Utdanningsdirektoratet

Eksempeloppgåve/ Eksempeloppgave

Desember 2007

REA3022 Matematikk R1
Programfag

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2	Alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå internett eller andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Vedlegg	Ingen
Vedlegg som skal leverast inn	ingen
Framgangsmåte og forklaring	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing. Formuleringa "*ved rekning*" inneber at oppgåva skal løysast trinn for trinn slik at mellomrekninga kjem tydeleg fram. Det skal gå tydeleg fram av eksamenssvaret korleis du har komme fram til svara.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke føremålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x \cdot \ln x$

2) $g(x) = 3e^{x^2+1}$

b) Bestem følgjande grenseverdi, dersom han eksisterer:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

c) Ein funksjon f er kontinuerleg, men ikkje deriverbar i punktet $(1, 2)$. Teikn ei skisse av grafen til ein mogleg funksjon f.

d) Finn dei eksakte løysingane av likningane

1) $2\ln x - 4 = 0$

2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

e) Skriv så enkelt som mogleg

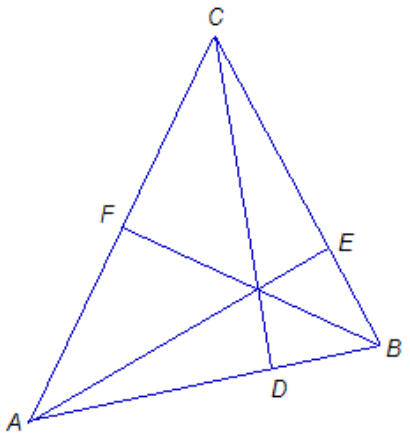
1) $\dfrac{2^{-4} \cdot 2^3}{2^{-2}}$

2) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b}{\left(a^2 b\right)^2 \cdot b^{-\frac{1}{3}}}$

f) Vi har gitt ein trekant ABC. Punktet *D* ligg på *AB,* punktet *E* ligg på *BC,* og punktet *F* ligg på *AC.* Sjå figuren.

Cevas setning seier:

> Linjestykka *AE*, *BF* og *CD* skjer kvarandre i eitt punkt dersom og berre dersom
>
> $$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$



Bruk Cevas setning til å bevise at medianane i ein trekant skjer kvarandre i eitt punkt.

Oppgåve 2

a) Vis at polynomet $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ er deleleg med $x - 2$.

b) Skriv $f(x)$ som eit produkt av førstegradsfaktorar.

c) Løys ulikskapen $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 9} > 0$.

d) Bestem a slik at likninga $x^3 - 2x^2 - 5x + a = 0$ får ei løysing lik 1. Løys likninga for denne verdien av a.

Del 2

Oppgåve 3

På ein skole er det 55 % jenter og 45 % gutar på Vg2. Av jentene har 25 % valt matematikk R1. Av gutane har 30 % valt R1.

a) Formuler dei to siste opplysningane i teksten ovanfor som vilkårsbundne sannsyn.

b) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald elev er ein gut som har valt R1.

c) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald elev har valt R1.

Av alle elevane på Vg2 har 30 % valt fysikk. Mellom dei som har valt R1, er det 80 % som har valt fysikk.

d) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald fysikkelev har valt R1.

Oppgåve 4

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneheld delar av begge,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Ein partikkel beveger seg i planet. Posisjonen til partikkelen ved tida t er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[t^2\,,\ t^3 - 3t\right] \text{ der } t \in [0\,,\ 2]$$

a) Teikn grafen som beskriv bevegelsen til partikkelen.

b) Bestem ved rekning koordinatane til skjeringspunkta mellom grafen og koordinataksane.

c) Finn eit uttrykk for fartsvektoren $\vec{v}$. Kva er t når $|\vec{v}(t)| = 3$?

d) Bestem koordinatane til dei punkta på kurva der fartsvektoren er parallell med koordinataksane.

e) Bestem koordinatane til det punktet der farten er minst.

Alternativ II

I denne oppgåva kan det vere naturleg å bruke dynamisk programvare, men oppgåva kan også løysast ved å bruke grafisk lommereknar. I løysinga av oppgåva vil det vere aktuelt å skissere fleire grafar.

a) Teikn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$ skjer x-aksen i punktet A og y-aksen i punktet B. Punktet O er origo.

b) Bestem arealet av ΔOAB for $a = 2$ anten grafisk eller ved rekning.

c) Gjenta det du gjorde i b) for $a = \frac{1}{2}$ og $a = 3$. Kommenter svara.

Vi skal no studere storleiken av arealet av ΔOAB analytisk.

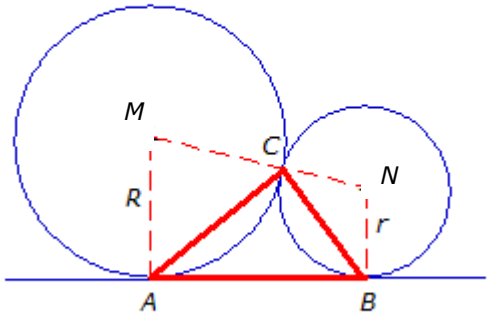
d) Bestem $f'(x)$. Finn likninga for tangenten til funksjonen f i punktet $(a, f(a))$.

e) Bestem koordinatane til skjeringspunkta A og B mellom tangenten og koordinataksane. Kva blir arealet av ΔOAB?

Oppgåve 5

Biletet til venstre viser to ballar som ligg inntil kvarandre. Ballane har radiane *R* og *r*. Berøringspunktet mellom ballane og bordet er kalla høvesvis A og B. Berøringspunktet mellom ballane er kalla C.

I denne oppgåva skal vi undersøkje eigenskapar ved ΔABC.



Figur 1

Figur 1 til venstre viser eit snitt gjennom sentra i ballane, *M* og *N*.

a) Forklar at $\angle BAM = \angle NBA = 90^\circ$, og at $\angle MNB = 180^\circ - \angle AMC$.

b) Vis at $AB = 2\sqrt{Rr}$. (Tips: Bruk Pythagoras' setning.)

Vi set $\angle AMC = v$, $\angle BCN = u$ og $\angle ACM = w$.

c) Vis at $u + w = 90^\circ$, og at $\angle ACB = 90^\circ$.

I resten av oppgåva ser vi på to andre sirklar med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$.

d) Bruk b) til å finne lengda av AB.

e) Konstruer med passar og linjal figur 1 med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$. Skriv ei forklaring til konstruksjonen.

f) Slå ein halvsirkel med AB som diameter. Forklar kvifor denne halvsirkelen går gjennom C.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2	Alle hjelpemidler tillatt, med unntak av internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Vedlegg	Ingen
Vedlegg som skal leveres inn	Ingen
Framgangsmåte og forklaring	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. Formuleringen "*ved regning*" innebærer at oppgaven skal løses trinn for trinn slik at mellomregningen kommer tydelig fram. Det skal gå tydelig fram av besvarelsen hvordan du har kommet fram til svarene.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x \cdot \ln x$

2) $g(x) = 3e^{x^2+1}$

b) Bestem følgende grenseverdi, dersom den eksisterer:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

c) En funksjon f er kontinuerlig, men ikke deriverbar i punktet $(1, 2)$. Tegn en skisse av grafen til en mulig funksjon f.

d) Finn de eksakte løsningene av likningene

1) $2\ln x - 4 = 0$

2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

e) Skriv så enkelt som mulig

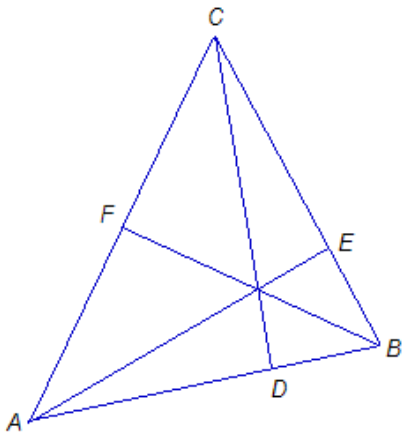
1) $\dfrac{2^{-4} \cdot 2^3}{2^{-2}}$

2) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b}{\left(a^2 b\right)^2 \cdot b^{-\frac{1}{3}}}$

f) Vi har gitt en trekant ABC. Punktet *D* ligger på *AB,* punktet *E* ligger på *BC,* og punktet *F* ligger på *AC.* Se figuren.

Cevas setning sier:

> Linjestykkene *AE*, *BF* og *CD* skjærer hverandre i ett punkt hvis og bare hvis
>
> $$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$



Bruk Cevas setning til å bevise at medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.

Oppgave 2

a) Vis at polynomet $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ er delelig med $x - 2$.

b) Skriv $f(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer.

c) Løs ulikheten $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 9} > 0$.

d) Bestem a slik at likningen $x^3 - 2x^2 - 5x + a = 0$ får en løsning lik 1. Løs likningen for denne verdien av a.

Del 2

Oppgave 3

På en skole er det 55 % jenter og 45 % gutter på Vg2. Av jentene har 25 % valgt matematikk R1. Av guttene har 30 % valgt R1.

a) Formuler de to siste opplysningene i teksten ovenfor som betingede sannsynligheter.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er en gutt som har valgt R1.

c) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev har valgt R1.

Av alle elevene på Vg2 har 30 % valgt fysikk. Blant dem som har valgt R1, er det 80 % som har valgt fysikk.

d) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt fysikkelev har valgt R1.

Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En partikkel beveger seg i planet. Posisjonen til partikkelen ved tiden t er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[t^2\,,\ t^3 - 3t\right] \text{ der } t \in [0\,,\ 2]$$

a) Tegn grafen som beskriver bevegelsen til partikkelen.

b) Bestem ved regning koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen og koordinataksene.

c) Finn et uttrykk for fartsvektoren $\vec{v}$. Hva er t når $|\vec{v}(t)| = 3$?

d) Bestem koordinatene til de punktene på kurven der fartsvektoren er parallell med koordinataksene.

e) Bestem koordinatene til det punktet der farten er minst.

Alternativ II

I denne oppgaven kan det være naturlig å bruke dynamisk programvare, men oppgaven kan også løses ved å bruke grafisk lommeregner. I løsningen av oppgaven vil det være aktuelt å skissere flere grafer.

a) Tegn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$ skjærer *x*-aksen i punktet A og *y*-aksen i punktet B. Punktet O er origo.

b) Bestem arealet av ΔOAB for $a = 2$ enten grafisk eller ved regning.

c) Gjenta det du gjorde i b) for $a = \frac{1}{2}$ og $a = 3$. Kommenter svarene.

Vi skal nå studere størrelsen av arealet av ΔOAB analytisk.

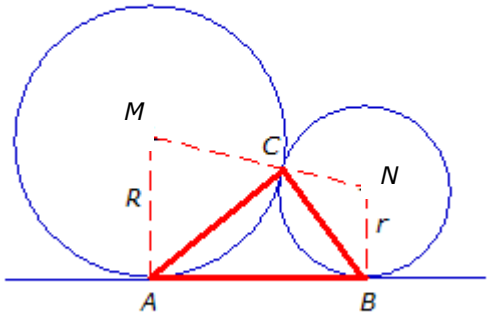
d) Bestem $f'(x)$. Finn likningen for tangenten til funksjonen f i punktet $(a, f(a))$.

e) Bestem koordinatene til skjæringspunktene A og B mellom tangenten og koordinataksene. Hva blir arealet av ΔOAB?

Oppgave 5

Bildet til venstre viser to baller som ligger inntil hverandre. Ballene har radiene *R* og *r*. Berøringspunktet mellom ballene og bordet kalles henholdsvis A og B. Berøringspunktet mellom ballene kalles C.

I denne oppgaven skal vi undersøke egenskaper ved ΔABC.



Figur 1

Figur 1 til venstre viser et snitt gjennom sentrene i ballene, *M* og *N*.

a) Forklar at $\angle BAM = \angle NBA = 90^\circ$, og at $\angle MNB = 180^\circ - \angle AMC$.

b) Vis at $AB = 2\sqrt{Rr}$. (Tips: Bruk Pythagoras' setning.)

Vi setter $\angle AMC = v$, $\angle BCN = u$ og $\angle ACM = w$.

c) Vis at $u + w = 90^\circ$, og at $\angle ACB = 90^\circ$.

I resten av oppgaven ser vi på to andre sirkler med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$.

d) Bruk b) til å finne lengden av AB.

e) Konstruer med passer og linjal figur 1 med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$. Skriv en forklaring til konstruksjonen.

f) Slå en halvsirkel med AB som diameter. Forklar hvorfor denne halvsirkelen går gjennom C.