Utdanningsdirektoratet

Eksamen

30.11.2010

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (20 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = 2x \cdot e^x$

2) $g(x) = 3\sqrt{x^2 - 1}$

b) Vis at $x = 1$ er ei løysing av likninga $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0$

Bruk polynomdivisjon til å finne dei andre løysingane.

c) Vi har gitt vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[\, 6t,\ -5t^2 + 45 \right]$$

1) Teikne grafen til vektorfunksjonen når $t \in [0, 3]$

2) Bestem $\vec{v}(1)$. Teikne fartsvektoren inn på grafen.

3) Bestem akselerasjonsvektoren. Kommenter svaret ditt.

d) Ein gjeng består av seks gutar og fire jenter. Vi trekkjer tilfeldig ut to av dei.

Kva er sannsynet for at vi trekkjer ut éin gutt og éi jente?

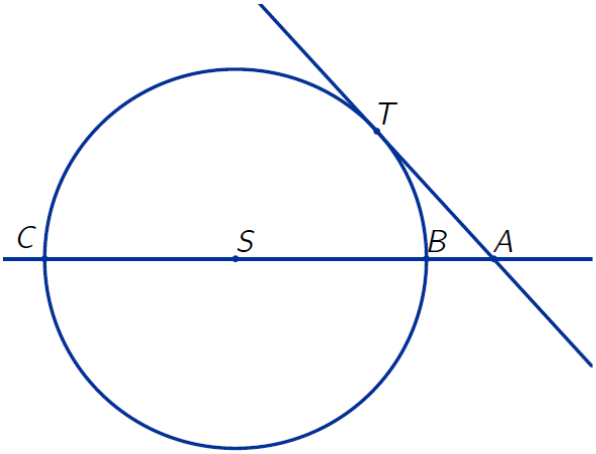
e) I $\Delta\ ABC$ er $AB = 10{,}0$ cm, $\angle A = 75°$ og $\angle C = 90°$. Konstruer trekanten.

f) Bestem grenseverdiane dersom dei eksisterer:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Oppgåve 2 (4 poeng)



Figuren ovanfor viser ein sirkel med sentrum i S og radius r. Frå eit punkt A utanfor sirkelen trekkjer vi ei linje som tangerer sirkelen i punktet T. Linja som går gjennom A og S, skjer sirkelen i B og C.

Vi set $AT = x$ og $AB = y$

a) Bruk Pytagoras' læresetning i ΔSAT til å vise:

$$x^2 = y \cdot (y + 2r)$$

b) Vi set $\angle SCT = 30°$. Finn $y = AB$ uttrykt ved r i dette tilfellet.

DEL 2
Med hjelpemiddel

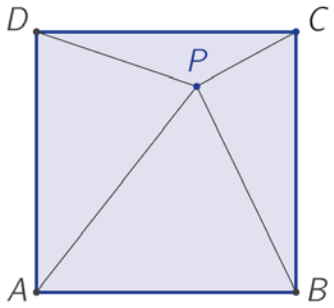
Oppgåve 3 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$

a) Vis ved rekning at $f'(x) = 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x}$. Teikne grafen til f'.

b) Bruk grafen til f' til å finne eventuelle topp-, botn- og vendepunkt på grafen til f.

Oppgåve 4 (4 poeng)



Firkanten $ABCD$ er eit kvadrat med side a. Punktet P er plassert vilkårleg inne i kvadratet. Høgda i $\triangle ABP$ kallar vi h.

a) Finn areala av $\triangle ABP$ og $\triangle PCD$ uttrykt ved a og h.

b) Finn eit uttrykk for summen av areala til $\triangle ABP$ og $\triangle PCD$. Beskriv kva du har funne.

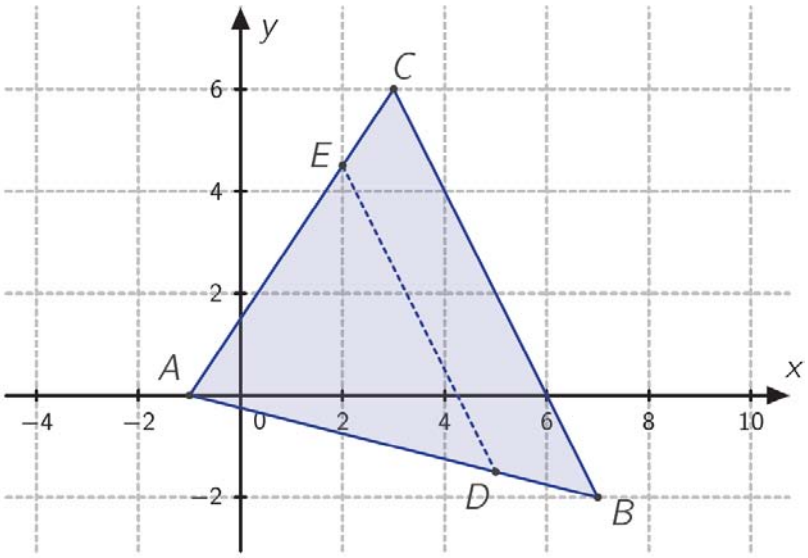
Oppgåve 5 (11 poeng)

Punkta $A(-1, 0)$, $B(7, -2)$ og $C(3, 6)$ er hjørne i ein trekant.

a) Bestem koordinatane til vektorane $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Finn $\angle A$ i $\triangle ABC$ ved rekning.

Punktet D ligg på AB slik at $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$.

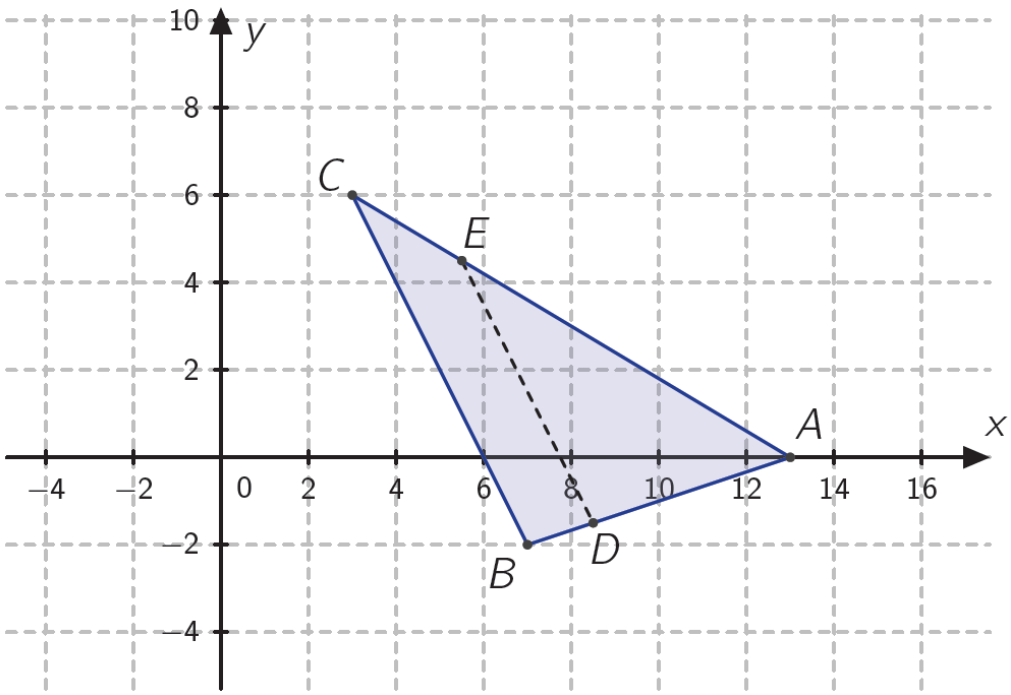
Punktet E ligg på AC slik at $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$. Sjå figur 1.



Figur 1

b) Vis at $\overrightarrow{DE} = [-3, 6]$. Forklar at $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.

Vi lèt no hjørnet A ha koordinatane $(t, 0)$. Ved å variere verdien til parameteren t kan vi få A til å "gli" fram og tilbake på x-aksen. Figur 2 viser korleis trekanten ser ut når $t = 13$.



Figur 2

c) Forklar at $\overrightarrow{DE}$ har same lengd for alle verdiar av t.

d) Bestem ved rekning verdiar for t slik at $\angle A = 90°$

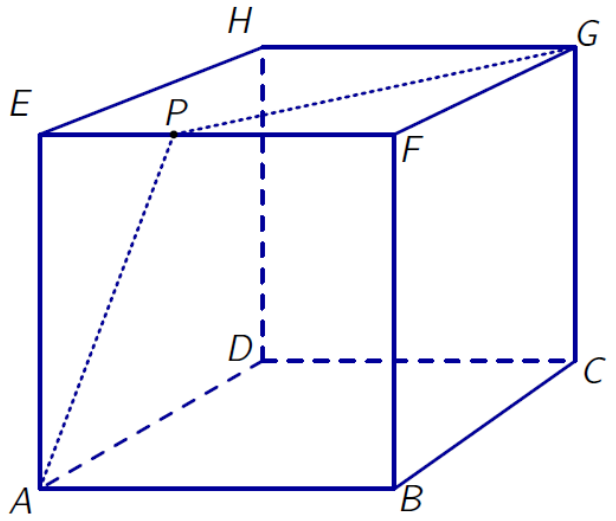
e) Finn ved rekning, eller ved hjelp av dynamisk programvare, andre verdiar for t slik at $\triangle ABC$ blir rettvinkla.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.
Dei to alternativa tel like mykje ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneheld delar av begge alternativa, vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ 1



Figuren ovanfor viser ein terning med side lik 2.

a) Bestem ved rekning lengda av linjestykket AG

Punktet P ligg på sidekanten EF. Vi set $PF = x$

Ein maur går frå A til P og vidare til G på overflata av terningen (sjå figuren).

b) Forklar at mauren tilbakelegg strekninga s gitt ved

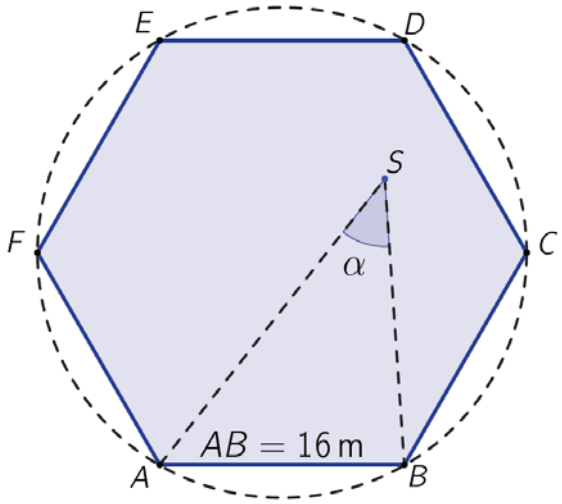
$$s(x) = \sqrt{2^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + 2^2}$$

c) Bruk kalkulator eller eit program på datamaskina til å finne den kortaste strekninga mauren kan gå for å komme frå A til G.

d) Ein elev kjem med følgjande påstand: "Dersom eg svingar opp lokket $EFGH$ om EF, så ser eg med ein gong at $s_{min} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$".

Teikne ein figur og forklar korleis eleven har resonnert og rekna.

Alternativ 2



Ein teatersal er forma som ein regulær sekskant $ABCDEF$ med side 16 m. Scenekanten er sida AB i sekskanten. Eit sete er plassert i punktet S. $\angle ASB = \alpha$.

a) Finn lengda til BD ved rekning.

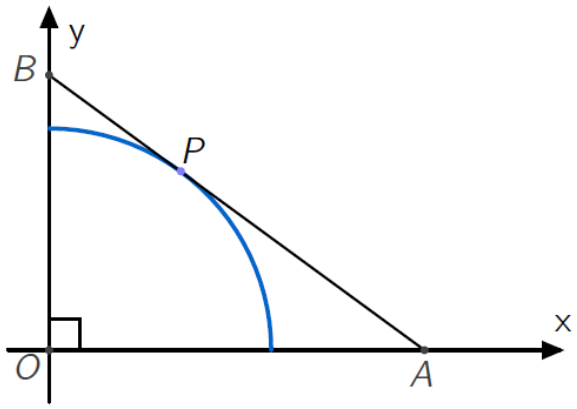
b) Forklar at $\alpha = 30°$ når setet er plassert i hjørna C, D, E eller F.

Ikkje alle er einige om kvar dei beste seta i salen er.

c) Nokre meiner at det beste setet er der $\alpha = 90°$.
Vis ved hjelp av konstruksjon kvar dei beste seta er plasserte dersom dette er det einaste kravet.

d) Vis ved hjelp av ei skisse, på frihand eller med digitalt verktøy, kvar vi kan plassere S slik at $\alpha = 45°$.

Oppgåve 7 (8 poeng)



Figuren ovanfor viser ein kvartsirkel med radius 3 og sentrum i origo. Ein tangent i punktet P skjer koordinataksane i A og B.

Kvartsirkelen er grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}\ , \qquad x\in\langle 0,\,3\rangle$$

Punktet P har førstekoordinat a. Det kan visast at likninga for tangenten er

$$y=\frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}\cdot x+\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}$$

a) Bestem koordinatane til punkta A og B uttrykt ved a.

b) Vis at arealet F av trekanten OAB er $F(a)=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}$

c) Teikne ei skisse av grafen til F. Bruk skissa til å finne det minste arealet av $\triangle OAB$ med tilhøyrande verdi av a.

d) Bestem $F'(a)$ og bruk denne til å finne den eksakte verdien for a som gjer at arealet av trekanten blir minst mogleg.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (20 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 2x \cdot e^x$

2) $g(x) = 3\sqrt{x^2 - 1}$

b) Vis at $x = 1$ er en løsning av likningen $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0$

Bruk polynomdivisjon til å finne de andre løsningene.

c) Vi har gitt vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[\, 6t,\ -5t^2 + 45 \right]$$

1) Tegn grafen til vektorfunksjonen når $t \in [0, 3]$

2) Bestem $\vec{v}(1)$. Tegn fartsvektoren inn på grafen.

3) Bestem akselerasjonsvektoren. Kommenter svaret ditt.

d) En gjeng består av seks gutter og fire jenter. Vi trekker tilfeldig ut to av dem.

Hva er sannsynligheten for at vi trekker ut én gutt og én jente?

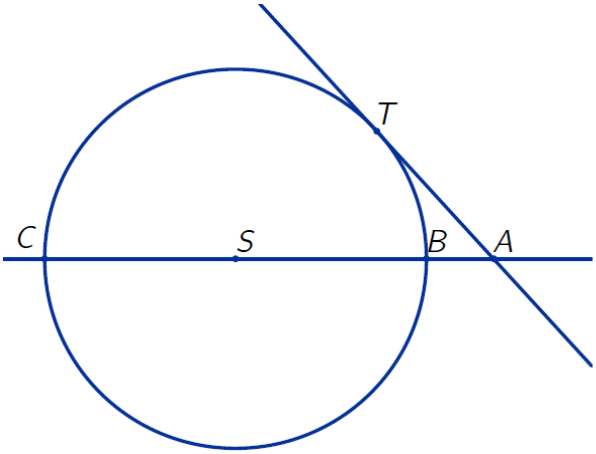
e) I $\Delta\ ABC$ er $AB = 10{,}0$ cm, $\angle A = 75°$ og $\angle C = 90°$. Konstruer trekanten.

f) Bestem grenseverdiene dersom de eksisterer:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Oppgave 2 (4 poeng)



Figuren ovenfor viser en sirkel med sentrum i S og radius r. Fra et punkt A utenfor sirkelen trekker vi en linje som tangerer sirkelen i punktet T. Linjen som går gjennom A og S, skjærer sirkelen i B og C.

Vi setter $AT = x$ og $AB = y$

a) Bruk Pytagoras' læresetning i ΔSAT til å vise:

$$x^2 = y \cdot (y + 2r)$$

b) Vi setter $\angle SCT = 30°$. Finn $y = AB$ uttrykt ved r i dette tilfellet.

DEL 2
Med hjelpemidler

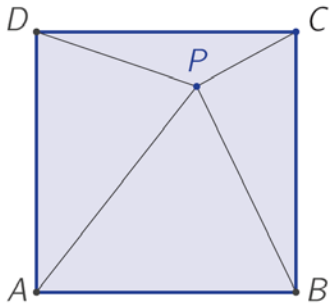
Oppgave 3 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$

a) Vis ved regning at $f'(x) = 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x}$. Tegn grafen til f'.

b) Bruk grafen til f' til å finne eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

Oppgave 4 (4 poeng)



Firkanten $ABCD$ er et kvadrat med side a. Punktet P er plassert vilkårlig inne i kvadratet. Høyden i $\triangle ABP$ kaller vi h.

a) Finn arealene av $\triangle ABP$ og $\triangle PCD$ uttrykt ved a og h.

b) Finn et uttrykk for summen av arealene til $\triangle ABP$ og $\triangle PCD$. Beskriv hva du har funnet.

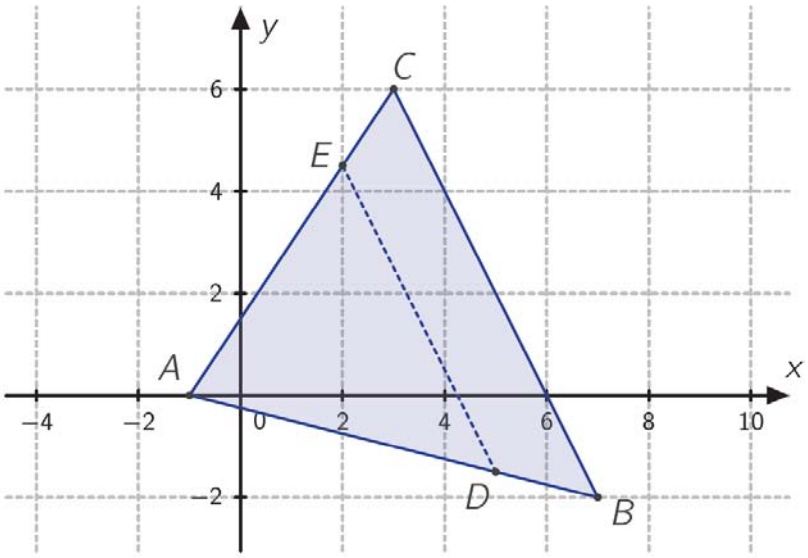
Oppgave 5 (11 poeng)

Punktene $A(-1, 0)$, $B(7, -2)$ og $C(3, 6)$ er hjørner i en trekant.

a) Bestem koordinatene til vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Finn $\angle A$ i $\triangle ABC$ ved regning.

Punktet D ligger på AB slik at $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$.

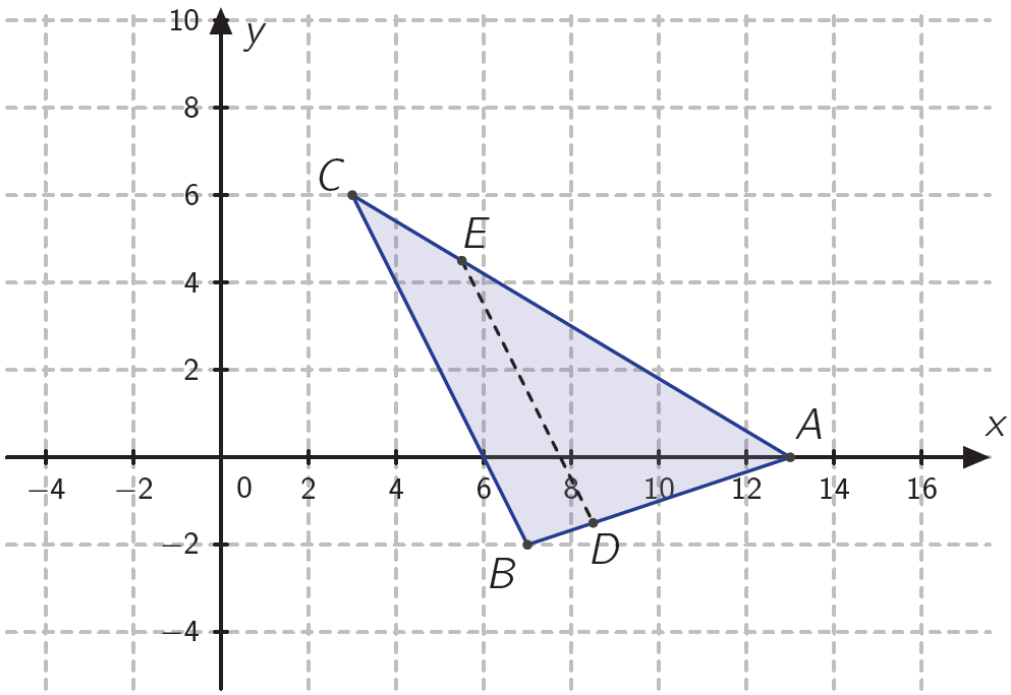
Punktet E ligger på AC slik at $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$. Se figur 1.



Figur 1

b) Vis at $\overrightarrow{DE} = [-3, 6]$. Forklar at $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.

Vi lar nå hjørnet A ha koordinatene $(t, 0)$. Ved å variere verdien til parameteren t kan vi få A til å "gli" fram og tilbake på x-aksen. Figur 2 viser hvordan trekanten ser ut når $t = 13$.



Figur 2

c) Forklar at $\overrightarrow{DE}$ har samme lengde for alle verdier av t.

d) Bestem ved regning verdier for t slik at $\angle A = 90°$

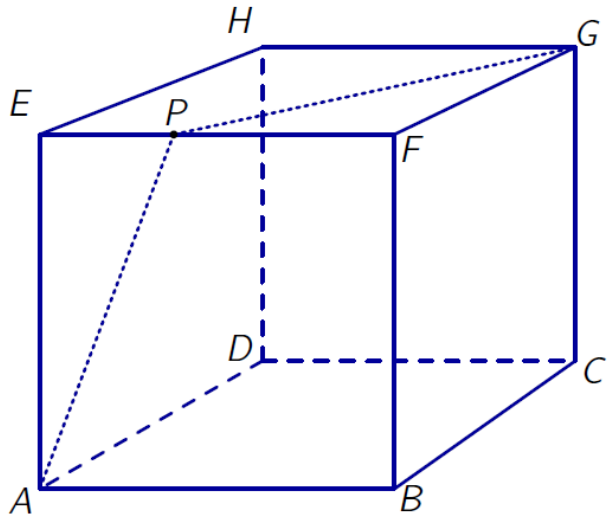
e) Finn ved regning, eller ved hjelp av dynamisk programvare, andre verdier for t slik at $\triangle ABC$ blir rettvinklet.

Oppgave 6 (8 poeng)

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ 1



Figuren ovenfor viser en terning med side lik 2.

a) Bestem ved regning lengden av linjestykket AG

Punktet P ligger på sidekanten EF. Vi setter $PF = x$

En maur går fra A til P og videre til G på overflaten av terningen (se figuren).

b) Forklar at mauren tilbakelegger strekningen s gitt ved

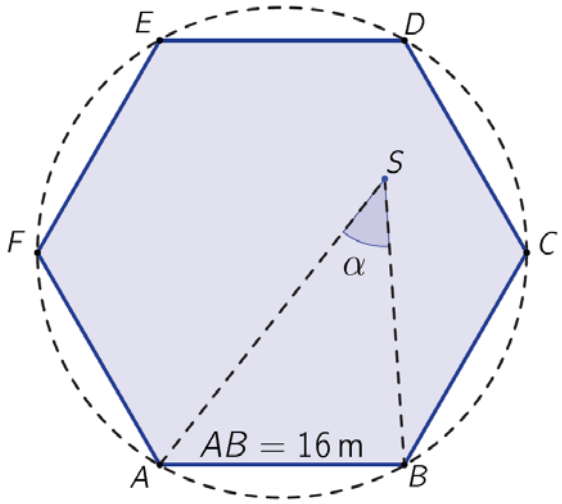
$$s(x) = \sqrt{2^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + 2^2}$$

c) Bruk kalkulator eller et program på datamaskinen til å finne den korteste strekningen mauren kan gå for å komme fra A til G.

d) En elev kommer med følgende påstand: "Hvis jeg svinger opp lokket $EFGH$ om EF, så ser jeg med en gang at $s_{min} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$".

Tegn en figur og forklar hvordan eleven har resonnert og regnet.

Alternativ 2



En teatersal er formet som en regulær sekskant $ABCDEF$ med side 16 m. Scenekanten er siden AB i sekskanten. Et sete er plassert i punktet S. $\angle ASB = \alpha$.

a) Finn lengden til BD ved regning.

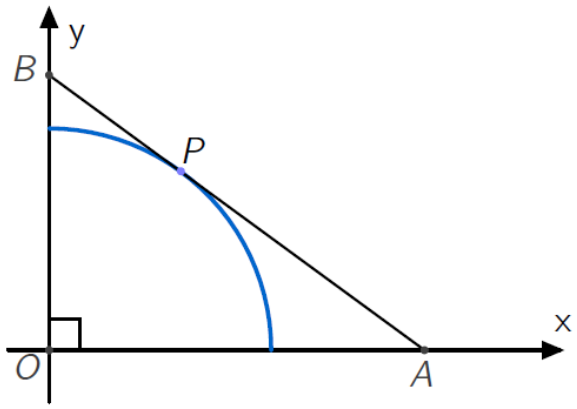
b) Forklar at $\alpha = 30°$ når setet er plassert i hjørnene C, D, E eller F.

Ikke alle er enige om hvor de beste setene i salen er.

c) Noen mener at det beste setet er der hvor $\alpha = 90°$.
Vis ved hjelp av konstruksjon hvor de beste setene er plassert hvis dette er det eneste kravet.

d) Vis ved hjelp av en skisse, på frihånd eller med digitalt verktøy, hvor vi kan plassere S slik at $\alpha = 45°$.

Oppgave 7 (8 poeng)



Figuren ovenfor viser en kvartsirkel med radius 3 og sentrum i origo. En tangent i punktet P skjærer koordinataksene i A og B.

Kvartsirkelen er grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}\ , \qquad x\in\langle 0,\,3\rangle$$

Punktet P har førstekoordinat a. Det kan vises at likningen for tangenten er

$$y=\frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}\cdot x+\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}$$

a) Bestem koordinatene til punktene A og B uttrykt ved a.

b) Vis at arealet F av trekanten OAB er $F(a)=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}$

c) Tegn en skisse av grafen til F. Bruk skissen til å finne det minste arealet av $\triangle OAB$ med tilhørende verdi av a.

d) Bestem $F'(a)$ og bruk denne til å finne den eksakte verdien for a som gjør at arealet av trekanten blir minst mulig.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet