Utdanningsdirektoratet

Eksempel på løsning

2010

Sentralt gitt skriftlig eksamen
MAT1008 Matematikk 2T
Eksamen 30.11.2009

Bokmål

MAT1008 Matematikk 2T HØSTEN 2009
Eksempel på løsning med vekt på bruk av digitale verktøy

Hva er en god besvarelse på en sentralt gitt skriftlig eksamen i matematikk? Hvordan bør elevene føre? Hvor mye kreves det når det gjelder framgangsmåte og forklaringer? Hva med digitale verktøy? Hva skal man kreve av framgangsmåte når elevene bruker grafisk lommeregner, regneark, dynamisk geometriprogram og/eller CAS[1]-verktøy?

Med utgangspunkt i sentralt gitt skriftlig eksamen i MAT1008, Matematikk 2T høsten 2009, skal vi prøve å vise hvordan en god besvarelse kan se ut, og knytte noen kommentarer til denne.

Vi vil understreke at oppgavene også kan løses/føres på andre måter enn det som er vist her.

På Del 1 er ingen digitale hjelpemidler tillatt. Vi tar likevel med et forslag til løsning av Del 1 for å vise eksempler på framgangsmåte og god føring/forklaring. Løsningen av Del 1 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene skal ikke bruke datamaskin på Del 1.

På Del 2 kan elevene bruke alle hjelpemidler. Oppgavene i dette settet kan løses ved hjelp av en grafisk kalkulator. For å løse enkelte oppgaver vil det, som vi skal se, likevel være en fordel for elevene å kunne bruke andre digitale verktøy.

I eksempelbesvarelsen er Del 2 først løst med grafisk kalkulator som eneste digitale verktøy. Deretter er Del 2 løst ved hjelp av dynamisk geometriprogram, CAS-verktøy og regneark. Dette har vi gjort for å vise at elevene kan ha fordel av å kunne bruke ulike hjelpemidler på en hensiktsmessig måte, og for å vise at bruk av ulike digitale verktøy også stiller krav til føring og forklaring – både når det gjelder framgangsmåte og løsning.

I opplæringen bør elevene få trening i framgangsmåter samt refleksjon rundt svar og løsningsmetoder.

Selv om CAS, og alle andre digitale verktøy, er tillatt under Del 2 av eksamen, skal sensor først og fremst se etter matematisk forståelse og kompetanse. Oppgavene i Del 2 er primært bygget opp slik at eleven selv, ut fra en matematisk tekst, må sette opp likninger, uttrykk osv. Deretter kan eleven bruke for eksempel CAS for å løse selve likningen. Av og til kan det være en fordel å bruke CAS, andre ganger kan det gå like raskt uten.

Nærmere kommentarer til enkelte av oppgavene og løsningene finnes i grønne tekstbokser.

Formatet på løsningen i Del 1 er angitt slik på grunn av lesbarheten. På eksamen kan ikke elevene bruke datamaskin og må derfor besvare Del 1 for hånd.

Formatet på løsningen i Del 2 er angitt slik først og fremst for å vise kva man krever av framgangsmåte, forklaringar, hvilke kommandoer som er brukt på de digitale verktøyene osv. når man løser oppgavene. Det er ikke krav til IKT-basert eksamen på Del 2. Dette er frivillig.

[1] CAS = Computer Algebra Systems, også kalt symbolbehandlende kalkulator.

Elevene kan naturligvis lage et eget dokument hvor man samler alle løsningene slik vi har gjort, eller ta en utskrift av for eksempel grafer og regnearkløsninger. Enten eleven tar utskrift eller skriver for hånd, er hovedprinsippet at det skal gå klart fram hvordan eleven har tenkt.

Dette dokumentet fokuserer altså først og fremst på framgangsmåte, resonnement og forklaring og ikke på besvarelsens format.

Vi viser ellers til vurderingsveiledningen i matematikk for videregående opplæring etter Kunnskapsløftet våren 2010.

Utdanningsdirektoratet tar gjerne imot konstruktive innspill fra skolene.

Del 1 – Uten hjelpemidler

Kun vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Løsningen av Del 1 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene kan ikke bruke datamaskin på Del 1, og må skrive besvarelsen for hånd.

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} 2x+9-x &> 4x-6 \\ 2x-x-4x &> -6-9 \\ -3x &> -15 \\ \frac{-3x}{-3} &< \frac{-15}{-3} \\ \underline{\underline{x}} & \underline{\underline{< 5}} \end{aligned}$$

Eksempler på god framgangsmåte og struktur.

b)

$$x^2+2x-8=0$$

$$a=1$$
$$b=2$$
$$c=-8$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$x=\frac{-2\pm6}{2}$$

$$\underline{\underline{x=-4 \quad \vee \quad x=2}}$$

For alle oppgavene på denne siden:
Husk å ta med tilstrekkelig mange mellomregninger.

c)

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-1)}=\underline{\underline{\frac{x+1}{x-1}}}$$

d)

$$2^{\frac{1}{12}}\cdot2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{12}+\frac{8}{12}+\frac{3}{12}}=2^{\frac{12}{12}}=2^1=\underline{\underline{2}}$$

Uttrykkene forenkles mest mulig.

I oppgave 1 e) er det et krav at svaret skrives på standard-form.

e)

$$2{,}5\cdot10^6\cdot4{,}0\cdot10^{-4}=10\cdot10^{6-4}=10\cdot10^2=1{,}0\cdot10^{1+2}=\underline{\underline{1{,}0\cdot10^3}}$$

f) $$\frac{n}{p} = 140$$

$$n = 70$$

Ut fra dette får jeg:

$$\frac{70}{p} = 140$$

$$140p = 70$$

$$p = \frac{70}{140}$$

$$p = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Mellomregning skal være med.

g) Først deriverer jeg funksjonen:

$$f(x) = -2x^2 - 3x - 4$$

$$\underline{f'(x) = -4x - 3}$$

Så setter jeg den deriverte lik 0 for å finne eventuelle ekstremalpunkt:

$$f'(x) = 0$$

$$-4x - 3 = 0$$

$$-4x = 3$$

$$x = \underline{-\frac{3}{4}}$$

Tilstrekkelig god forklaring.

Siden dette er en parabel som vender hul side ned (andregradsleddet er negativt), vet jeg at ekstremalpunktet er et toppunkt.

Funksjonen har sin største verdi for $x = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$

h)

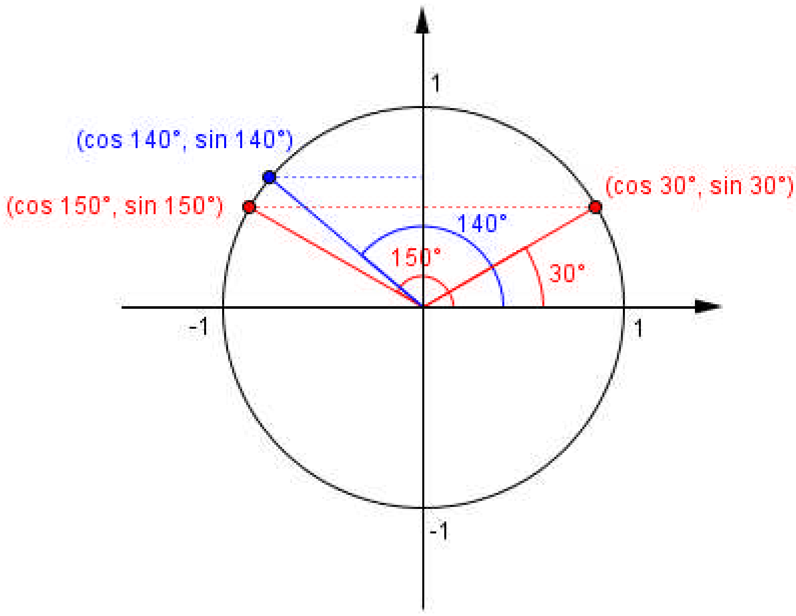
Arealet av en vilkårlig trekant kan regnes ut ved hjelp av arealsetningen,

$\text{Areal} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$, der A er vinkelen mellom sidene b og c.

Arealet av ΔABC i oppgaven blir da $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin(140°) = 10 \cdot \sin(140°)$

Arealet av ΔDEF blir $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin(30°) = 10 \cdot \sin(30°)$

Ut fra enhetssirkelen vet jeg at $\sin(30°) = \sin(180° - 30°) = \sin(150°)$ og at $\sin(140°)$ er større enn dette. Se figuren nedenfor.



Her er det avgjørende med en god begrunnelse for hvilket areal som er størst.

Arealet av ΔABC er derfor størst.

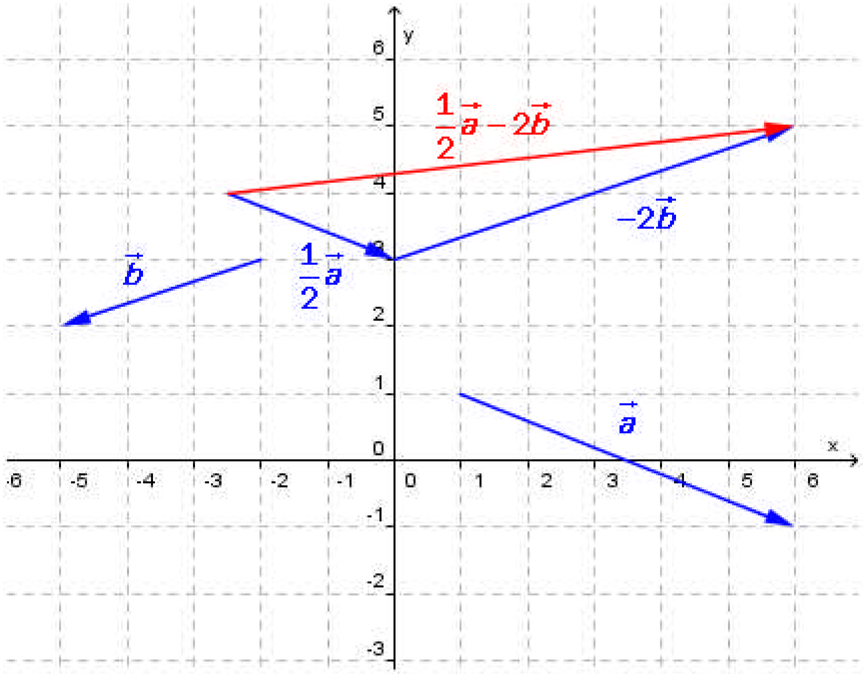
Oppgave 2

a) $\vec{a} = [5,-2]$

$\vec{b} = [-3,-1]$

Det er tilstrekkelig å sette opp de ferdig utregnede vektorene.

b)



c) Dersom $\vec{c}$ skal være parallell med $\vec{a}$, må det finnes et tall k slik at $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a}$$

$$\left[2t + \frac{1}{2}, t - 2\right] = k\,[5,-2]$$

$$2t + \frac{1}{2} = 5k \quad \wedge \quad t - 2 = -2k$$

$$t = \underline{-2k + 2}$$

$$2(-2k + 2) + \frac{1}{2} = 5k$$

$$-4k + 4 + \frac{1}{2} = 5k$$

$$-9k = -\frac{9}{2}$$

$$k = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$t = -2k + 2 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = -1 + 2 = \underline{\underline{1}}$$

Her tar man med setningen som gjelder for parallelle vektorer.

God og oversiktlig framgangsmåte.

Del 2 – Alle hjelpemidler

Her et Del 2 løst med grafisk kalkulator som eneste digitale verktøy.

Løsningen av Del 2 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene kan skrive besvarelsen for hånd.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal det velges ut noen elementer fra en større mengde, uten tilbakelegging. Utvalgene er uordnede. Jeg bruker derfor en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.

Forklarende tekst og oppsett av gunstige utfall dividert på mulige utfall er et krav her.

a)

$$P\left(\text{Ane får være med på turen}\right) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{24}{5}}{\binom{25}{6}} = \underline{\underline{0,240}}$$

b)

$$P\left(\text{Akkurat 3 jenter og 3 gutter får være med på turen}\right) = \frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} \approx \underline{\underline{0,308}}$$

c)

$$P\left(\text{Bare én av dem får være med}\right) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{23}{5}}{\binom{25}{6}} = \underline{\underline{0,380}}$$

Oppgave 4

a) Jeg bruker cosinussetningen for å regne ut vinkelen.

God og oversiktlig utregning med mange nok mellomregninger.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$$

$$\cos A = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2\cdot AB\cdot AC}$$

$$\cos A = \frac{85^2 - 180^2 - 196^2}{-2\cdot 180\cdot 196}$$

$$\cos A \approx \underline{0,9012}$$

$$\angle A \approx \cos^{-1}(0,9012) \approx \underline{\underline{25,68^\circ}}$$

b) Jeg bruker arealsetningen for å regne ut arealet av tomta.

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \approx \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 196 \cdot \sin 25{,}68° \approx \underline{7640}$$

Arealet er ca. 7640 m^2.

Konklusjon med riktig enhet er et krav.

Oppgave 5

a)
- Punktet O har koordinatene $(0,0)$, siden dette punktet ligger origo.
- Punktet A har koordinatene $(5{,}2\ ,\ 0)$, siden avstanden mellom O og A er 5,2 meter.
- Punktet B har koordinatene $(2{,}6\ ,\ 0{,}8)$, siden 1.koordinaten til B ligger midt mellom 1.koordinaten til O og 1.koordinaten til A og siden 2. koordinaten til B ligger $(1{,}2 - 0{,}4 = 0{,}8)$ meter over x-aksen.

Jeg har nå 3 punkt og vil bruke regresjon for å finne den andregradsfunksjonen som passer med parabelen. Jeg bruker kalkulatoren (STAT), legger inn x-verdiene og y-verdiene i hver sine lister og velger REG og x^2.

Jeg finner da at den andregradsfunksjonen som passer med parabelen er $\underline{\underline{f(x) = -0{,}12x^2 + 0{,}62x}}$

Det et viktig å forklare hvilke kommandoer man har brukt på den grafiske kalkulatoren.

b) Parabelen har et topppunkt for $x = 2{,}6$.
Flåten er 2,0 meter bred.
For å finne ut om flåten vil kunne passere, må jeg regne ut høyden under broen i punktene som har 1.koordinat $2{,}6 + 1{,}0 = 3{,}6$ og $2{,}6 - 1{,}0 = 1{,}6$.

$$f(3{,}6) = -0{,}12 \cdot (3{,}6)^2 + 0{,}62 \cdot 3{,}6 \approx \underline{0{,}68}$$

På grunn av synmmetri, vet jeg da at $f(1{,}6) \approx \underline{0{,}68}$.

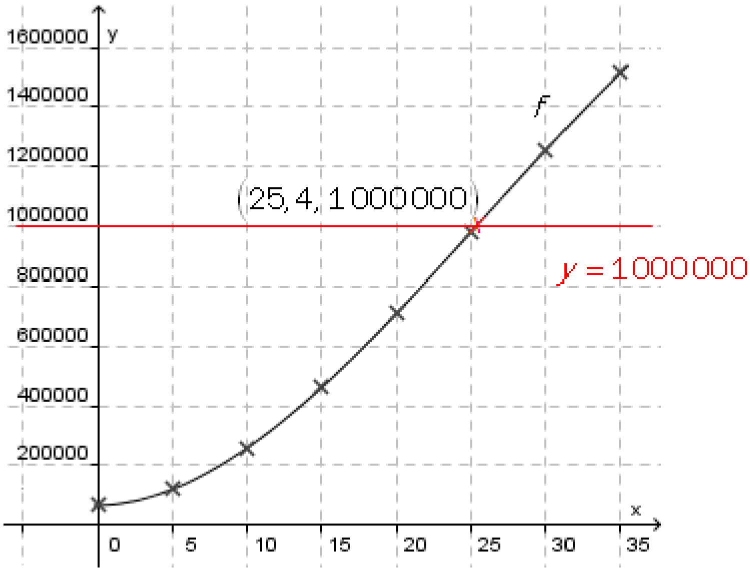
Godt resonnement med god begrunnelse.

Siden flåten er 1,1 meter høy og 2,0 meter bred og høyden under broen bare er ca. (0,68 + 0,40 = 1,08) meter når vi kommer ut 1,0 meter fra midten, vil flåten ikke kunne passere under broen.

Oppgave 6

a) $f(x) = -27x^3 + 2100x^2 + 990x + 65000$

Jeg tegnet først grafen til f på kalkulatoren for å se hvordan den så ut (GRAPH, la inn funksjonsuttrykket, DRAW) , så brukte jeg TABLE for å finne koordinatene til ulike punkter på grafen, slik at jeg kunne lage en nøyaktig tegning på papir:



Verditabell er generelt ikke et krav, men man må forklare hva man har gjort på grafisk kalkulator.

"Tegn grafen" innebærer et krav om en nøyaktig tegnet graf (en skisse godkjennes ikke).

b) Jeg brukte kalkulatoren og tegnet den vanrette linja $y = 1000000$ i samme koordinatsystem som grafen til f. Jeg fant skjæringspunktet mellom graf og linje ved å bruke G-SOLV og ISCT. Skjæringspunktet er $(25{,}4\ ,\ 1000000)$. Dette har jeg markert i koordinatsystemet ovenfor.

Det betyr at antall registrerte personlbiler passerte 1 000 000 i løpet av det 25. året, altså i løpet av 1975.

<u>Antall registrerte personbiler passerete 1 000 000 i løpet av 1975.</u>

"Når passerte antall …" innebærer valgfri metode for elevene.

Her har man løst oppgaven grafisk med forklaring.

Oppgaven kan også løses ved regning.

c) Gjennomsnitlig vekstfart:

$f(0) = 65\,000$

$f(35) = 1\,514\,525$ (Kalkulator, TABLE)

$$\frac{1\,514\,525 - 65\,000}{35 - 0} = \underline{41\,415}$$

Gjennomsnittlig vekstfart for $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 35$ er 41 415 biler per år.

Oppgave c) og d) har tilstrekkelig gode forklaringer og begrunnelser.

"Finn" innebærer valgfri metode.

Husk konklusjon.

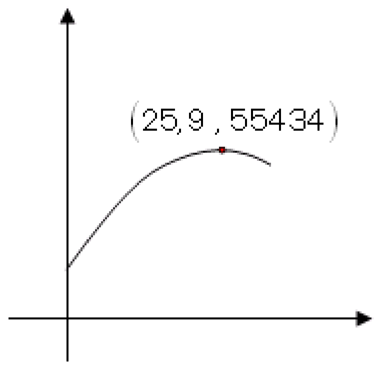
d) Jeg bruker kalkulatoren (TABLE) og velger å vise verdiene for den deriverte i tabellen sammen med funksjonsverdiene.

Jeg finner da at $f'(10) = \underline{\underline{34\,890}}$.

Svaret viser momentan vekstfart når $x = 10$, dvs. økning i antall registrerte personbiler per år i begynnelsen av 1960.

e) Jeg tegner grafen til $f'(x)$ på kalkulatoren ved å bruke GRAPH, legge inn utrykket $d/dx(-27x^3 + 2100x^2 + 990x + 65\,000, x)$ og velge DRAW. Jeg bruker G-SOLV og MAX og finner at grafen til har et toppunkt i $(25{,}9\ ,\ 55434)$.

Skisse av grafen:



Antall personbiler økte raskest i slutten av 1975.
Økingen var da på ca. 55 434 biler per år.

"Finn" innebærer igjen valgfri metode.
Her er det tilstrekkelig med skisse og forklaring på hva man har gjort på grafisk kalkulator.

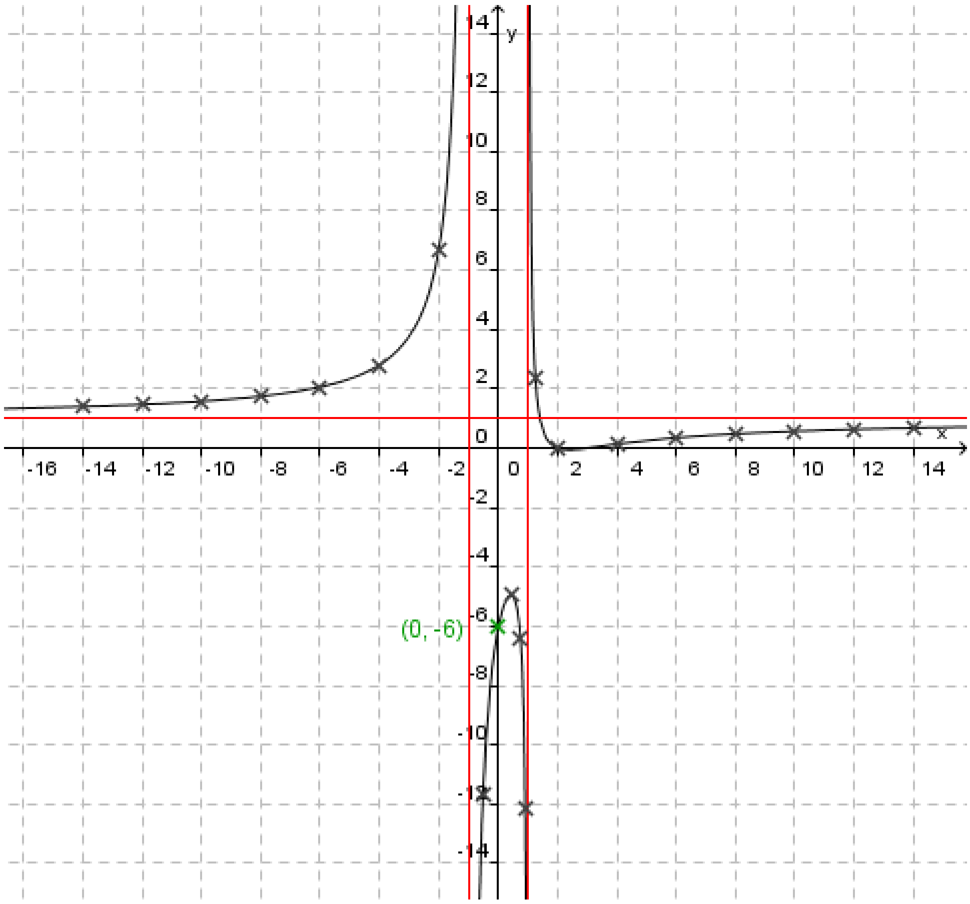
Oppgave 7

Alternativ I

”Tegn grafen” innebærer et krav om en nøyaktig tegnet graf. Verditabell er ikke et krav.

a) $$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$$

Jeg tegnet først grafen til f på kalkulatoren for å se hvordan den så ut (GRAPH, la inn funksjonsuttrykket, DRAW) , så brukte jeg TABLE for å finne koordinatene til ulike punkter på grafen, slik at jeg kunne lage en nøyaktig tegning på papir:
(For å finne toppunktet, brukte jeg GSOLV og MAX på kalkulatoren.)



I koordinatsystemet har jeg også tegnet asymptotene som jeg fant i b).

b) Grafen til f har vertiklale asymptoter for de verdiene av x som gjør at nevneren i brøken blir lik 0.

”Finn asymptotene” innebærer igjen valgfrihet når det gjelder metode, men forklaring er påkrevd.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$\underline{x = -1 \quad \vee \quad x = 1}$$

Vertikale asymptoter:

$\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = 1}}$

For positive verdier av x ser jeg at etter hvert som x blir større, vil grafen til f nærmer seg den rette linja $y = 1$. Det samme skjer for negative x-verdier når x minker.

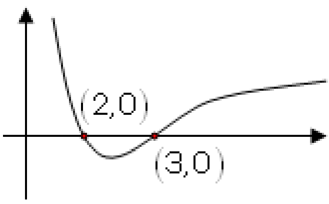
Linja $y = 1$ er derfor en horisontal asymptote.

c) $f(0)$ finner jeg der grafen til f skjærer y-aksen.

Fra a) ser jeg at grafen skjærer y-aksen i $(0,-6)$, det betyr at $f(0) = -6$.

For å løse likningen $f(x) = 0$, kan jeg finne ut hvor grafen til f skjærer x-aksen. Jeg finner nullpunktene nøyaktig på kalkulatoren ved å bruke GSOLV og ROOT.

Utsnitt av grafen med nullpunkt (skisse):



Et eksempel på en god forklaring med konklusjon.

Nullpunktene er $(2,0)$ og $(3,0)$.

Likningen $f(x) = 0$ har da løsning $x = 2 \quad \vee \quad x = 3$.

Alternativ II

a) Jeg bruker formelen som er oppgitt, og finner et uttrykk for a:

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

$$a \cdot s = \frac{v^2}{2}$$

$$a = \underline{\frac{v^2}{2s}}$$

God framgangsmåte og forklaring.

Jeg setter så inn verdiene som er gitt i teksten:

$$a = \frac{50^2}{2 \cdot 13} \approx \underline{\underline{96,2}}$$

NB! Husk at konklusjon er viktig.

b) Når farten er 60 km/t og $a \approx 96,2$, blir:

$$s = \frac{v^2}{2a} \approx \frac{60^2}{2 \cdot 96,2} \approx \underline{18,7}$$

<u>Bremselengden blir nå på ca. 18,7 meter, dvs. 5,7 meter lengre enn når farten var 50 km/t.</u>

c) Bil A har akkurat stoppet ved muren. Avstanden fra der bilene bremser og fram til muren er derfor 13 meter.

Bil B har da ca. 5,7 meter igjen før den ville stoppet.

Jeg bruker formelen ovenfor, finner et uttrykk for v og setter inn verdier for a og s:

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

$$v^2 = 2a \cdot s$$

$$v = \sqrt{2a \cdot s}$$

$$v \approx \sqrt{2 \cdot 96,2 \cdot 5,7} \approx \underline{33}$$

- God innledende forklaring
- Krav til bruk av formel
- Viktig med en konklusjon

<u>Dette viser at bil B vil ha en fart på ca. 33 km/t når den treffer muren.</u>

Del 2 – Alle hjelpemidler

Her et Del 2 løst ved hjelp av ulike digitale verktøy.
(Dynamisk geometriprogram og CAS-verktøy.)

Løsningen av Del 2 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene kan skrive besvarelsen for hånd eller ta utskrift.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal det velges ut noen elementer fra en større mengde, uten tilbakelegging. Utvalgene er uordnede. Jeg bruker derfor en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.

a)

$$\frac{nCr(1,\ 1)\cdot nCr(24,\ 5)}{nCr(25,\ 6)} \qquad = .2400$$

P(Ane får være med på turen) = 0,240

Det er et krav at man viser hvilke kommandoer som er brukt i CAS.

Det er også viktig med en konklusjon.

b)

$$\frac{nCr(15,\ 3)\cdot nCr(10,\ 3)}{nCr(25,\ 6)} \qquad = .3083$$

P(Akkurat 3 jenter og 3 gutter får være med på turen) ≈ 0,308

c)

$$\frac{nCr(2,\ 1)\cdot nCr(23,\ 5)}{nCr(25,\ 6)} \qquad = .3800$$

P(Bare én av de får være med) = 0,380

Oppgave 4

a) Jeg bruker cosinussetningen for å regne ut vinkelen. Jeg setter opp en likning som jeg løser ved hjelp av digitalt verktøy.

$$\text{solve}\left(85^2 = 180^2 + 196^2 - 2\cdot 180\cdot 196\cdot \cos(A),\ A\right) \mid A > 0 \text{ and } A < 180$$

$$a = 25.68$$

Vinkelen mellom AB og AC er ca. 25,7°.

Det er et krav at man viser hvilke kommandoer som er brukt i CAS.

Svar som for eksempel ”Jeg løste oppgave i CAS” godtas ikke.

b) Jeg bruker arealsetningen for å regne ut arealet av tomta.

$\frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 196 \cdot \sin(25.68) \quad = 7644.20$

<u>Arealet av tomta er ca. 7640 m^2.</u>

Valg av metode framkommer klart.

Utregningen må på en eller annen måte framkomme.

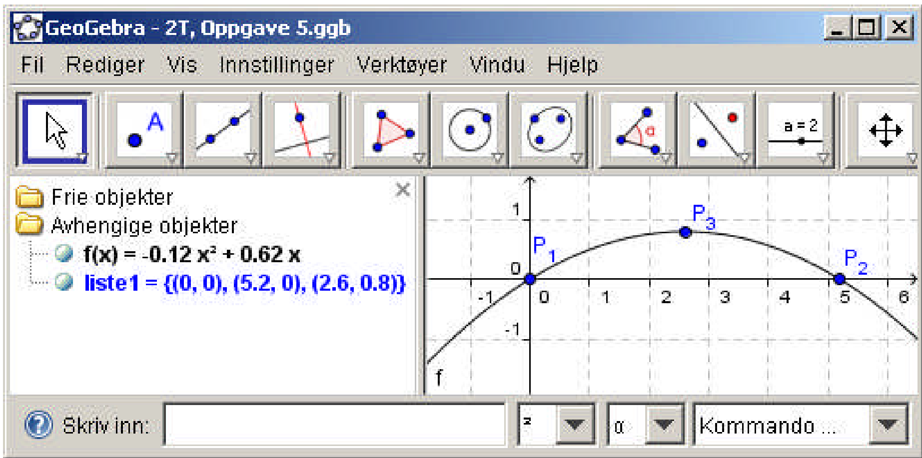
Husk konklusjon.

Oppgave 5

a)
- Punktet O har koordinatene $(0,0)$, siden dette punktet ligger origo.
- Punktet A har koordinatene $(5{,}2\ ,\ 0)$, siden avstanden mellom O og A er 5,2 meter.
- Punktet B har koordinatene $(2{,}6\ ,\ 0{,}8)$, siden 1.koordinaten til B ligger midt mellom 1.koordinaten til O og 1.koordinaten til A og siden 2. koordinaten til B ligger $(1{,}2-0{,}4=0{,}8)$ meter over x-aksen.

Jeg har nå 3 punkt og vil bruke regresjon for å finne den andregradsfunksjonen som passer med parabelen. Jeg bruker dynamisk geometriprogram, legger punktene inn i en liste og velger regresjon, polynom, grad 2. Kommando RegPoly[liste1,2]

Skjermbilde fra dynamisk geometriprogram:



Den andregradsfunksjonen som passer med parabelen er $\underline{\underline{f(x)=-0{,}12x^2+0{,}62x}}$

Her vises samme kompetanse som ved bruk av grafisk kalkulator (se foran).

Krav til utskrift av grafen med forklaring (se til venstre i vinduet).

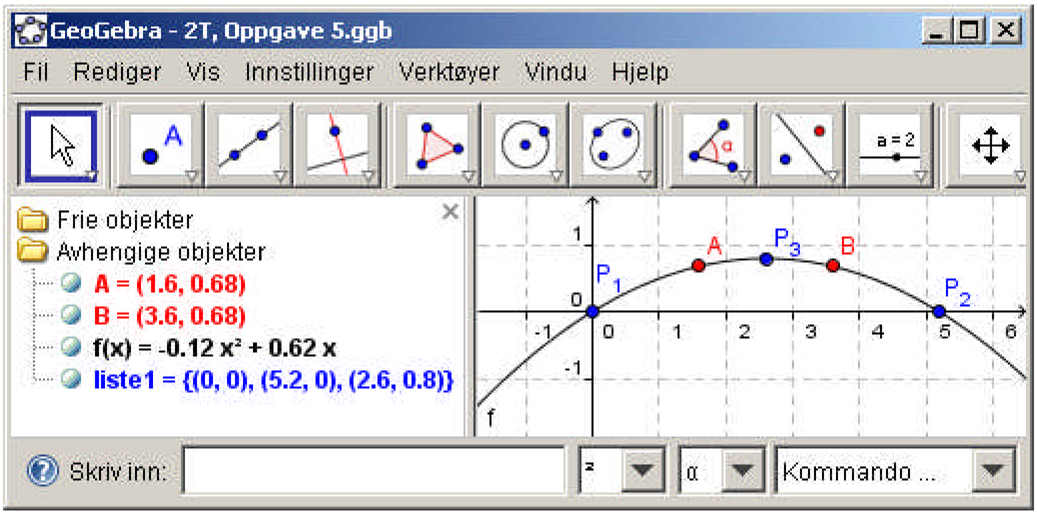
b) Parabelen har et topppunkt for $x = 2{,}6$.

Det er viktig med forklaring her.

Flåten er 2,0 meter bred.

For å finne ut om flåten vil kunne passere, må jeg regne ut høyden under broen i punktene som har 1. koordinat $2{,}6 + 1{,}0 = 3{,}6$ og $2{,}6 - 1{,}0 = 1{,}6$.

Jeg bruker dynamisk geometriprogram og legger punktene inn i koordinatsystemet ved å skrive $(1{,}6, f(1{,}6))$ og $(3{,}6, f(3{,}6))$.



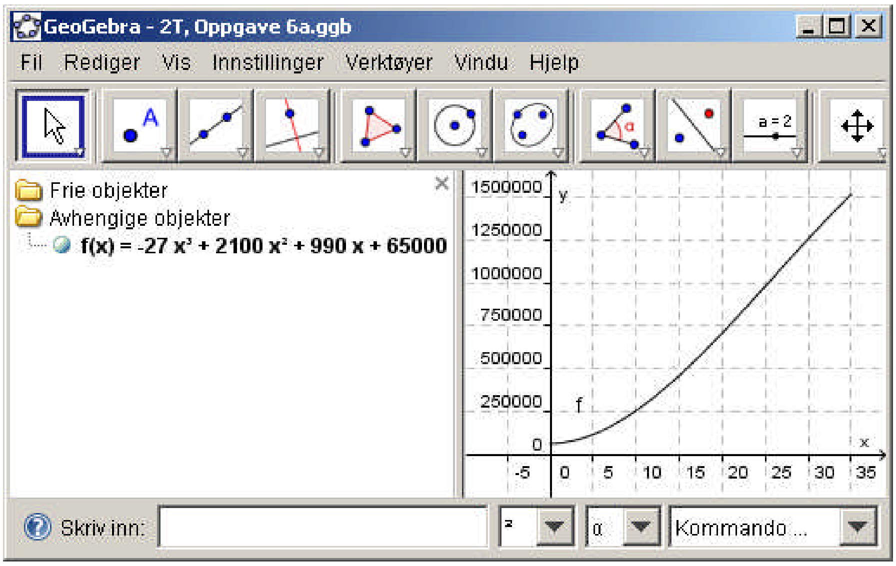
<u>Siden flåten er 1,1 meter høy og 2,0 meter bred og høyden under broen bare er ca. (0,68 + 0,40 = 1,08) meter når vi kommer ut 1,0 meter fra midten, vil flåten ikke kunne passere under broen.</u>

Her er det krav til utskrift av graf med forklaring.

Husk konklusjon.

Oppgave 6

a)

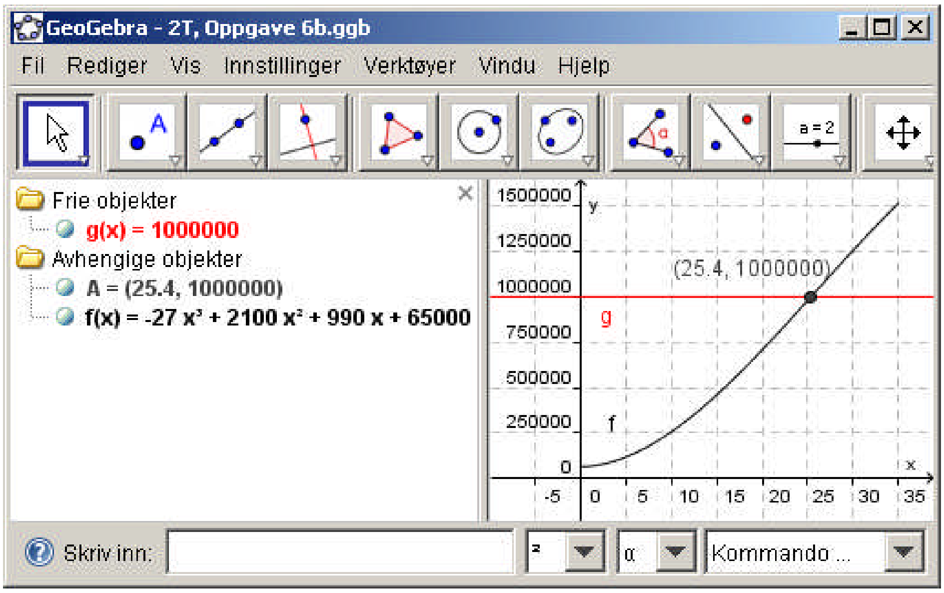


Her er det krav til utskrift av graf med forklaring.

Husk navn på aksene.

I koordinatsystemet ovenfor er grafen til *f* tegnet i dynamisk geometriprogram for x-verdier fra og med 0 til og med 35.

b)



Her er det krav til utskrift av graf med forklaring.

Husk navn på aksene.

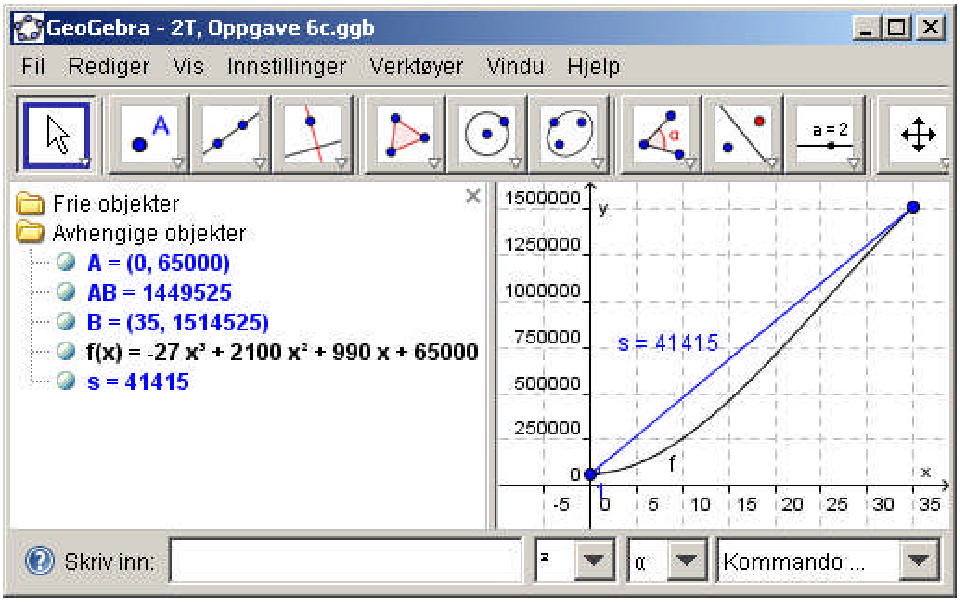
Jeg brukte dynamisk geometriprogram og fant løsningen grafisk.
Se koordinatsystemet ovenfor.

Det betyr at antall registrerte personlbiler passerte 1 000 000 i løpet av det 25. året, altså i løpet av 1975.

<u>Antall registrerte personbiler passerte 1 000 000 i løpet av 1975.</u>

Viktig med konklusjon her.

c)



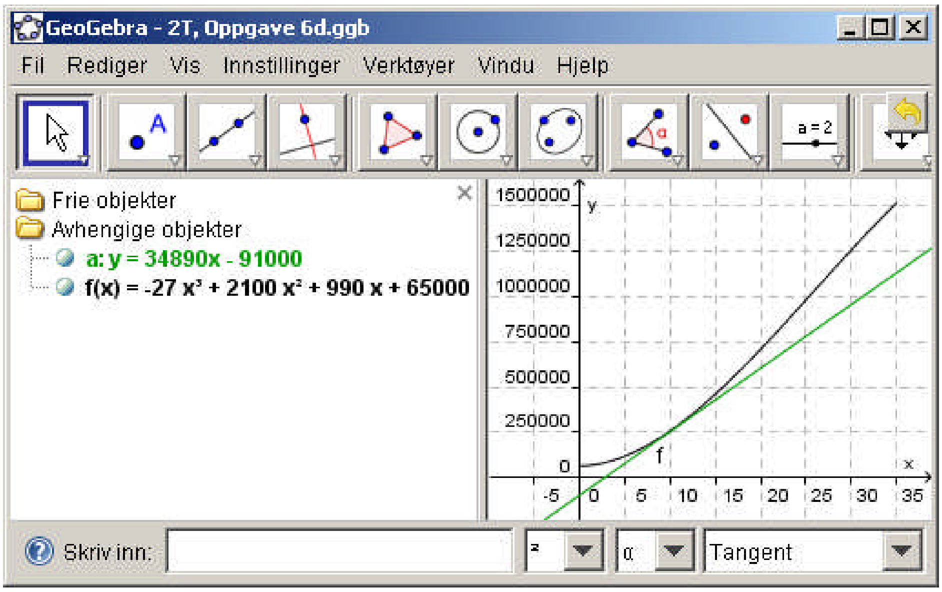
Her er det krav til utskrift av graf med forklaring.

Husk navn på aksene.

Jeg bruker dynamisk geometriprogram og finner stigningstallet til den rette linja mellom punktene (0, 65 000) og (35, 1 514 525). Stigningstallet er 41 415.

Det betyr at gjennomsnittlig vekstfart for $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 35$ er 41 415 biler per år.

NB! Her er det vikitg med konklusjon/forklaring.

d) 

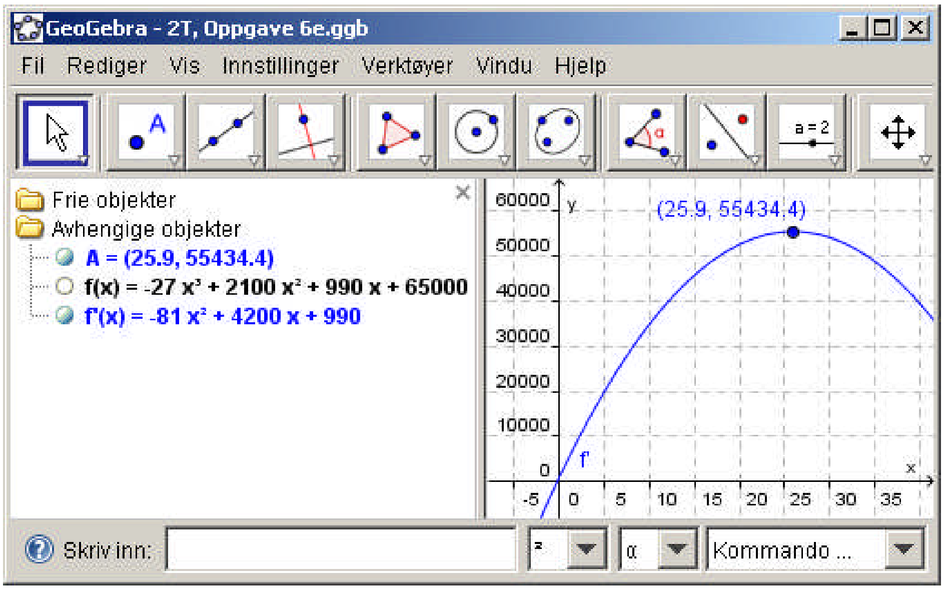
Henvises det til en graf, er det krav om utskrift av grafen med forklaring.

Jeg bruker dynamisk geometriprogram igjen og tegner en tangent til kurven i punktet der $x = 10$. $f'(10)$ er stigningstallet til denne tangenten. Jeg ser av uttrykket i algebravinduet (se ovenfor) at tangenten har stigningstall 34 890.

$f'(10) = \underline{\underline{34\ 890}}$

<u>Svaret viser momentan vekstfart når $x = 10$, dvs. økning i antall registrerte personbiler per år i begynnelsen av 1960.</u>

e) Grafen til den deriverte vil ha et toppunkt når antall registrerte personbiler øker raskest. Jeg tegner grafen til $f\,'(x)$ i dynamisk geometriprogram og finner toppunktet:



Henvises det til en graf, er det krav om utskrift av grafen med forklaring.

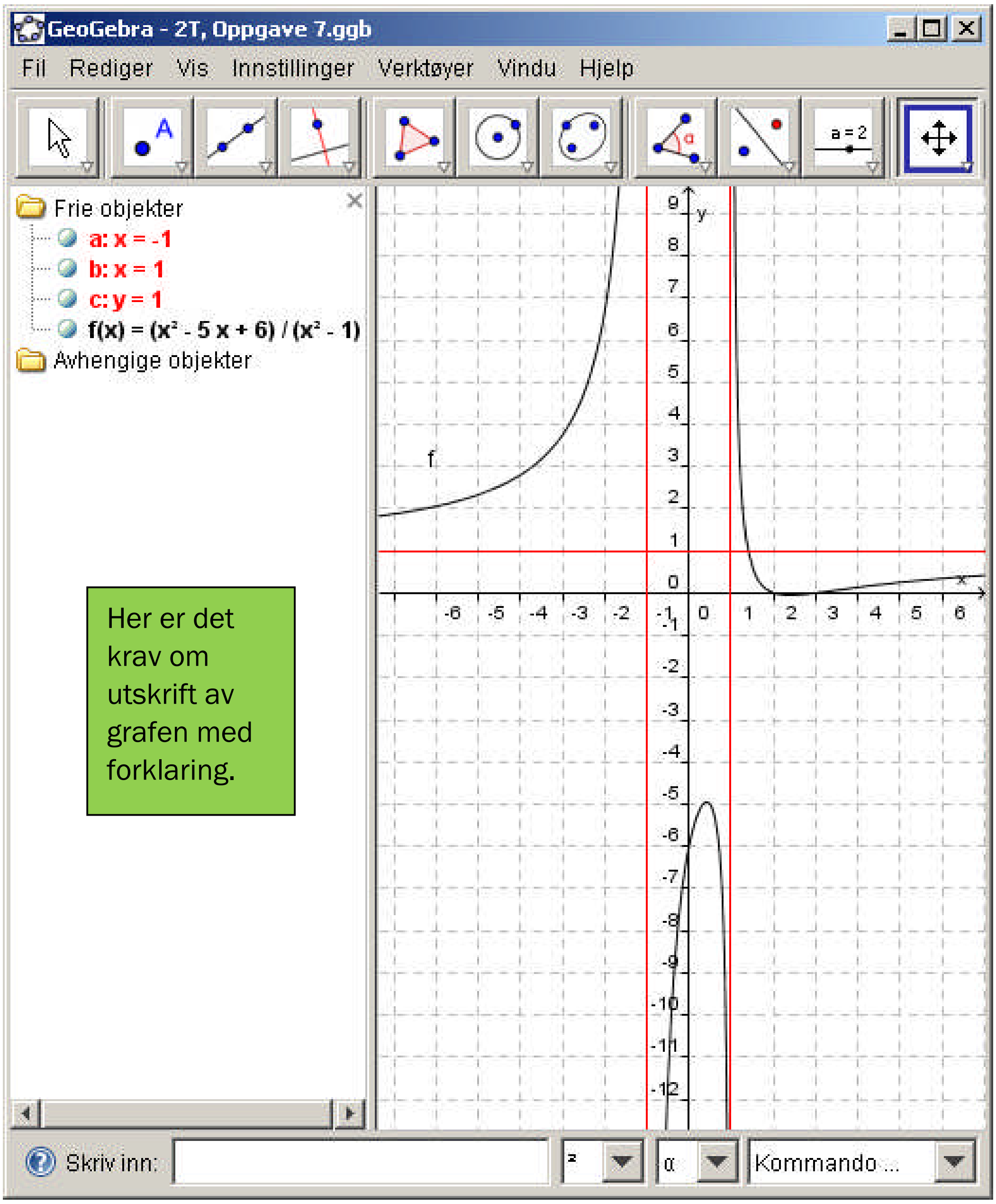
<u>Antall personbiler økte raskest i slutten av 1975.</u>
<u>Økingen var da på ca. 55 434 biler per år.</u>

Husk konklusjon.

Oppgave 7

Alternativ I

a) Jeg bruker dynamisk geometriprogram og tegner grafen til *f* .
I koordinatsystemet nedenfor er grafen tegnet sammen med asymptotene som jeg fant i b). (De røde linjene med navn a, b og c er asymptoter.)



b) Grafen til f har vertikale asymptoter for de verdiene av x som gjør at nevneren i brøken blir lik 0.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$\underline{x = -1 \quad \vee \quad x = 1}$$

Vertikale asymptoter:

$\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = 1}}$

Dette er tilstrekkelig forklaring for hvordan likningene for vertikale asymptoter og horisontal asymptote framkommer.

For å finne horisontal asymptote, undersøker jeg hva som skjer med $f(x)$ når x er positiv og blir stadig større og når x er negativ og blir stadig mindre. Av grafen ser det ut som funksjonsverdien da nærmer seg 1. Jeg undersøker om dette er tilfelle, ved å regne ut noen funksjonsverdier:
(Jeg definerer $f(x)$ i et digitalt verktøy og regner ut .)

$f(x) := \dfrac{x^2 - 5\cdot x + 6}{x^2 - 1}$ = "Done"

$f(10)$ = .57

$f(100)$ = .95

$f(1000)$ = 1.0

$f(10000)$ = 1.0

$f(100000)$ = 1.0

$f(-10)$ = 1.58

$f(-100)$ = 1.05

$f(-1000)$ = 1.01

$f(-10000)$ = 1.00

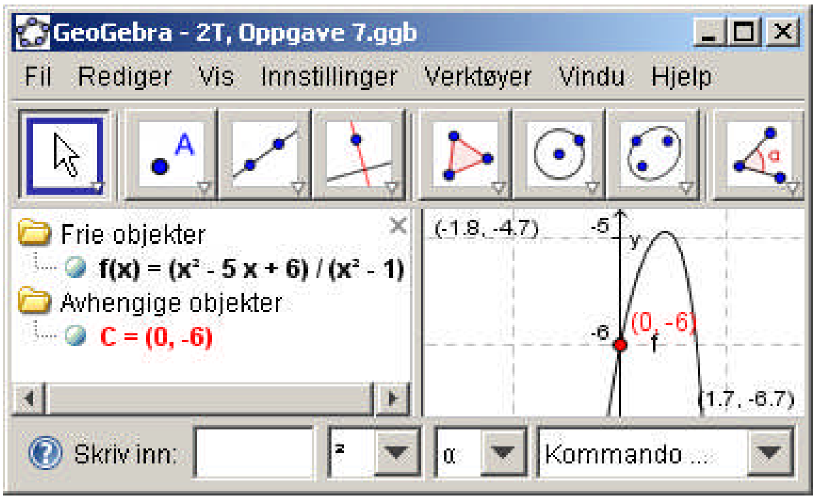
$f(-100000)$ = 1.00

Horisontal asymptote:

$\underline{\underline{y = 1}}$

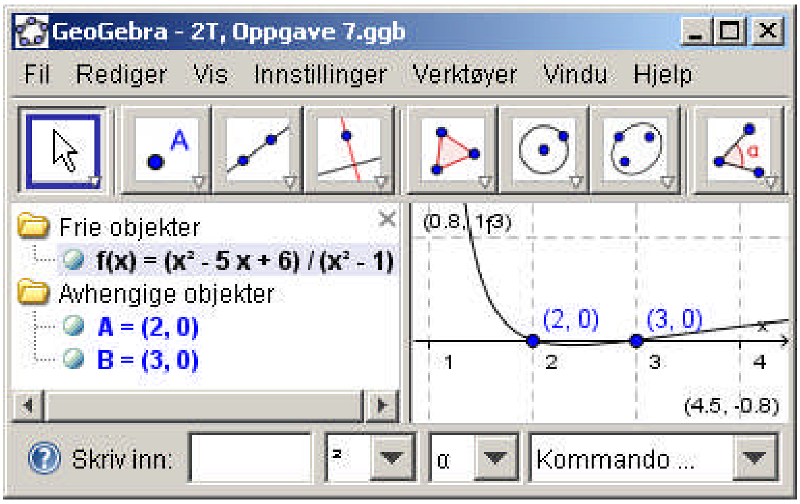
c) $f(0)$ finner jeg der grafen skjærer y-aksen. For å løse likningen $f(x)=0$, kan jeg finne ut hvor grafen skjærer x-aksen.

Jeg har her forstørret opp det aktuelle området av grafen og funnet skjæringspunktene:



Enten kan det henvises til grafen i oppgave a), eller så må man ta utskrift av en del av grafen som her.

$\underline{\underline{f(0)=-6}}$



Brukes det en del av grafen for å få frem nullpunktene, må man ta utskrift av grafen.

Nullpunktene er $(2,0)$ og $(3,0)$.

Likningen $f(x)=0$ har løsning $\underline{\underline{x=2 \quad \vee \quad x=3}}$.

Husk også forklaring/konklusjon.

Alternativ II

a) Jeg bruker digitalt verktøy, setter opp en likning og bruker opplysningene i teksten:

$$\text{solve}\left(s=\frac{v^2}{2\cdot a}, a\right) \mid s=13 \text{ and } v=50$$

$$a=96.15$$

Jeg ser at $a \approx 96{,}2$.

Det er et ufravikelig krav at man skriver opp kommandoer som er benyttet i CAS. Her et er godt eksempel på dette.

b) Jeg bruker verdien for a som jeg fant i a) og setter opp likningen på nytt med fart lik 60 km/t:

$$\text{solve}\left(s=\frac{v^2}{2\cdot a}, s\right) \mid a=96.2 \text{ and } v=60$$

$$s=18.71$$

Forklaring – kommando brukt i CAS – konklusjon.

Bremselengden blir nå på ca. 18,7 meter, dvs. 5,7 meter lengre enn når farten var 50 km/t.

c) Bil A har akkurat stoppet ved muren. Avstanden fra der bilene bremser og fram til muren er derfor 13 meter.

Bil B har da ca. 5,7 meter igjen før den ville stoppet.

Jeg bruker samme likning igjen og regner ut farten når $s = 5{,}7$:

$$\text{solve}\left(s=\frac{v^2}{2\cdot a}, v\right) \mid a=96.2 \text{ and } s=5.7 \text{ and } v>0$$

$$v=33.12$$

Forklaring – kommando brukt i CAS – konklusjon.

Dette viser at bil B vil ha en fart på ca. 33 km/t når den treffer muren.