \cdot 10^3$ c) $450 \cdot 10^6$ d) $0,6 \cdot 10^5$ e) $0,055 \cdot 10^7$

Du må også kunne skrive tall som er på standardform om til vanlig form.

Eksempel 2

$6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 1000 = 6000$

$6,7 \cdot 10^3 = 6,7 \cdot 1000 = 6700$

$8,01 \cdot 10^5 = 8,01 \cdot 100000 = 801000$

Oppgave 16

Skriv disse tallene på vanlig form.

a) $2 \cdot 10^4$ b) $2,5 \cdot 10^4$ c) $6,8 \cdot 10^6$

8.2 Tall som er mindre enn 1

Du husker vel fra potensregningen at 10^{-2} betyr $\frac{1}{10^2}$?

Men $\frac{1}{10^2}$ kan vi også skrive som desimaltall:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

På samme måte har vi

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad (\textit{en} \text{ null i desimaltallet})$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \quad (\textit{tre} \text{ nuller i desimaltallet})$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001 \quad (\textit{seks} \text{ nuller i desimaltallet})$$

Derfor kan vi også skrive tall som er *mindre* enn 1 på standardform ved å bruke tierpotenser med *negativ* eksponent:

Eksempel 3

$0,004 = 4 \cdot 10^{-3}$

$0,0046 = 4,6 \cdot 10^{-3}$

$0,00000582 = 5,82 \cdot 10^{-6}$

$0,5 = 5 \cdot 10^{-1}$

Hvis du teller nullene i massen til vannmolekylet i starten av kapittelet vil du finne 1 null foran komma og 25 bak. Da kan vi skrive dette *veldig* lite tallet mye mer oversiktlig:

$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,03 = 3 \cdot 10^{-26}$

Oppgave 17

Skriv disse tallene på standardform.

a) $0{,}06$ b) $0{,}067$ c) $0{,}00005$ d) $0{,}0000563$ e) $0{,}25$

Tallet $35 \cdot 10^{-4}$ er ikke skrevet på standardform fordi 35 er større enn 10. Skal det være på standardform, må det stå *3,5* foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$35 \cdot 10^{-4} = 3{,}5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 3{,}5 \cdot 10^{1+(-4)} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Her er et annet eksempel:

$$0{,}4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1+(-5)} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Oppgave 18

Skriv disse tallene på standardform.

a) $64 \cdot 10^{-3}$ b) $250 \cdot 10^{-8}$ c) $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ d) $0{,}07 \cdot 10^{-10}$

9. Multiplikasjon og divisjon av tall på standardform

9.1 Multiplikasjon

Eksempel 4

Hvis vi skal regne ut $4\cdot10^4\cdot3\cdot10^{-7}$ kan vi multiplisere 4 med 3 og 10^4 med 10^{-7}, slik:

$$4\cdot10^4\cdot3\cdot10^{-7}=4\cdot3\cdot10^4\cdot10^{-7}=12\cdot10^{-3}=1,2\cdot10\cdot10^{-3}=1,2\cdot10^{-2}$$

Legg merke til at vi til slutt skrev svaret på standardform.

Oppgave 19

Regn ut og skriv svaret på standardform.

a) $2{,}5\cdot10^6\cdot2\cdot10^{-3}$ b) $2{,}5\cdot10^5\cdot4\cdot10^{-2}$ c) $2{,}5\cdot10^{-3}\cdot6\cdot10^{-4}$ d) $0{,}00008\cdot5000000$

9.2 Divisjon

Eksempel 5

Hvis vi skal regne ut $\frac{8\cdot10^4}{2\cdot10^{-3}}$ må vi dividere 8 med 2 og 10^4 med 10^{-3}, slik:

$$\frac{8\cdot10^4}{2\cdot10^{-3}}=4\cdot10^{4-(-3)}=4\cdot10^{4+3}=4\cdot10^7$$

To eksempler til:

$$\frac{2{,}4\cdot10^8}{3{,}0\cdot10^6}=0{,}8\cdot10^{8-6}=0{,}8\cdot10^8=800$$

(2,4 : 3,0 er 0,8 fordi 24 : 3 = 8.)

$$\frac{1,8\cdot10^{-3}}{2,0\cdot10^{-4}}=0,9\cdot10^{-3-(-4)}=9\cdot10^{-1}\cdot10^{-3+4}=9\cdot10^{-1}\cdot10^{1}=9\cdot10^{-1+1}=9\cdot10^{0}=9$$

10. Praktisk regning med tall på standardform

Her er noen eksempler på praktisk regning hvor det er lurt å regne med tallene på standardform.

Eksempel 6

Det årlige forbruket av vann på jorda er ca. $4{,}2 \cdot 10^{15}$ liter. Det er ca. $7 \cdot 10^{9}$ mennesker på jorda. Hvor mange liter vann blir dette per menneske? Skriv svaret på standardform.

$$\frac{4{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{L}}{7 \cdot 10^{9}\ \text{mennesker}} = 0{,}6 \cdot 10^{15-9}\ \text{L/menneske} = 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{6}\,\text{L/menneske} = 6 \cdot 10^{5}\,\text{L/menneske}$$

Eksempel 7

Et atom har en diameter på ca. 10^{-7} mm. Hvor mange atomer kan ligge etter hverandre på 1 mm?

Svar: $\frac{1\ \text{mm}}{10^{-7}\ \text{mm}} = 10^{7}$ (ti millioner)

Eksempel 8

Massen til et vannmolekyl er ca. $3 \cdot 10^{-26}$ kg.1 liter vann har en masse på omtrent 1 kg. Hvor mange vannmolekyler er det i 1 liter vann?

$$\frac{1\ \text{kg}}{3 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}} \approx 0{,}3 \cdot 10^{26} = 3 \cdot 10^{25}$$

Oppgave 20

De største harddiskene til en vanlig PC var i 2014 på 4 TB. 1TB = 1 Terabyte = 10^{12} byte. En lang bok uten bilder krever ca. 2 MB når den lagres som tekst. 1MB = 1 Megabyte = 10^{6} byte. Hvor mange bøker er det plass til på den store harddisken?

Oppgave 21

a) DNA-molekylene i en menneskecelle har en samlet lengde på ca. 0,05 m hvis de tenkes strukket helt ut. I et menneske er det ca. 10 000 milliarder celler. Hva blir den samlede lengden av alle DNA-molekylene i et menneske?

b) Sammenlign svaret med avstanden fra jorda til sola, som er 150 millioner km.

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 3 (del 1)

Forskere antar at universet er ca. 14 milliarder år gammelt.

a) Skriv 14 milliarder på standardform.

I ett år er det ca. 32 millioner sekunder.

b) Omtrent hvor mange sekunder gammelt er universet?

Skriv svaret på standardform.

V15 - Oppgave 4 (del 1)

Regn ut

a) $\dfrac{3^2 - 2^3}{2^0 \cdot 4}$

b) $\dfrac{(6a)^2 \cdot b^2}{9a \cdot b^{-2}}$

H15 - Oppgave 2 (del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$3{,}4 \cdot 10^9 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3}$$

H15 - Oppgave 3 (del 1)

Regn ut

$$\frac{4^3 \cdot 2^{-6}}{4^0 \cdot 2^{-2}}$$

H15 - Oppgave 5 (del 1)

Omkretsen av jordkloden ved ekvator er ca. 40 000 km. Tenk deg at voksne og barn står hånd i hånd og danner en ring rundt jordkloden. Hver person favner i gjennomsnitt 1,6 m.

Omtrent hvor mange personer må stå hånd i hånd for å nå rundt jordkloden ved ekvator?

Skriv svaret på standardform.

V16 - Oppgave 2 (del 1)

Det er 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 L drikkevann hver dag. Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret på standardform.

H16 - Oppgave 1 (del 1)

Skriv tallene nedenfor på standardform

26,3 millioner $\qquad 16{,}5 \cdot 10^{-8}$

H16 - Oppgave 2 (del 1)

Regn ut og skriv svaret som desimaltall

$$\frac{3{,}5 \cdot 10^{8}}{7{,}0 \cdot 10^{5} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{6}}$$

V17 - Oppgave 3 (del 1)

Regn ut

$$5^{0} \cdot 2^{3} \cdot 8^{-2} \cdot \left(4^{-1}\right)^{-3}$$

V17 - Oppgave 4 (del 1)

I 10 L vann er det omtrent $3{,}0 \cdot 10^{25}$ vannmolekyler.

Hvor mange vannmolekyler er det i 1,5 dL vann?

H17 - Oppgave 2 (del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$3{,}54 \cdot 10^{6} + 60\,000$$

V18 - Oppgave 2 (del 1)

I en kjøkkensvamp er det 40 milliarder bakterier per kubikkcentimeter.
Svampen har et volum på 0,15 dm^3.

Hvor mange bakterier er det i hele svampen? Skriv svaret på standardform.

Fasit øvingsoppgaver potenser og tall på standardform

Oppgave 1
16, 8, 25, 9, 5
Oppgave 2
6,25 1728
Oppgave 3
a) 6^5 b) 2^{10} c) 10^4 d) a^6
Oppgave 4
a) 8^2 b) 6^4 c) 5 d) z^3
Oppgave 5
a) 2^7 b) 3 c) a^5
Oppgave 6
a) 6^{12} b) 8^{10} c) x^6 d) a^8
Oppgave 7
a) 4^7 b) 5^4 c) a^3
Oppgave 8
a) 1 b) 1 c) 1
Oppgave 9
a) 10^2 b) $2^6 \cdot 5^3$ c) $\frac{5 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{6}$ d) 4^{15}
Oppgave 10
a) 3^6 b) 5^3 c) 10^{-7} d) 10^7 e) 2^{-12}

Oppgave 11
a) $4 \cdot 5^{-2}$ b) $6^4 \cdot 10^{-5}$
Oppgave 12
a) 2^6 b) 2 c) 2^5 d) 3^4 e) 2^7
Oppgave 13
a) $3^4 a^4$ b) $\frac{3^2}{2^2}$ c) $a^6 b^{-3}$ d) 16
Oppgave 14
a) $1 \cdot 10^2$ b) $1 \cdot 10^4$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $2{,}1 \cdot 10^4$
e) $2{,}164 \cdot 10^4$ f) $8{,}2 \cdot 10^8$ g) $4 \cdot 10^6$ h) $7{,}5 \cdot 10^{10}$
i) $1{,}2 \cdot 10^1$ j) $1 \cdot 10^0$ k) $6{,}4 \cdot 10^0$
Oppgave 15
a) $6 \cdot 10^6$ b) $4{,}6 \cdot 10^4$ c) $4{,}5 \cdot 10^8$ d) $6 \cdot 10^4$
e) $5{,}5 \cdot 10^5$
Oppgave 16
a) 20 000 b) 25 000c) 6 800 000
Oppgave 17
a) $6 \cdot 10^{-2}$ b) $6{,}7 \cdot 10^{-2}$ c) $5 \cdot 10^{-5}$
d) $5{,}63 \cdot 10^{-5}$ e) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$
Oppgave 18
a) $6{,}4 \cdot 10^{-2}$ b) $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ c) $6 \cdot 10^{-5}$ d) $7 \cdot 10^{-12}$
Oppgave 19
a) $5 \cdot 10^3$ b) $1 \cdot 10^4$ c) $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ d) $4 \cdot 10^2$
Oppgave 20
$2 \cdot 10^6$ bøker
Oppgave 21
a) $5 \cdot 10^{11}$m b) 3,3 ganger avstanden til sola!

Stikkordregister