

# Eksamensoppgaver

02.12.2009

REA3022 Matematikk R1



# Nynorsk

| <b>Eksamensinformasjon</b>       |  |
|----------------------------------|--|
| <b>Eksamensstid:</b>             | 5 timer:<br>Del 1 skal leverast inn etter 2 timer.<br>Del 2 skal leverast inn etter 5 timer.   |
| <b>Hjelpemiddel på Del 1:</b>    | Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar   |
| <b>Hjelpemiddel på Del 2:</b>    | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tilløt kommunikasjon.  |
| <b>Bruk av kjelder:</b>          | Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal førast opp på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må føre opp forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur.<br><br>Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal du føre opp heile adressa og nedlastingsdatoen. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med <a href="http://www.wikipedia.no">www.wikipedia.no</a> .   |
| <b>Vedlegg:</b>                  | Ingen  |
| <b>Framgangsmåte:</b>            | Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.<br><br>Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.   |
| <b>Rettleiing om vurderinga:</b> | Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det vil seie at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser reknedugleik og matematisk forståing</li><li>– gjennomfører logiske resonnement</li><li>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel</li><li>– vurderer om svar er rimelege</li><li>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li></ul> |

## Del 1

### Oppgåve 1

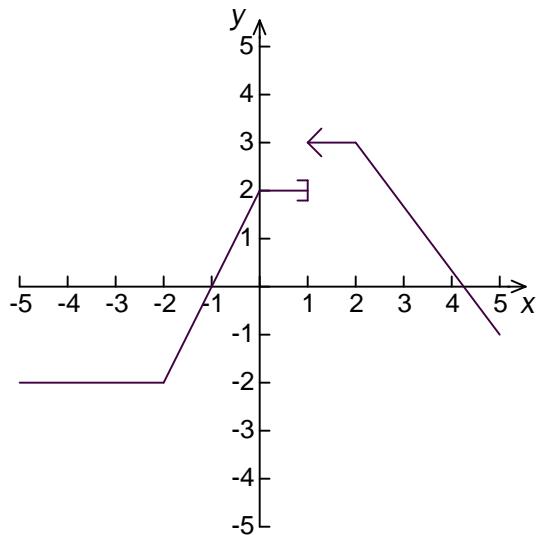
a) Deriver funksjonen  $f(x) = 5e^{3x}$

b) Deriver funksjonen  $g(x) = x^3 \cdot \ln(2x)$

c) Likninga  $2x^3 - 10x^2 - 2x + 10 = 0$  har tre løysingar. Vis at  $x_1 = 1$  er éi løysing og finn dei to andre.

d) Skriv så enkelt som mogleg  $\lg(a^2b) - \lg\left(\frac{1}{ab}\right)$

e) Figuren nedanfor viser grafen til ein funksjon.

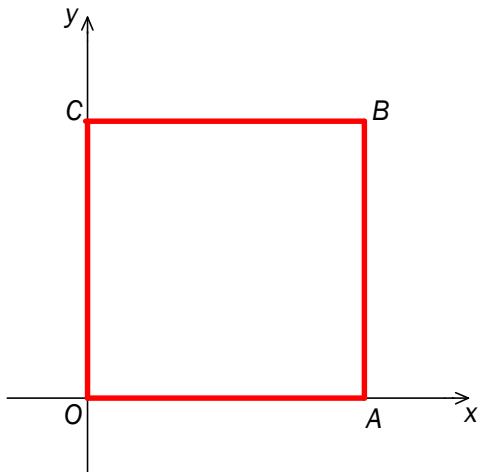


- 1) Finn x-verdien til eventuelle punkt der funksjonen ikkje er kontinuerleg.  
Grunngi svaret ditt.
- 2) Finn x-verdien til eventuelle punkt der funksjonen ikkje er deriverbar.  
Grunngi svaret ditt.

f) Finn grenseverdien  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x + 1}$

- g) Eit kvadrat  $OABC$  med side  $a$  er plassert i eit koordinatsystem. Hjørnet  $O$  er i origo, og  $A$  ligg på førsteaksen. Sjå figuren til høgre.

- 1) Finn koordinatane til punkta  $A$ ,  $B$  og  $C$  uttrykt ved  $a$ .
- 2) Vis at diagonalane i kvadratet står vinkelrett på kvarandre.



- h) Vi har punkta  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  og  $C(6, 2)$ .

- 1) Ei linje  $l$  går gjennom  $A$  og  $B$ . Finn ei parameterframstilling for  $l$ .
- 2) Ei linje  $m$  går gjennom  $C$  og er parallel med vektoren  $[-2, 1]$ . Finn skjeringspunktet mellom  $l$  og  $m$  ved rekning.

## Oppgåve 2

Den italienske matematikaren Vincenzo Viviani (1622–1703) har fått denne setninga i geometrien oppkalla etter seg:

Eit punkt  $P$  blir plassert vilkårleg inne i ein likesida trekant  $ABC$ . Då er summen av avstandane frå  $P$  til kvar av sidene i trekanten lik høgda i trekanten.

- a) Teikn ein figur, set på aktuelle symbol (bokstavar) og formuler Vivianis setning med matematiske symbol.
- b) Skriv arealet av trekanten på to forskjellige måtar, og bruk dette til å bevise Vivianis setning.

## Del 2

### Oppgave 3

Vi bruker ein test for å undersøkje om ein person har ein spesiell sjukdom.

Vi definerer hendingane:

$T$ : Testen tyder på at personen har sjukdommen.

$S$ : Personen har faktisk sjukdommen.

- a) Vi har  $P(T|S) = 0,96$  og  $P(T|\bar{S}) = 0,05$ . Forklar kva desse sannsyna fortel oss.  
Finn  $P(\bar{T}|\bar{S})$ .

Vi reknar med at 3 % av befolkninga har denne sjukdommen. Ein tilfeldig vald person skal testast.

- b) Finn  $P(T)$ .
- c) Dersom testen tyder på at personen har sjukdommen, kva er da sannsynet for at denne personen faktisk har sjukdommen?
- d) Dersom testen tyder på at personen ikkje har sjukdommen, kva er da sannsynet for at personen likevel faktisk har sjukdommen?

## Oppgåve 4

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.  
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneholder delar av begge oppgåvene,  
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I

Posisjonen til ein partikkel etter  $t$  sekund er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [4t - 3t \cdot e^{-t}, 5t \cdot e^{-t}] \quad \text{der } t \geq 0$$

Eininga langs aksane er meter. Andrekoordinaten er høgda over bakken.

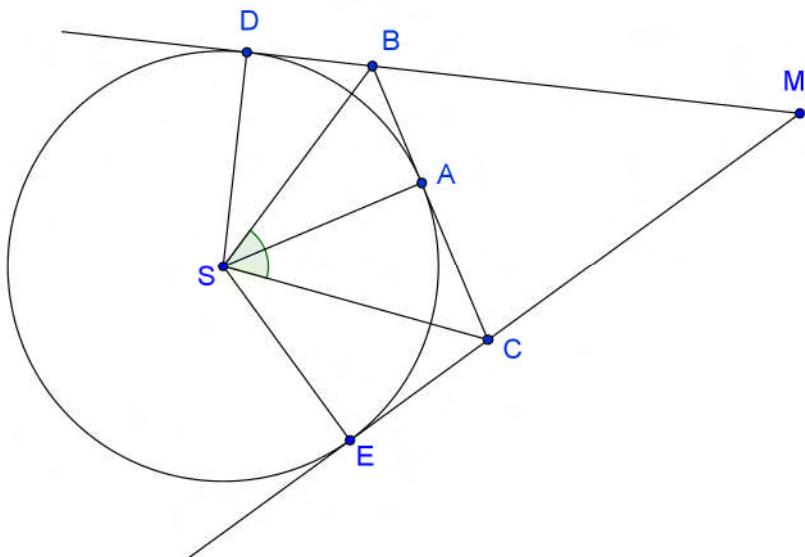
- Kva er posisjonen til partikkelen etter eitt sekund? Teikn grafen til  $\vec{r}$ .
- Finn fartsvektoren og akselarasjonsvektoren ved rekning.
- Finn farten (absoluttverdien av fartsvektoren) etter to sekund.
- Finn ved rekning når partikkelen er i det høgaste punktet.
- Finn vinkelen mellom posisjonsvektoren og fartsvektoren i det høgaste punktet.

## Alternativ II

I denne oppgåva kan det vere ein fordel å bruke digitalt verktøy.

Vi har ein sirkel med sentrum i  $S$  og eit punkt  $M$  utanfor sirkelen. Kvar av sidene i trekanten  $CMB$  ligg på ein tangent til sirkelen.

Tangentane gjennom  $M$  og  $D$  og gjennom  $M$  og  $E$  ligg fast. Tangenten gjennom  $B$  og  $C$  kan varierast. Denne tangenten tangerer sirkelen i  $A$ .  $A$  ligg på den kortaste bogen mellom  $D$  og  $E$ . Sjå figuren nedanfor.



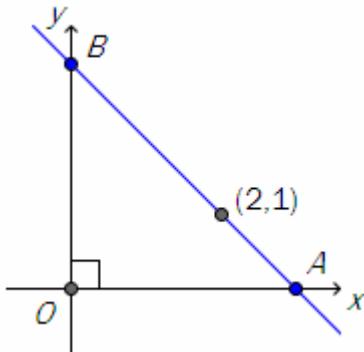
I denne oppgåva skal du undersøkje om denne samanhengen gjeld:

For alle moglege plasseringar av tangeringspunktet  $A$ , er  $\angle CSB$  konstant.

- Bruk dynamisk programvare eller passar og linjal til å konstruere ein figur som stemmer med beskrivinga ovanfor. Flytt punktet  $A$ , og observer kvar gong storleiken til  $\angle CSB$ . Kor godt stemmer samanhengen ovanfor med observasjonane dine?
- Forklar at:
  - 1) trekantane  $SDB$  og  $SAB$  er kongruente (like)
  - 2) trekantane  $SEC$  og  $SAC$  er kongruente (like)
  - 3)  $\angle CSB = \frac{1}{2} \cdot \angle ESD$
- Bruk resultata i b) til å forklare at  $\angle CSB$  er konstant.

## Oppgåve 5

Ei rett linje med stigningstal  $a$  går gjennom punktet  $(2, 1)$ . Linja skal gå nedover mot høgre.

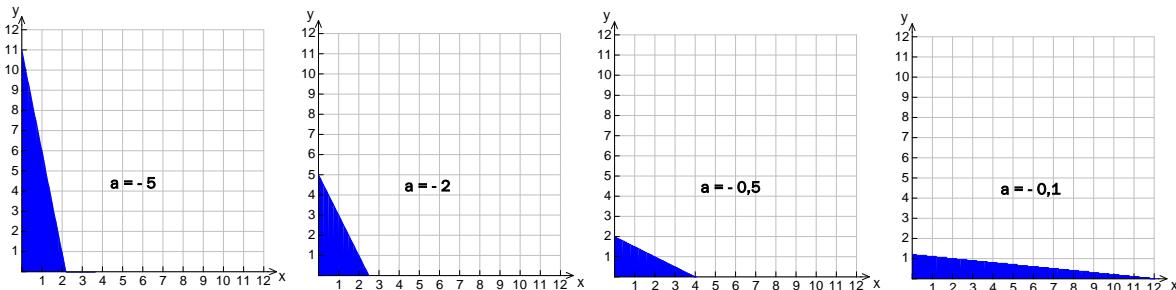


- a) Vis at likninga til linja kan skrivast som

$$y = ax - 2a + 1 \quad , \text{ der } a < 0$$

Vi kallar skjeringspunktet med  $x$ -aksen for  $A$  og skjeringspunktet med  $y$ -aksen for  $B$ .

Vi lèt  $F(a)$  vere arealet av trekanten  $OAB$ .  $O$  er origo. Skissene nedanfor viser trekantane for  $a = -5$ ,  $a = -2$ ,  $a = -0,5$  og  $a = -0,1$ .



I denne oppgåva skal du finne ut kva for ein  $a$ -verdi som gjer arealet minst.

b) Vis at  $F(a) = -\frac{(2a-1)^2}{2a}$

c) Teikn grafen til  $F$ . Vel  $a$ -verdiar i intervallet  $\left[-5, -\frac{1}{10}\right]$ . Bruk grafen til å finne det minste arealet og det tilhøyrande stigningstalet til linja.

d) Vis ved rekning at  $F'(a) = \frac{(2a-1) \cdot (-2a-1)}{2a^2}$

e) Teikn forteiknslinja til  $F'(a)$  og bruk den til å finne det minste arealet. Kva er likninga til linja når arealet er minst?

# Bokmål

| <b>Eksamensinformasjon</b>        |  |
|-----------------------------------|--|
| <b>Eksamensstid:</b>              | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.<br>Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.   |
| <b>Hjelpebidler på Del 1:</b>     | Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler   |
| <b>Hjelpebidler på Del 2:</b>     | Alle hjelpebidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.   |
| <b>Bruk av kilder:</b>            | Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur.<br><br>Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med <a href="http://www.wikipedia.no">www.wikipedia.no</a> .  |
| <b>Vedlegg:</b>                   | Ingen  |
| <b>Framgangsmåte:</b>             | Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.<br><br>Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.   |
| <b>Veiledning om vurderingen:</b> | Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>– gjennomfører logiske resonnementer</li><li>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan bruke fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>– kan bruke hensiktsmessige hjelpebidler</li><li>– vurderer om svar er rimelige</li><li>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li></ul> |

## Del 1

### Oppgave 1

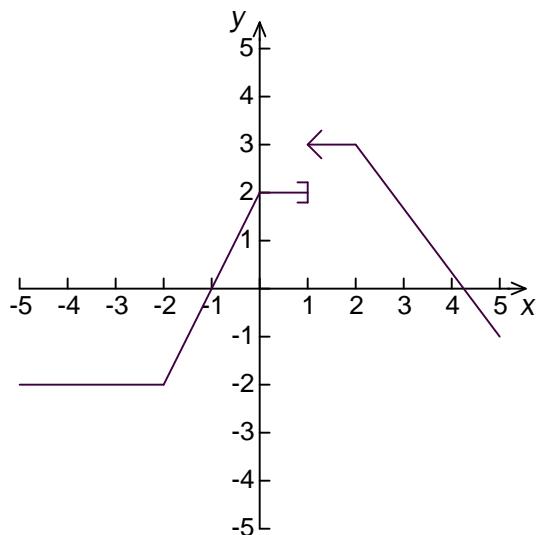
a) Deriver funksjonen  $f(x) = 5e^{3x}$

b) Deriver funksjonen  $g(x) = x^3 \cdot \ln(2x)$

c) Likningen  $2x^3 - 10x^2 - 2x + 10 = 0$  har tre løsninger. Vis at  $x_1 = 1$  er en løsning og finn de to andre.

d) Skriv så enkelt som mulig  $\lg(a^2b) - \lg\left(\frac{1}{ab}\right)$

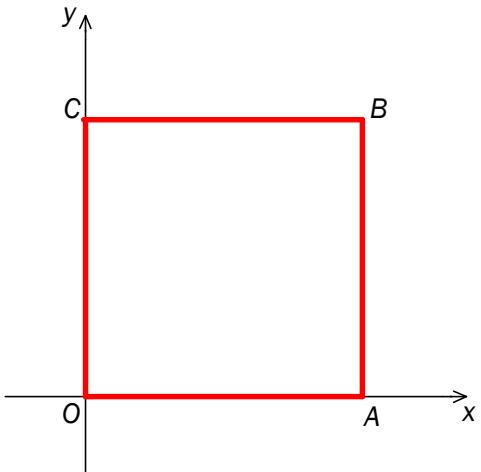
e) Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon.



- 1) Bestem x-verdien til eventuelle punkter der funksjonen ikke er kontinuerlig. Begrunn svaret ditt.
- 2) Bestem x-verdien til eventuelle punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Begrunn svaret ditt.

f) Bestem grenseverdien     $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x + 1}$

- g) Et kvadrat  $OABC$  med side  $a$  er plassert i et koordinatsystem. Hjørnet  $O$  er i origo, og  $A$  ligger på førsteaksen. Se figuren til høyre.
- 1) Bestem koordinatene til punktene  $A$ ,  $B$  og  $C$  uttrykt ved  $a$ .
  - 2) Vis at diagonalene i kvadratet står vinkelrett på hverandre.



- h) Vi har punktene  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  og  $C(6, 2)$ .
- 1) En linje  $l$  går gjennom  $A$  og  $B$ . Bestem en parameterframstilling for  $l$ .
  - 2) En linje  $m$  går gjennom  $C$  og er parallel med vektoren  $[-2, 1]$ . Finn skjæringspunktet mellom  $l$  og  $m$  ved regning.

## Oppgave 2

Den italienske matematikeren Vincenzo Viviani (1622–1703) har fått følgende setning i geometrien oppkalt etter seg:

Et punkt  $P$  plasseres vilkårlig inne i en likesidet trekant  $ABC$ . Da er summen av avstandene fra  $P$  til hver av trekantens sider lik høyden i trekanten.

- a) Tegn en figur, sett på aktuelle symboler (bokstaver) og formuler Vivianis setning med matematiske symboler.
- b) Skriv arealet av trekanten på to forskjellige måter, og bruk dette til å bevise Vivianis setning.

## Del 2

### Oppgave 3

Vi bruker en test for å undersøke om en person har en bestemt sykdom.

Vi definerer hendelsene:

$T$ : Testen tyder på at personen har sykdommen.

$S$ : Personen har faktisk sykdommen.

- a) Vi har  $P(T|S) = 0,96$  og  $P(T|\bar{S}) = 0,05$ . Forklar hva disse sannsynlighetene forteller oss.  
Bestem  $P(\bar{T}|\bar{S})$ .

Vi antar at 3 % av befolkningen har denne sykdommen. En tilfeldig valgt person skal testes.

- b) Bestem  $P(T)$ .
- c) Dersom testen tyder på at personen har sykdommen, hva er da sannsynligheten for at denne personen faktisk har sykdommen?
- d) Dersom testen tyder på at personen ikke har sykdommen, hva er da sannsynligheten for at personen likevel faktisk har sykdommen?

## Oppgave 4

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.  
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge oppgavene,  
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I

Posisjonen til en partikkel etter  $t$  sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [4t - 3t \cdot e^{-t}, 5t \cdot e^{-t}] \quad \text{der } t \geq 0$$

Enheten langs aksene er meter. Andrekoordinaten er høyden over bakken.

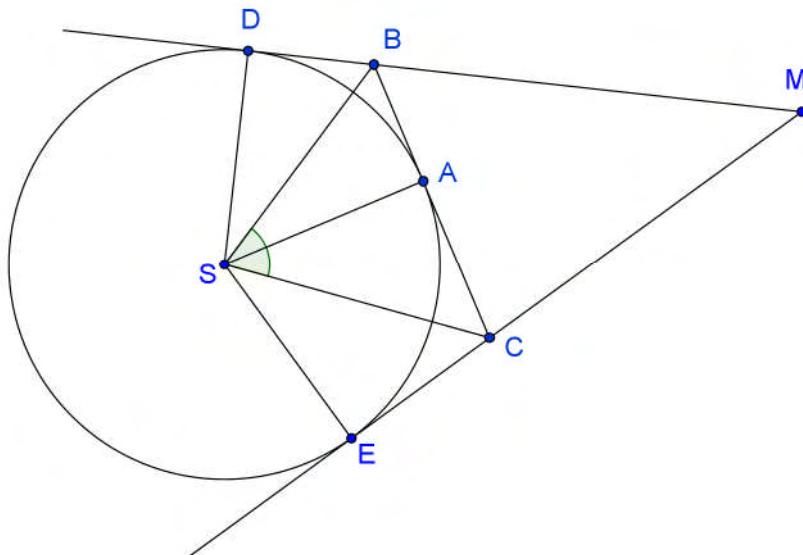
- Hva er posisjonen til partikkelen etter ett sekund? Tegn grafen til  $\vec{r}$ .
- Finn fartsvektoren og akselerasjonsvektoren ved regning.
- Bestem farten (absoluttverdien av fartsvektoren) etter to sekunder.
- Finn ved regning når partikkelen er i det høyeste punktet.
- Bestem vinkelen mellom posisjonsvektoren og fartsvektoren i det høyeste punktet.

## Alternativ II

I denne oppgaven kan det være en fordel å bruke digitalt verktøy.

Vi har en sirkel med sentrum i  $S$  og et punkt  $M$  utenfor sirkelen. Hver av sidene i trekanten  $CMB$  ligger på en tangent til sirkelen.

Tangentene gjennom  $M$  og  $D$  og gjennom  $M$  og  $E$  ligger fast. Tangenten gjennom  $B$  og  $C$  kan varieres. Denne tangenten tangerer sirkelen i punktet  $A$ .  $A$  ligger på den korteste buen mellom  $D$  og  $E$ . Se figuren nedenfor.



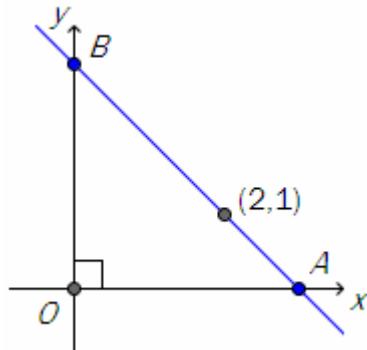
I denne oppgaven skal du undersøke om denne sammenhengen gjelder:

For alle mulige plasseringer av tangeringspunktet  $A$  er  $\angle CSB$  konstant.

- Bruk dynamisk programvare eller passer og linjal til å konstruere en figur som stemmer med beskrivelsen ovenfor. Flytt punktet  $A$ , og observer hver gang størrelsen til  $\angle CSB$ . Hvor godt stemmer sammenhengen ovenfor med dine observasjoner?
- Forklar at:
  - trekantene  $SDB$  og  $SAB$  er kongruente (like)
  - trekantene  $SEC$  og  $SAC$  er kongruente (like)
  - $\angle CSB = \frac{1}{2} \cdot \angle ESD$
- Bruk resultatene i b) til å forklare at  $\angle CSB$  er konstant.

## Oppgave 5

En rett linje med stigningstall  $a$  går gjennom punktet  $(2, 1)$ . Linjen skal synke mot høyre.

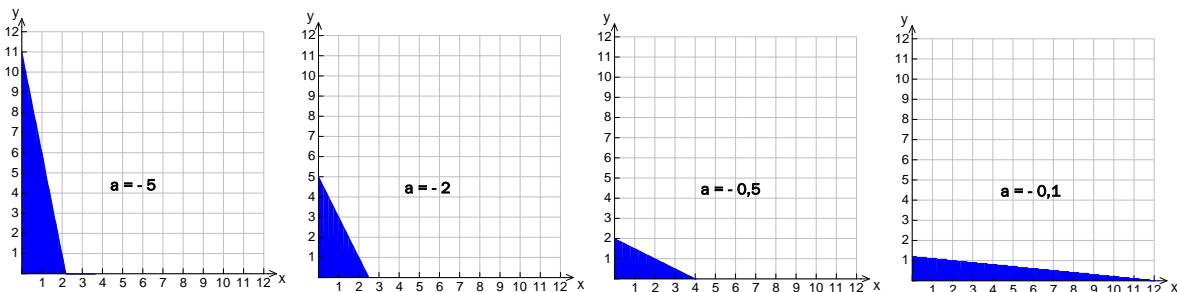


- a) Vis at ligningen til linjen kan skrives som

$$y = ax - 2a + 1 \quad , \text{ der } a < 0$$

Vi kaller skjæringspunktet med  $x$ -aksen for  $A$  og skjæringspunktet med  $y$ -aksen for  $B$ .

Vi lar  $F(a)$  være arealet av trekanten  $OAB$ .  $O$  er origo. Skissene nedenfor viser trekantene for  $a = -5$ ,  $a = -2$ ,  $a = -0,5$  og  $a = -0,1$ .



I denne oppgaven skal du finne ut hvilken  $a$ -verdi som gjør arealet minst.

b) Vis at  $F(a) = -\frac{(2a-1)^2}{2a}$

c) Tegn grafen til  $F$ . Velg  $a$ -verdier i intervallet  $\left[-5, -\frac{1}{10}\right]$ . Bruk grafen til å finne det minste arealet og det tilhørende stigningstallet til linjen.

d) Vis ved regning at  $F'(a) = \frac{(2a-1) \cdot (-2a-1)}{2a^2}$

e) Tegn fortegnslinjen til  $F'(a)$  og bruk den til å finne det minste arealet. Hva er ligningen til linjen når arealet er minst?

Kolstadgata 1  
Postboks 2924 Tøyen  
0608 OSLO  
Telefon 23 30 12 00  
Telefaks 23 30 12 99  
[www.utdanningsdirektoratet.no](http://www.utdanningsdirektoratet.no)