



# Eksamensoppgaver

04.12.2008

REA3022 Matematikk R1

# Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamensstid:	5 timer: Del 1 skal leverast inn etter 2 timer. Del 2 skal leverast inn etter 5 timer.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillåt kommunikasjon.
Bruk av kjelder:	Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal oppgivast på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må oppgi forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur.  Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal heile adressa og nedlastingsdato oppgivast. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med <a href="http://www.Wikipedia.no">www.Wikipedia.no</a> .
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.  Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser reknedugleik og matematisk forståing</li><li>– gjennomfører logiske resonnement</li><li>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel</li><li>– vurderer om svar er rimelege</li><li>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li></ul>

## Del 1

### Oppgåve 1

a) Deriver funksjonane

1)  $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

2)  $h(x) = x \cdot \ln x$

b) Ei rett linje  $l$  går gjennom punkta  $A(1, 2)$  og  $B(3, 7)$ .

- 1) Set opp ei parameterframstilling for linja  $l$ .
- 2) Finn skjeringspunktet mellom  $l$  og koordinataksene.

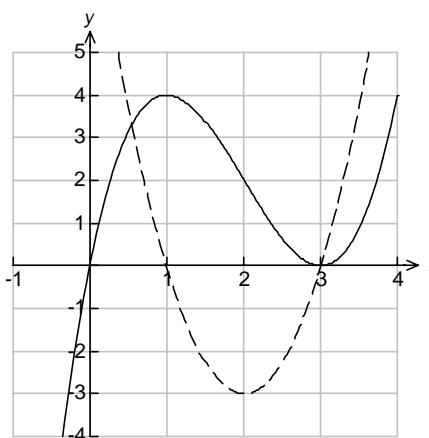
c) Vi har gitt polynomfunksjonen  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

- 1) Vis at  $f(x)$  er deleleg med  $x+1$ . Faktoriser  $f(x)$  i førstegradsfaktorar.
- 2) Løys ulikskapen  $f(x) \geq 0$

d) Hjørna i trekanten  $ABC$  er gitt ved  $A(2, 0)$ ,  $B(4, 1)$  og  $C(3, 5)$ .

- 1) Bestem lengda av sidene i trekanten.
- 2) Undersøk om trekanten er rettvinkla.

e)

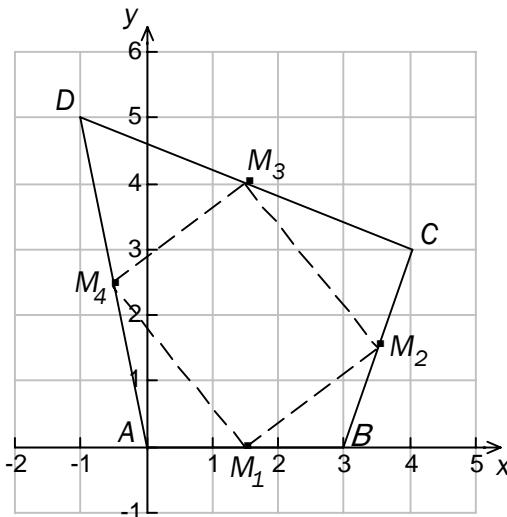


Figuren viser grafen til ein funksjon  $f$  og grafen til den deriverte av funksjonen.

- 1) Forklar kva for ein graf som er grafen til funksjonen  $f$  og kva for ein som er grafen til den deriverte.
- 2) Bruk figuren til å teikne forteiknslinjene for  $f(x)$ , den førstederiverte og den andrederiverte.

## Oppgåve 2

Vi skal studere ein firkant som er vist på figuren nedanfor.



Hjørna i firkanten  $ABCD$  er gitt ved  $A(0,0)$ ,  $B(3,0)$ ,  $C(4,3)$  og  $D(-1,5)$ .

- a) Rekn ut koordinatane til midtpunktta  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  og  $M_4$  i sidekantane i firkanten. Sjå figuren.
- b) Vis at firkanten  $M_1M_2M_3M_4$  er eit parallellogram.

Hjørna i ein vilkårleg firkant er gitt ved  $E(0,0)$ ,  $F(a,0)$ ,  $G(b,c)$  og  $H(d,e)$ . Midtpunktta i sidekantane i firkanten er  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  og  $N_4$ .

- c) Vis at firkanten  $N_1N_2N_3N_4$  er eit parallellogram.

## Del 2

### Oppgåve 3

I ein bunke med kort er det 16 svarte og 14 rauda kort.

- a) Gunhild trekkjer tilfeldig ut to kort. Kva er sannsynet for at dei to korta er svarte?
- b) Ali trekkjer tilfeldig ut 10 kort. Kva er sannsynet for at han trekkjer ut 7 svarte og 3 rauda kort?

I ei eske med myntar er 40 % av myntane laga før 1940. Av desse er 45 % koparmyntar og 55 % sølvmyntar. Av dei som er laga etter 1940, er 35 % koparmyntar og 65 % sølvmyntar. Det blir trekt tilfeldig ut éin mynt.

- c) Kva er sannsynet for at mynten er ein koparmynt?

Mynten som vart trekt ut, var ein koparmynt.

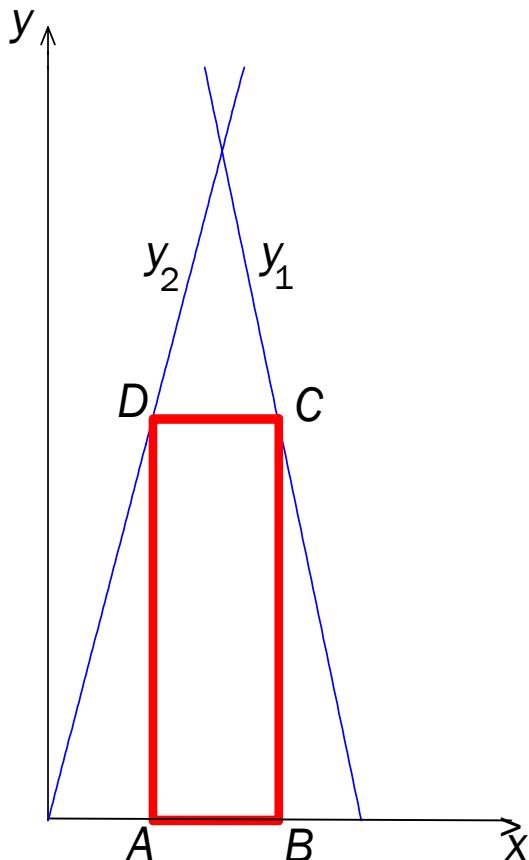
- d) Kva er sannsynet for at mynten er laga før 1940?

## Oppgåve 4

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.  
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneholder delar av begge,  
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I



Firkanten  $ABCD$  er eit rektangel. Hjørna  $A$  og  $B$  ligg på den positive førsteaksen. Hjørnet  $C$  ligg på linja  $y_1 = -5x + 6$ . Hjørnet  $D$  ligg på linja  $y_2 = 4x$ . Sjå figuren.

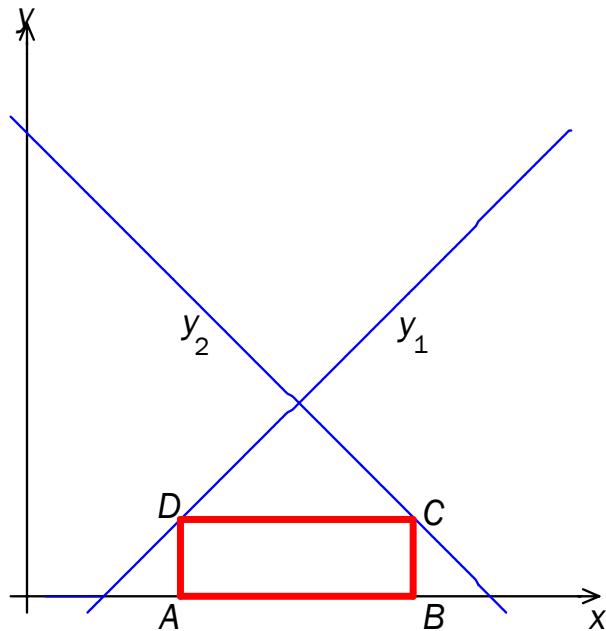
Vi vil undersøkje kor stort arealet av rektanglet kan bli.

- Set førstekoordinaten til punktet  $A$  lik  $u$ . Forklar at  $D(u, 4u)$ , og at andrekoordinaten til  $C$  er  $4u$ .
- Set førstekoordinaten til  $C$  lik  $x$ . Forklar at  $x = \frac{6-4u}{5}$
- Vis at arealet av rektanglet er gitt ved

$$F(u) = -\frac{36}{5}u^2 + \frac{24}{5}u$$

- Finn ved rekning kor stort arealet av rektanglet  $ABCD$  kan bli.

## Alternativ II



Firkanten  $ABCD$  er eit rektangel. Hjørna  $A$  og  $B$  ligg på den positive førsteaksen. Hjørnet  $C$  ligg på linja  $y_2 = -x + 6$ . Hjørnet  $D$  ligg på linja  $y_1 = x - 1$ . Sjå figuren.

Vi vil undersøkje kor stort arealet av rektanglet kan bli.

Vi ser først på tilfellet  $A(2, 0)$ .

- a) Vis at da er  $D(2, 1)$  og  $C(5, 1)$ .
- b) Vis at arealet av rektanglet er lik 3.

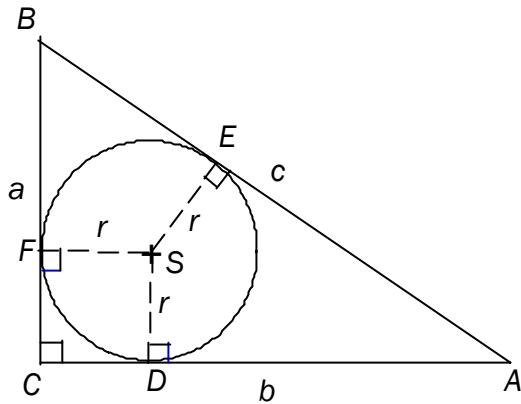
Set førstekoordinaten til punktet  $A$  lik  $x$ . Arealet av rektanglet er da  $F(x)$ .

- c) Skriv av tabellen i svaret ditt. Fyll ut tabellen.

$x$	1,5	2,0	2,5	3,0
$F(x)$		3,0		

- d) Arealet er ein funksjon på forma  $F(x) = ax^2 + bx + c$ . Bestem konstantane  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Finn det største arealet til rektanglet og den tilhørende verdien av  $x$ . Bestem koordinatane til alle hjørna for den  $x$ -verdien som gir størst areal.

## Oppgåve 5



Trekanten  $ABC$  er rettvinkla, med katetane  $a$  og  $b$  og hypotenusen  $c$ . I trekanten er det innskrive ein sirkel med sentrum i  $S$  og radius  $r$ . Tangeringspunktene mellom sirkelen og sidene i trekanten er  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Sjå figuren.

- a) Forklar at  $AD = AE$  og at  $BF = BE$ .

Vi set no  $AD = AE = x$  og  $BF = BE = y$

- b) Finn sidene i trekanten uttrykte ved  $r$ ,  $x$  og  $y$ .  
c) Bruk resultatet i b) til å vise at

$$a + b - c = 2r$$

Formuler denne eigenskapen ved rettvinkla trekantar med eigne ord.

- d) Trekk ei linje frå kvart av hjørna i trekanten til sentrum  $S$  i den innskrivne sirkelen. Forklar at desse linjene halverer  $\angle A$ ,  $\angle B$  og  $\angle C$ .  
e) Konstruer ein tilsvarende figur som den ovanfor med passar og linjal eller med dynamisk programvare når  $r = 2$  cm og  $a = 5$  cm. Gi ei forklaring på konstruksjonen.

# Bokmål

<h2>Eksamensinformasjon</h2>	
<b>Eksamensstid:</b>	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
<b>Hjelpebidrifter på Del 1:</b>	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
<b>Hjelpebidrifter på Del 2:</b>	Alle hjelpebidrifter er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
<b>Bruk av kilder:</b>	Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur.  Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med <a href="http://www.Wikipedia.no">www.Wikipedia.no</a> .
<b>Vedlegg:</b>	Ingen
<b>Framgangsmåte:</b>	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.  Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
<b>Veiledning om vurderingen:</b>	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>– gjennomfører logiske resonnementer</li><li>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>– kan bruke hensiktmessige hjelpebidrifter</li><li>– vurderer om svar er rimelige</li><li>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li></ul>

## Del 1

### Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1)  $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

2)  $h(x) = x \cdot \ln x$

b) En rett linje  $l$  går gjennom punktene  $A(1, 2)$  og  $B(3, 7)$ .

1) Sett opp en parameterframstilling for linja  $l$ .

2) Finn skjæringspunktene mellom  $l$  og koordinataksene.

c) Vi har gitt polynomfunksjonen  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1) Vis at  $f(x)$  er delelig med  $x+1$ . Faktoriser  $f(x)$  i førstegradsfaktorer.

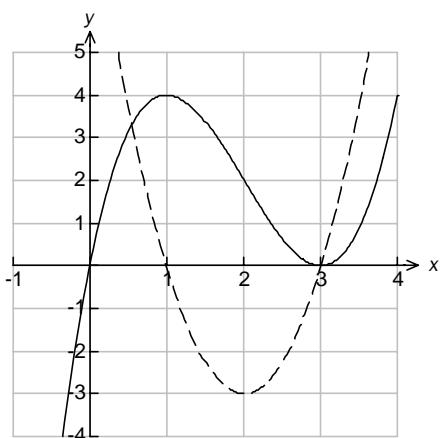
2) Løs ulikheten  $f(x) \geq 0$

d) Hjørnene i trekanten  $ABC$  er gitt ved  $A(2, 0)$ ,  $B(4, 1)$  og  $C(3, 5)$ .

1) Bestem lengden av sidene i trekanten.

2) Undersøk om trekanten er rettvinklet.

e)

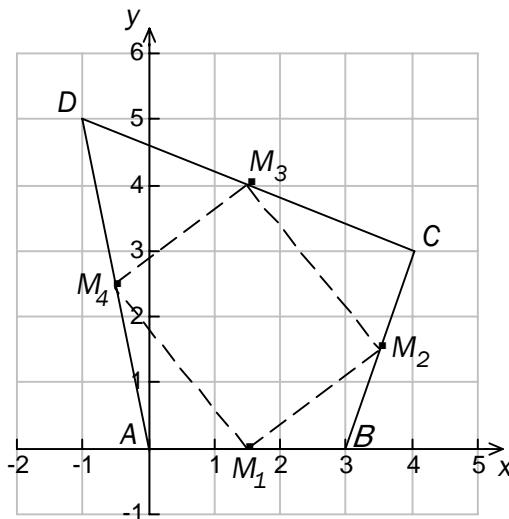


Figuren viser grafen til en funksjon  $f$  og grafen til den deriverte av funksjonen.

- 1) Forklar hvilken graf som er grafen til funksjonen  $f$  og hvilken som er grafen til den deriverte.
- 2) Bruk figuren til å tegne fortegnslinjene for  $f(x)$ , den førstederiverte og den andrederiverte.

## Oppgave 2

Vi skal studere en firkant som er vist på figuren nedenfor.



Hjørnene i firkanten  $ABCD$  er gitt ved  $A(0,0)$ ,  $B(3,0)$ ,  $C(4,3)$  og  $D(-1,5)$ .

- a) Regn ut koordinatene til midtpunktene  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  og  $M_4$  i sidekantene i firkanten. Se figuren.
- b) Vis at firkanten  $M_1M_2M_3M_4$  er et parallellogram.

Hjørnene i en vilkårlig firkant er gitt ved  $E(0,0)$ ,  $F(a,0)$ ,  $G(b,c)$  og  $H(d,e)$ . Midtpunktene i sidekantene i firkanten er  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  og  $N_4$ .

- c) Vis at firkanten  $N_1N_2N_3N_4$  er et parallellogram.

## Del 2

### Oppgave 3

I en bunke med kort er det 16 svarte og 14 røde kort.

- Gunhild trekker tilfeldig ut to kort. Hva er sannsynligheten for at de to kortene er svarte?
- Ali trekker tilfeldig ut 10 kort. Hva er sannsynligheten for at han trekker ut 7 svarte og 3 røde kort?

I en eske med mynter er 40 % av myntene laget før 1940. Av disse er 45 % kobbermynter og 55 % sølvmynter. Av dem som er laget etter 1940, er 35 % kobbermynter og 65 % sølvmynter. Det trekkes tilfeldig ut én mynt.

- Hva er sannsynligheten for at mynten er en kobbermynt?

Mynten som ble trukket ut, var en kobbermynt.

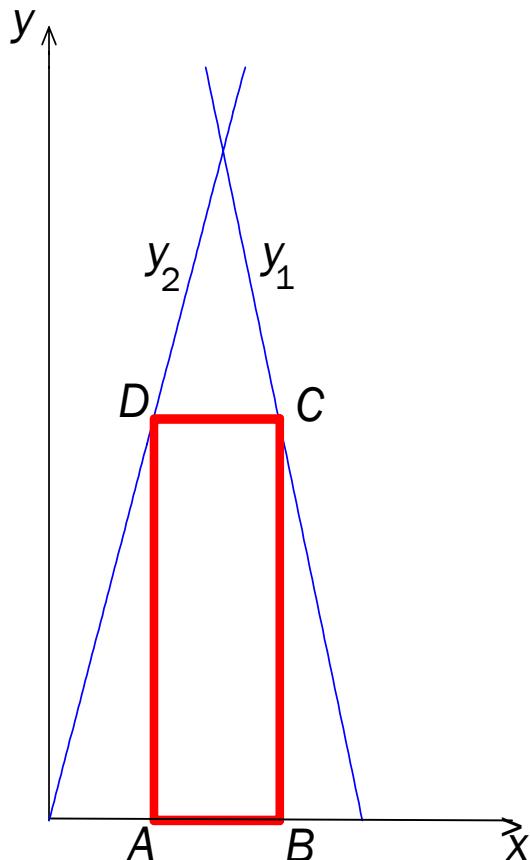
- Hva er sannsynligheten for at mynten er laget før 1940?

## Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.  
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,  
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I



Firkanten  $ABCD$  er et rektangel. Hjørnene  $A$  og  $B$  ligger på den positive førsteaksen. Hjørnet  $C$  ligger på linja  $y_1 = -5x + 6$ . Hjørnet  $D$  ligger på linja  $y_2 = 4x$ . Se figuren.

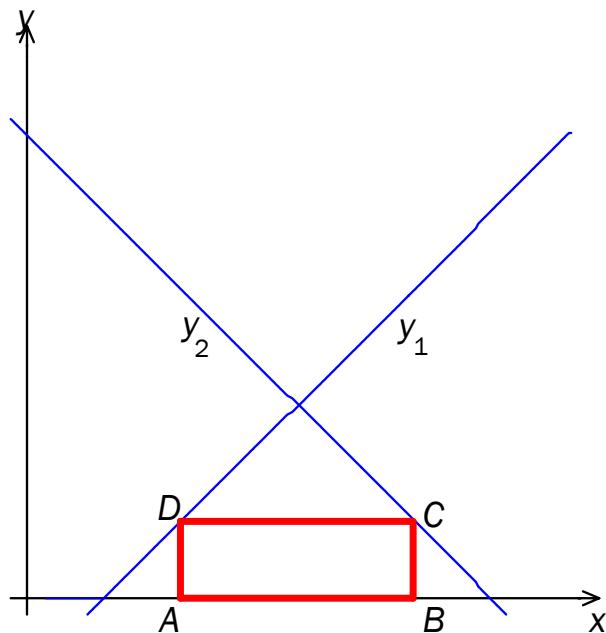
Vi vil undersøke hvor stort arealet av rektanglet kan bli.

- Sett førstekoordinaten til punktet  $A$  lik  $u$ . Forklar at  $D(u, 4u)$ , og at andrekoordinaten til  $C$  er  $4u$ .
- Sett førstekoordinaten til  $C$  lik  $x$ . Forklar at  $x = \frac{6-4u}{5}$
- Vis at arealet av rektanglet er gitt ved

$$F(u) = -\frac{36}{5}u^2 + \frac{24}{5}u$$

- Finn ved regning hvor stort arealet av rektanglet  $ABCD$  kan bli.

## Alternativ II



Firkanten  $ABCD$  er et rektangel. Hjørnene  $A$  og  $B$  ligger på den positive førsteaksen. Hjørnet  $C$  ligger på linja  $y_2 = -x + 6$ . Hjørnet  $D$  ligger på linja  $y_1 = x - 1$ . Se figuren.

Vi vil undersøke hvor stort arealet av rektanglet kan bli.

Vi ser først på tilfellet  $A(2, 0)$ .

a) Vis at da er  $D(2, 1)$  og  $C(5, 1)$ .

b) Vis at arealet av rektanglet er lik 3.

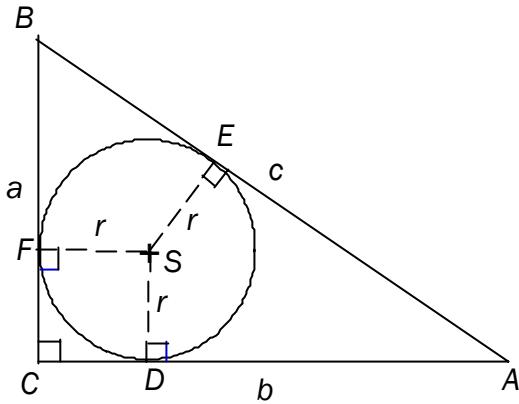
Sett førstekoordinaten til punktet  $A$  lik  $x$ . Arealet av rektanglet er da  $F(x)$ .

c) Skriv av tabellen i besvarelsen din. Fyll ut tabellen.

$x$	1,5	2,0	2,5	3,0
$F(x)$		3,0		

d) Arealet er en funksjon på formen  $F(x) = ax^2 + bx + c$ . Bestem konstantene  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Finn det største arealet til rektanglet og den tilhørende verdien av  $x$ . Bestem koordinatene til alle hjørnene for den  $x$ -verdien som gir størst areal.

## Oppgave 5



Trekanten  $ABC$  er rettvinklet, med katetene  $a$  og  $b$  og hypotenusen  $c$ . I trekanten er det innskrevet en sirkel med sentrum i  $S$  og radius  $r$ . Tangeringspunktene mellom sirkelen og sidene i trekanten er  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Se figuren.

- a) Forklar at  $AD = AE$  og at  $BF = BE$ .

Vi setter nå  $AD = AE = x$  og  $BF = BE = y$

- b) Finn sidene i trekanten uttrykt ved  $r$ ,  $x$  og  $y$ .  
c) Bruk resultatet i b) til å vise at

$$a + b - c = 2r$$

Formuler denne egenskapen ved rettvinklede trekanter med egne ord.

- d) Trekk ei linje fra hvert av hjørnene i trekanten til sentrum  $S$  i den innskrevne sirkelen. Forklar at disse linjene halverer  $\angle A$ ,  $\angle B$  og  $\angle C$ .  
e) Konstruer en tilsvarende figur som den ovenfor med passer og linjal eller med dynamisk programvare når  $r = 2$  cm og  $a = 5$  cm. Gi en forklaring på konstruksjonen.

Kolstadgata 1  
Postboks 2924 Tøyen  
0608 OSLO  
Telefon 23 30 12 00  
Telefaks 23 30 12 99  
[www.utdanningsdirektoratet.no](http://www.utdanningsdirektoratet.no)